LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

~~517.1~~ 515
~~D85t~~ D853t
v. 2

MATHEMATICS LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/traiteselementai02dubo

# TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES

DE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

# CALCUL INTÉGRAL.

TOME II.

# TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES

DE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

# CALCUL INTÉGRAL,

INDÉPENDANS DE TOUTES NOTIONS DE QUANTITÉS INFINITÉSIMALES ET DE LIMITES;

Ouvrage mis à la portée des Commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des Sciences exactes;

PAR J.-B.-E. DU BOURGUET,

Ancien Officier de Marine, Docteur en la Faculté des Sciences, Officier de l'Université, et Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Impérial.

TOME SECOND.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

PARIS,

CHEZ { l'Auteur, rue St-Jacques, n° 121;
COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.

# TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES

DE

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

# CALCUL INTÉGRAL,

INDÉPENDANS DES TRAITÉS SPÉCIAUX ÉTENDUS
DIFFÉRENTIELS ET INTÉGRAUX;

Ouvrage mis à la portée des Commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées d'intégration, avec des applications utiles aux parties des Sciences exactes;

PAR J.-B. E. DU BOURGUET,

Ancien Officier de Marine, Docteur en la Faculté des Sciences, Officier de l'Université, et Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée impérial.

TOME SECOND.

PARIS,

CHEZ { L'Auteur, rue St-Jacques, n° 141;
COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.

513
D853t
v. 2
MATHEMATICS LIBRARY

# TRAITÉS
# DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
# ET DE CALCUL INTÉGRAL.

## SUITE DE LA SECONDE PARTIE.

# CALCUL INTÉGRAL.

## SECTION II.

*De l'intégration des Fonctions et Equations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, et des solutions particulières de ces Equations.*

### CHAPITRE Ier.

*De l'intégration des Fonctions différentielles du premier ordre à plusieurs variables qui sont exactes.*

318. Une idée extrêmement simple qui se présente naturellement à l'esprit, et dont cependant il me semble



25718

qu'on n'a pas fait usage jusqu'à présent, est que le théorème démontré à l'article 56, et qui est connu depuis long-temps, donne immédiatement l'intégrale de toute fonction différentielle exacte et homogène du premier ordre entre un nombre quelconque de variables.

Du théorème en question traduit en règle d'intégration, il résulte que pour intégrer une fonction différentielle homogène entre un nombre quelconque de variables, *il faut vérifier si cette différentielle est exacte* (art. 54), *et dans le cas où elle l'est, substituer aux différentielles des variables, les variables mêmes; enfin diviser le résultat par le degré de la proposée, augmenté de l'unité, ce qui donnera l'integrale demandée.*

EXEMPLE I. *Intégrer la fonction différentielle homogène*

$$(3x^2+2bxy-3y^2)\,dx+(bx^2-6xy+3cy^2)\,dy\ldots.(a).$$

La règle de vérification d'exactitude enseignée à l'article (54) donne

$$\frac{d^y(3x^2+2bxy-3y^2)}{dy}=2bx-6y=\frac{d^x(bx^2-6xy+3cy^2)}{dx};$$

donc la proposée est exacte. Cela posé, y substituant respectivement les variables $x$ et $y$ à la place de leurs différentielles $dx$ et $dy$, et divisant le résultat par le degré 2 de la proposée + 1, ou par 3, on aura

$$\int(a)=\frac{3x^3+2bx^2y-3xy^2+bx^2y-6xy^2+3cy^3}{3}$$
$$=x^3+bx^2y-3xy^2+cy^3+\text{const}\ (*).$$

(*) M. l'abbé Marie a intégré cette même fonction différentielle

EXEMPLE II. *Intégrer la formule différentielle*

$$\left[\frac{2\sqrt{(xy)}-z}{2u^2\sqrt{x}}\right]dx+\frac{xdy}{2u^2\sqrt{y}}$$
$$-2\left[\frac{x\sqrt{y}-z\sqrt{x}}{u^3}\right]du-\frac{\sqrt{x}dz}{u^2}\ldots\ldots(b),$$

*qui est homogène et du degré* $-\frac{3}{2}$.

Par le moyen des méthodes enseignées à l'article 54, on vérifiera que la différentielle proposée est exacte. Cela posé, substituant à la place des différentielles $dx$, $dy$, $du$ et $dz$ les intégrales respectives $x$, $y$, $u$ et $z$; ensuite divisant le résultat par $-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$; c'est-à-dire le multipliant par $-2$, on a

$$\int(b)=-2u^{-2}x\sqrt{y}+u^{-2}z\sqrt{x}-xu^{-2}\sqrt{y}+4xu^{-2}\sqrt{y}$$
$$-4zu^{-2}\sqrt{x}+2zu^{-2}\sqrt{x}=\frac{x\sqrt{y}-z\sqrt{x}}{u^2}+\text{const.}$$

319. REMARQUE I. Je ne vois de long dans la méthode enseignée précédemment pour intégrer les formules différentielles homogènes lorsqu'elles se composent de beaucoup de variables, que le calcul préparatoire qui est commun à toutes les méthodes connues pour opérer ces intégrations, et qui sert à vérifier si la différentielle proposée est exacte (art. 54). Je serais donc d'avis, vu l'extrême simplicité de notre méthode d'intégration, que quelle que fût la différentielle homogène proposée, l'on commençât par l'intégrer suivant notre méthode, sans vérifier préalablement si elle est exacte, et qu'ensuite on différentiât le résultat trouvé, ce qui

---

dans ses *Leçons élémentaires de Mathématiques*, article 938, page 384, édition de 1770, par une méthode assez ingénieuse, mais beaucoup plus longue et compliquée que la nôtre.

devrait reproduire la proposée, si celle-ci était exacte. Dans le cas où la différentielle proposée et celle trouvée ne seraient pas identiques, on en serait quitte pour avoir fait un calcul, à la vérité inutile, mais beaucoup plus court que s'il avait fallu commencer par reconnaître, suivant la méthode de l'article 54, si la proposée était une différentielle exacte. Par exemple, dans la seconde application de l'article précédent, le calcul que nous avons fait, plus celui de la différentiation de $\frac{x\sqrt{y}-z\sqrt{x}}{u^2}$, demandent bien moins de temps et de peines, que la recherche des six équations de condition requises par la méthode de l'article 54, pour vérifier si une formule différentielle entre quatre variables est exacte.

320. Remarque II. Si le degré de la formule différentielle homogène proposée est $= -1$, et si toutes les variables du dénominateur passées au numérateur par le changement des signes de leur exposant, ne donnent pas des termes différentiels de logarithmes tels que $Ax^{-1}dx$, alors notre méthode s'applique également à l'intégration d'une telle formule différentielle; ce qui doit être, puisque le cas du degré nul pour la fonction homogène $F(x, y, z \ldots)$ que nous avons considérée à l'article 56, et qui donne dans ce même cas, le degré de la différentielle $= 0 - 1 = -1$, n'est pas exclu du théorème général démontré dans cet article. Cependant le résultat qu'on trouve en suivant la méthode précédente, laisse encore dans l'incertitude sur les vrais signes des termes, et admet quelquefois un facteur général constant qui ne doit pas être dans la vraie intégrale. Mais on rectifie ce résultat en même temps qu'on vérifie si la différentielle proposée est

exacte, en différentiant le résultat trouvé, et en examinant quels doivent être les signes des termes, ainsi que le facteur constant qu'on doit supprimer, pour que la différentielle trouvée par le calcul soit identique avec la proposée. Rendons ceci plus sensible par un exemple, en nous proposant d'intégrer la formule différentielle homogène du degré — 1

$$\frac{xydz + 2z^2dy - 2xzdy + yzdx - 2yzdz}{y^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

La méthode d'intégration enseignée à l'article 318 étant appliquée à cette formule, donne

$$\int(a) = \frac{xyz + 2z^2y - 2xzy + yzx - 2yz^2}{y^3(-1+1)} =$$

$$\frac{2(xyz - xyz) + 2(yz^2 - yz^2)}{y^3(1-1)} = \frac{2(xyz + yz^2)(1-1)}{y^3(1-1)} \ldots (b).$$

Or, nous remarquerons, 1°, que le rapport des numérateur et dénominateur nuls de $\frac{1-1}{1-1}$ qui absorbent eux-mêmes les numérateur et dénominateur du dernier membre de l'équation $(b)$, étant égal à l'unité (*voyez* la note II du Calcul différentiel), on aura

$$\int(a) = \frac{2(xz + z^2)}{y^2} \ldots\ldots (c);$$

2°. qu'à cause que dans la première valeur de $\int(a)$ [équat. $(b)$], la quantité $xyz - 2xyz + xyz$ ou $2(xyz - xyz)$ peut être écrite sous la forme de $2xyz(1-1)$, ou sous celle de $-2xyz(1-1)$, et que de même $2yz^2 - 2yz^2$ peut être écrit sous la forme $2yz^2(1-1)$, ou sous celle $-2yz^2(1-1)$, il s'ensuit que les signes de $xz$ et de $z^2$ dans l'équa-

tion ($c$), sont encore indéterminés, et que le résultat de notre intégration est

$$\int(a) = \frac{2(\pm xz \pm z^2)}{y^2} \ldots\ldots (d).$$

Pour déterminer les vrais signes qui appartiennent aux termes de cette intégrale, et en même temps pour vérifier si la différentielle proposée est exacte, différentions l'équation ($d$), ce qui nous donne

$$(a) = \frac{2[\pm yxdz \pm yzdx \pm 2zydz \mp 2xzdy \mp 2z^2dy]}{y^3}.$$

Comparant cette différentielle avec la proposée, on voit d'abord qu'il faut supprimer le facteur général et constant 2; ensuite que $xz$ doit être pris positif, et $z^2$ négatif : ainsi la vraie intégrale de la proposée ($a$) est

$$\frac{xz - z^2}{y^3} + \text{const.}$$

Si la formule différentielle qu'on veut intégrer était celle homogène du degré $-1$

$$\frac{4xydx + x^2dy}{2yx^2} \ldots\ldots (e),$$

la méthode appliquée directement donnerait $\frac{5x^2y}{0}$, ce qui est un résultat absurde; mais si l'on avait passé les variables du dénominateur de la proposée ($e$) dans le numérateur, cette formule serait devenue

$$2x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}y^{-1}dy;$$

d'où l'on voit qu'elle se réduit à deux termes qui sont des différentielles logarithmiques, et il est aisé d'en

conclure que la vraie intégrale de ($e$) est

$$l\,(x^2\sqrt{y}) + \text{const.}$$

321. En différentiant un monome $Ax^m y^n z^p \ldots$ d'un degré quelconque $m + n + p +$ etc., quels que soient ces exposans, on a la différentielle

$$mAx^{m-1}y^n z^p \ldots dx + nAx^m y^{n-1} z^p \ldots dy$$
$$+ pAx^m y^n z^{p-1} \ldots dz + \text{etc} \ldots\ldots (a).$$

Or, j'observe 1°. que cette fonction différentielle est homogène; 2°. qu'elle renferme autant de termes qu'il y a de variables; 3°. que chaque terme renferme toutes les variables, ou que du moins si l'une des variables manque dans l'un des termes, sa différentielle s'y trouve, ce qui aura lieu si l'exposant primitif de cette variable est l'unité.

Ainsi toute fonction différentielle entre un nombre quelconque de variables qui sera exacte, et qui remplira ces trois conditions, pourra être intégrée complètement par la règle enseignée à l'article 318, et aura pour intégrale un monome renfermant toutes ces variables.

Cela posé, étant proposé d'intégrer une fonction différentielle hétérogène entre plusieurs variables, et exacte, *on rassemblera entre eux tous les termes qui auront les trois conditions requises ci-dessus pour les différentielles des monomes, et tous ces rassemblemens étant faits de justesse, puisque la différentielle proposée est supposée exacte, on les intégrera chacun particulièrement, en se servant de la méthode de l'article 318. La somme de toutes ces intégrales sera la vraie intégrale de la proposée.*

EXEMPLE. *Intégrer la fonction*

$$\frac{xdy}{2z\sqrt{y}} + 2xzdx - \frac{\sqrt{ydz}}{3\sqrt[3]{z^2}} + x^2dz - \frac{x\sqrt{ydz}}{z^2}$$
$$- \frac{\sqrt[8]{zdy}}{2\sqrt{y}} + \frac{dx\sqrt{y}}{z}.$$

Le premier terme renferme les trois variables $x$, $y$, $z$, et est du degré $-\frac{1}{2}$ : conséquemment je cherche deux termes parmi les six derniers de la fonction proposée, qui soient du même degré que le premier, dont l'un soit multiplié par $dx$, l'autre par $dz$, et qui contiennent les trois variables. Je trouve que les cinquième et dernier termes satisfont à ces conditions ; je forme donc le premier rassemblement

$$\frac{xdy}{2z\sqrt{y}} - \frac{xdz\sqrt{y}}{z^2} + \frac{dx\sqrt{y}}{z},$$

dont je trouve, par le moyen de la méthode enseignée à l'article 318, que l'intégrale est

$$\frac{x\sqrt{y}}{z} - \frac{2x\sqrt{y}}{z} + \frac{2x\sqrt{y}}{z} = \frac{x\sqrt{y}}{z} \ldots (a).$$

Le second terme de la proposée étant du degré 2, et ne contenant que les deux variables $x$ et $z$, il est aisé de voir que son conjugué est le quatrième terme $x^2dz$ : ainsi le second rassemblement est

$$2xzdx + x^2dz,$$

dont l'intégrale est

$$\tfrac{2}{3}x^2z + \tfrac{1}{3}x^2z \quad \text{ou} \quad x^2z \ldots\ldots (b).$$

Enfin les deux termes restans qui sont les troisième et sixième, ayant les trois conditions requises, j'ai le

troisième rassemblement

$$\frac{-dz\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{z^2}} - \frac{dy\sqrt[3]{z}}{2\sqrt{y}},$$

dont l'intégrale est

$$-\tfrac{2}{5}\sqrt[3]{z}\sqrt{y} - \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{z}\sqrt{y} \quad \text{ou} \quad -\sqrt[3]{z}\sqrt{y}\ldots.(c).$$

Rassemblant les intégrales particulières ($a$), ($b$) et ($c$), il vient pour l'intégrale totale de la fonction différentielle proposée, la quantité

$$\frac{x\sqrt{y}}{z} + x^3z - \sqrt[3]{z}\sqrt{y} + \text{const.}$$

322. Mais lorsque la fraction différentielle qu'on veut intégrer a un dénominateur multinome, la séparation indiquée dans l'article précédent pour former des assemblages intégrables par la méthode de l'article 318, ne peut s'exécuter directement, et il faut alors recourir à l'artifice suivant.

*On fera le dénominateur de la fonction différentielle proposée, égal à une seule variable qui ne se trouve pas dans cette fonction; on déduira de l'égalité qu'on a formée, la valeur de l'une des anciennes variables que l'on substituera dans la proposée, ce qui transformera cette dernière en une fonction différentielle dont le nombre des variables sera le même dans le numérateur, mais dont le dénominateur ne sera plus qu'un monome à une seule variable; ainsi on rentrera dans le cas précédent, et lorsqu'on aura intégré la transformée, on y substituera la valeur de la nouvelle variable introduite en fonction des anciennes, ce qui donnera la vraie intégrale de la proposée.*

EXEMPLE I. *Intégrer*

$$\frac{xdy - xdz + zdx - ydx}{(x - y + z)^2} \ldots\ldots (a).$$

Faisons $x - y + z = \xi$, d'où

$$y = x + z - \xi, \quad \text{et} \quad dy = dx + dz - d\xi.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $(a)$, on a la transformée $\frac{\xi dx - xd\xi}{\xi^2}$ qui, étant homogène du degré $-1$, a pour intégrale

$$\frac{\xi x(1-1)}{\xi^2(1-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\xi} \text{ (art. 320)} :$$

remettant dans cette intégrale la valeur de $\xi$, on aura

$$\int(a) = \frac{x}{x - y + z} + \text{const.}$$

EXEMPLE II. *Intégrer*

$$\frac{dx + x^2dy + dy + y^2dx}{(xy - 1)^2} \ldots\ldots (b).$$

Faisant $\xi = xy - 1$, d'où

$$y = \frac{\xi + 1}{x}, \quad \text{et} \quad dy = \frac{xd\xi - \xi dx - dx}{x^2};$$

ensuite substituant ces valeurs dans la proposée $(b)$, on a la transformée

$$\left[\frac{dx}{\xi} - \frac{xd\xi}{\xi^2}\right] - \frac{dx}{x^2} - \left[\frac{d\xi}{x\xi^2} + \frac{dx}{\xi x^2}\right],$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x}{\xi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\xi} \text{ (art. 321)};$$

donc l'intégrale de la proposée est, toutes réductions faites,

$$\frac{x+y}{xy-1} + \text{const.}$$

323. Voici une autre méthode pour intégrer les fonctions différentielles du premier ordre à plusieurs variables et exactes, qui pose sur un principe très-simple, et dont nous étendrons l'usage jusqu'aux différentielles à plusieurs variables qui renferment des quantités transcendantes de variables.

Nous avons démontré à l'article 19, que représentant par U une fonction quelconque des variables $x, y, z \ldots\ldots$, on avait

$$dU = d^x U + d^y U + d^z U + \text{etc. [équat. (27)]};$$

donc indiquant par $\int^x, \int^y, \int^z \ldots\ldots$ les intégrales particulières d'une fonction différentielle de plusieurs variables $x, y, z \ldots\ldots$, en n'y considérant comme variable que celle placée comme exposant du signe d'intégration $\int$, on aura pour le cas où U est un polynome dont chaque terme est affecté de toutes les variables $x, y, z \ldots\ldots$, et toujours pour le cas de U monome, la suite d'égalités

$$U = \int^x d^x U = \int^y d^y U = \int^z d^z U, \text{ etc} \ldots\ldots (a),$$

ou représentant, comme à l'article 20, par $f^x(U)$, $f^y(U)$, $f^z(U) \ldots\ldots$ les coefficiens de $dx, dy, dz \ldots\ldots$ dans les différentielles partielles effectuées, on aura la suite d'égalités $(a)$ qui deviendra

$$U = \int^x f^x(U) dx = \int^y f^y(U) dy = \int^z f^z(U) dz, \text{ etc} \ldots (281);$$

donc, généralement, pour intégrer une fonction différentielle hétérogène du premier ordre entre un nombre

quelconque de variables, *il faut rassembler tous les termes qui renferment chacun les mêmes variables, et qui sont successivement multipliés par la différentielle de l'une de ces variables, en regardant comme termes qui renferment toutes les variables, ceux où l'une d'elles manquerait, mais qui serait multipliée par la différentielle de la variable absente. On formera autant de pareils rassemblemens qu'on le pourra, et chacun d'eux sera, si la proposée est exacte, la différentielle d'un monome ou d'un polynome dont chaque terme est affecté de toutes les variables qui se trouvent dans le rassemblement différentiel correspondant; ensuite on intégrera dans chaque rassemblement les seuls termes affectés d'une même différentielle de variable par rapport à cette seule variable; et la somme de toutes ces intégrales particulières sera l'intégrale totale demandée.*

EXEMPLE I. *Intégrer*

$$y^2dx + \frac{\sqrt[3]{y}dx}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}dy}{3\sqrt[3]{y^2}} + 2xydy \ldots\ldots (a).$$

Tous les termes de cette fonction différentielle renfermant toutes les variables $x$ et $y$, forment un seul rassemblement, et son intégrale, si elle est exacte, ne peut être qu'un polynome dont chaque terme est affecté des deux variables $x$ et $y$. Donc intégrant particulièrement par rapport à l'une des deux variables, par exemple, celle $x$, on a

$$\int(a) = \int^x \left[y^2dx + \frac{\sqrt[3]{y}dx}{2\sqrt{x}}\right] = y^2x + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} \ldots (b).$$

En intégrant particulièrement par rapport à $y$, on a

$$f(a)=\int^{y}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\,\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}+2xydy\right)=\sqrt[3]{y}\sqrt{x}+xy^2\ldots(c).$$

Ces deux résultats étant identiques, nous prouvent que la proposée est exacte, et que nous avons trouvé sa vraie intégrale.

EXEMPLE II. *Intégrer*

$$\frac{bpydz-\frac{1}{2}bdy\sqrt{y}+apzdx+adx\sqrt{y}-bpzdy-\frac{1}{2}axy^{-\frac{1}{2}}dy-apxdz}{(\sqrt{y}+pz)^2}\ldots(d).$$

Faisons $\sqrt{y}+pz=\xi$, d'où

$$z=\frac{\xi-\sqrt{y}}{p}\quad\text{et}\quad dz=\frac{d\xi}{p}-\frac{dy}{2p\sqrt{y}}.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $(d)$, réduisant et faisant les rassemblemens convenables prescrits dans la règle précédente, parce que les trois variables $x$, $y$ et $\xi$ ne se trouvent pas réunies dans chaque terme de la transformée, on aura

$$\left[\frac{byd\xi}{\xi^2}-\frac{bdy}{\xi}\right]+\left[\frac{adx}{\xi}-\frac{axd\xi}{\xi^2}\right]\ldots\ldots(e).$$

Prenant l'intégrale particulière du premier rassemblement par rapport à $y$, et l'intégrale particulière du second par rapport à $x$, on aura

$$\int(e)=-\int^{y}\frac{bdy}{\xi}+\int^{x}\frac{adx}{\xi}=-\frac{by}{\xi}+\frac{ax}{\xi}\ldots\ldots(f).$$

Les intégrales particulières des premier et second rassemblemens par rapport à $\xi$ auraient donné le même résultat $(f)$; donc on a réellement

$$\int(e)=\frac{ax-by}{\xi}+\text{const.};$$

et substituant dans cette dernière équation la valeur de $\xi$, on a pour la vraie intégrale de la proposée $(d)$, la formule

$$\frac{ax - by}{\sqrt{y + pz}} + \text{const.}$$

324. Remarque. Il peut arriver que dans les rassemblemens prescrits suivant la règle de l'article précédent, il y ait des termes dont l'intégrale particulière se trouve fort aisément, et d'autres dont l'intégrale particulière soit fort difficile à trouver ; il est donc alors à propos, lorsqu'on a pris dans chaque rassemblement l'intégrale particulière la plus aisée à obtenir, de vérifier l'exactitude de la proposée, et par conséquent la réalité de l'intégrale totale trouvée, non en cherchant l'identité des intégrales particulières de chaque terme dans chacun des rassemblemens, ce qui serait trop difficile d'après la supposition précédente, mais en différentiant le résultat trouvé, et en examinant si la formule différentielle obtenue par le calcul, est identique avec la proposée. Par exemple, si l'on avait à intégrer la fonction différentielle

$$\frac{2dy - y\,(3x^2 - a)\,dx}{2\sqrt{(x^3 - ax + b)^3}} \ldots (a),$$

il faudrait prendre l'intégrale particulière du terme $\frac{dy}{\sqrt{(x^3 - ax + b)^3}}$, que l'on trouve sans peine être $\frac{y}{\sqrt{(x^3 - ax + b)^3}}$ ; et au lieu de prendre l'intégrale particulière du second terme $\frac{-y\,(3x^2 - a)\,dx}{2\sqrt{(x^3 - ax + b)^3}}$ pour vérifier si le résultat qu'on obtiendrait serait identique avec celui obtenu par l'intégration particu-

lière du premier terme, et par conséquent si ce résultat est l'intégrale demandée, il est plus simple de différentier la première intégrale $\frac{y}{\sqrt{(x^3 - ax + b)^3}}$; et de voir si sa différentielle est identique avec celle proposée $(a)$. C'est ce qu'on trouve être vrai dans l'exemple actuel; donc, etc.

325. En différentiant un monome variable, tel que $ayz \ldots\ldots (lx)^n$, il est clair que si dans le terme où on différentie partiellement par rapport à $lx$, on met la valeur $\frac{dx}{x}$ de $dlx$, ce terme sera d'un degré moindre d'une unité que les autres, lesquels sont homogènes entre eux, en considérant la variable logarithmique $lx$ comme les variables algébriques $y$, $z \ldots$; donc d'après cette remarque et la méthode enseignée à l'article 323, il sera très-aisé d'intégrer les différentielles exactes où il entre des logarithmes de variables telles que $lx$; car mettant dans le terme où $lx$ est d'un degré moindre d'une unité, la quantité $xdlx$ à la place de sa valeur $dx$, on rétablira l'homogénéité nécessaire aux termes de chacun des rassemblemens qu'on doit former pour l'exécution de la règle prescrite à l'article 323.

Rendons ceci plus sensible par l'exemple suivant.

*Intégrer la fonction différentielle et transcendante*

$$\frac{3y^2(lx)^2dx}{x(ly)^2} + \frac{2(lx)^3ydy}{(ly)^2} - \frac{zdy}{l\xi} - \frac{ydz}{l\xi}$$
$$- \frac{2y(lx)^5dy}{(ly)^3} + \frac{zyd\xi}{\xi(l\xi)^2} \ldots\ldots (a).$$

Je vois que des trois termes qui sont chacun fonctions des seules variables $x$, $y$, ou de leurs logarithmes,

savoir, les premier, second et cinquième termes; le premier a la variable $lx$ élevée à une puissance moindre d'une unité que les deux autres, et le dernier a l'exposant $-3$ de $ly$ moindre d'une unité que celui $-2$ de la même variable dans les deux premiers termes. Je substitue donc $xdlx$ à $dx$ dans le premier terme, et $ydly$ à $dy$ dans le troisième des trois termes en question. De même l'exposant $-2$ de $l\xi$ dans le dernier terme du polynome différentiel $(a)$, étant moindre d'une unitè que celui $-1$ de la même quantité dans les troisième et quatrième termes qui, comme le dernier, sont fonctions des seules variables $z$, $y$ et $\xi$; je substitue à la place de $d\xi$ sa valeur $\xi dl\xi$; ces substitutions étant faites, et opérant les rassemblemens prescrits par la règle de l'article 323, j'ai

$$\left[\frac{3y^2(lx)^2dlx}{(ly)^2}+\frac{2(lx)^3ydy}{(ly)^2}-\frac{2y^2(lx)^3dly}{(ly)^3}\right]$$
$$-\left[\frac{zdy}{l\xi}+\frac{ydz}{l\xi}-\frac{zydl\xi}{(l\xi)^2}\right],$$

dont l'intégrale est

$$\int\frac{y2(lx)^3ydy}{(ly)^2}-\int\frac{yzdy}{l\xi}=\frac{y^2(lx)^3}{(ly)^2}-\frac{zy}{l\xi}+\text{const.}$$

Il est aisé de vérifier, d'après une des méthodes enseignées précédemment, que cette dernière quantité est la vraie intégrale de la formule différentielle proposée $(a)$.

326. Il peut arriver que dans un polynome différentiel dont une partie des termes est affectée du logarithme d'une variable, et dont l'autre partie est algébrique, il y ait dans ces derniers termes quelqu'un d'eux qui doive s'assembler avec de ceux transcendans, puisque

puisque $lx$ étant élevé à la seule première puissance, sa différentielle $\frac{dx}{x}$ ne laisse plus aucune trace de transcendance ; mais il est aisé, lorsqu'on a un peu l'usage du calcul, de trouver parmi les termes différentiels algébriques, ceux qui, si la proposée est exacte, doivent se grouper avec des transcendans. Par exemple, soit proposé d'intégrer

$$xdylx + ydxlx + xdz + ydx + zdx \ldots\ldots (a).$$

Il est aisé de voir que les troisième et dernier termes de ce polynome différentiel ne peuvent être assemblés avec les deux premiers, puisqu'ils sont affectés de la variable $z$ qui n'est pas dans les deux premiers termes ; donc le terme cherché renfermant la différentielle de $lx$, ne peut être que l'avant-dernier terme $ydx$ de $(a)$ : en effet, y substituant $xdlx$ à $dx$, et groupant à l'ordinaire les termes de la proposée $(a)$, elle devient

$$[xdylx + ydxlx + yxdlx] + [xdz + zdx],$$

et son intégrale est

$$= \int^y xlxdy + \int^z xdz = xylx + xz + \text{const.}$$

327. Nous n'avons précédemment considéré parmi les différentielles exactes qui renferment des transcendantes logarithmiques, que celles où se trouvent les puissances quelconques des logarithmiques d'une seule variable : examinons maintenant tous les autres cas, lesquels peuvent être réduits aux suivans :

$$d[y^m(lx^p)^n] = \frac{npy^m(lx^p)^{n-1}dx}{x} + m(lx^p)^n y^{m-1}dy \ldots (a);$$

$$d\left[\frac{y^m}{(lx^p)^n}\right] = \frac{my^{m-1}dy}{(lx^p)^n} - \frac{npy^m dx}{x(lx^p)^{n+1}} \ldots\ldots\ldots (b);$$

$$d[y^m[l(x^pz^q)]^n] = \frac{npy^m[l(x^pz^q)]^{n-1}dx}{x}$$
$$+ \frac{nqy^m[l(x^pz^q)]^{n-1}dz}{z} + m[l(x^pz^q)]^n y^{m-1}dy \ldots (c);$$

$$d\left[\frac{y^m}{[l(x^pz^q)]^n}\right] = \frac{my^{m-1}dy}{[l(x^pz^q)]^n} - \frac{npy^m dx}{x[l(x^pz^q)]^{n+1}}$$
$$- \frac{nqy^m dz}{z[l(x^pz^q)]^{n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (d);$$

$$d[y^m[l(ax^p \pm z^q)]^n] = \frac{anpy^m[l(ax^p \pm z^q)]^{n-1}x^{p-1}dx}{ax^p \pm z^q}$$
$$\pm \frac{nqy^m[l(ax^p \pm z^q)]^{n-1}z^{q-1}dz}{ax^p \pm z^q}$$
$$+ m[l(ax^p \pm z^q)]^n y^{m-1}dy \ldots\ldots\ldots (e);$$

$$d\left[\frac{y^m}{[l(ax^p \pm z^q)]^n}\right] = \frac{my^{m-1}dy}{[l(ax^p \pm z^q)]^n}$$
$$- \frac{anpy^m x^{p-1}dx}{(ax^p \pm z^q)[l(ax^p \pm z^q)]^{n+1}}$$
$$\mp \frac{nqy^m z^{q-1}dz}{(ax^p \pm z^q)[l(ax^p \pm z^q)]^{n+1}} \ldots\ldots\ldots (f);$$

$$d[y^m[l(ax^p \pm b)]^n = my^{m-1}dy[l(ax^p \pm b)]^n$$
$$+ \frac{anpy^m[l(ax^p \pm b)]^{n-1}x^{p-1}dx}{ax^p \pm b} \ldots\ldots\ldots\ldots (g),$$

$$d\left[\frac{y^m}{[l(ax^p \pm b)]^n}\right] = \frac{my^{m-1}dy}{[l(ax^p \pm b)]^m}$$
$$- \frac{anpy^m x^{p-1}dx}{(ax^p \pm b)[l(ax^p \pm b)]^{n+1}} \ldots\ldots\ldots (h);$$

Il est aisé de voir, 1°. qu'on rendra homogène chacune des deux équations $(a)$ et $(b)$, en substituant à $dx$ sa valeur $\frac{xd\,(lx^p)}{p}$. 2°. Que quand on aura, comme dans les équations $(c)$ et $(d)$, des termes affectés de logarithmes de produits de plusieurs variables $x, y \ldots\ldots$ élevées à des puissances quelconques $p, q \ldots\ldots$, on aura autant de termes dans lesquels la puissance du logarithme sera moindre d'une unité que la plus haute puissance, qu'il y aura de variables dans le produit affecté de la lettre caractéristique $l$, et qu'ainsi on rendra ces termes homogènes, en substituant respectivement à $dx$, $dz \ldots$ dans les termes affectés de ces différentielles, leurs valeurs $\frac{xdl\,(x^p, z^q \ldots)}{p \ldots}$, $\frac{zdl\,(x^p, z^q \ldots)}{q \ldots}$, etc. 3°. Que s'il se trouve dans une fonction différentielle exacte qu'on veut intégrer, des logarithmes de polynomes dont tous les termes sont variables comme dans les équations $(e)$ et $(f)$, ou partie variables, partie constans comme dans les équations $(g)$ et $(h)$, il faut grouper les semblables ; et lorsqu'on voudra ou qu'on sera obligé d'intégrer partiellement par rapport au logarithme du polynome variable, il faudra faire ce polynome affecté de la lettre caractéristique $l$, égal à une variable quelconque étrangère à la fonction donnée, ce qui réduira à un seul terme variable, tous les termes variables du polynome ; et alors il sera fort aisé de prendre l'intégrale partielle du logarithme du polynome transformé par rapport à ce logarithme d'une seule variable.

Rendons ceci plus sensible par un exemple, en nous proposant d'intégrer la fonction différentielle

$$\frac{dx\,(1)}{2y\sqrt{x}} + \frac{6sux\,dx\,[l(x^2+u)]^2\,(2)}{x^2+u} - \frac{\sqrt{x}\,dy\,(3)}{y^2}$$

$$+ s\,[l(x^2+u)]^3\,du\,(4) + \frac{ay\,dx\,(5)}{z} + \frac{my^{m-1}dy\,(6)}{[l(x^pz^q)]^n}$$

$$- \frac{y^m dz\,(7)}{z\,(lx^p)^{n+1}} - \frac{my^{m-1}lz\,dy\,(8)}{(lx^p)^{n+1}} - \frac{npy^m dx\,(9)}{x\,[l\,(x^pz^q)]^{n+1}}$$

$$+ \frac{p\,(n+1)\,y^m lz\,dx\,(10)}{x\,(lx^p)^{n+2}} + \frac{3su\,[l(x^2+u)]^2 du\,(11)}{x^2+u}$$

$$+ \frac{axdy\,(12)}{z} - \frac{axydz\,(13)}{z^2} + u\,[l(x^2+u)]^3 ds\,(14)$$

$$- \frac{nqy^m dz\,(15)}{z\,[l\,(x^pz^q)]^{n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i),$$

dans laquelle les indices (1), (2).... marquent le rang des termes où elles se trouvent.

Pour faire les rassemblemens prescrits par la règle de l'article 323, nous commencerons par ceux des termes algébriques et qui n'offrent aucune difficulté, savoir, le terme (1) avec celui (3), ensuite les termes (5), (12) et (13). Passant aux termes transcendans, nous observerons que le terme (2) doit avoir ses conjugués dans ceux (4), (11) et (14); cependant il paraît y avoir dans ce rassemblement un terme de trop, puisqu'il n'y a, à proprement dire, que trois sortes de variables à y considérer, savoir, $u$, $s$ et $l\,(x^2+u)$; mais il est aisé de voir, après un peu de réflexion, que les second et onzième termes se réduisent à un seul. En effet,

$$(2) + (11) = \frac{3us\,[l\,(x^2+u)]^2}{x^2+u}\,(2xdx + du)$$

$$= \frac{3us[l(x^2+u)]^2 d(x^2+u)}{x^2+u} = 3us[l(x^2+u)]^2 dl\,(x^2+u);$$

ainsi l'assemblage des quatre termes (2), (4), (11) et (14) ne donne qu'un trinome homogène du troisième degré qui satisfait aux conditions exigées par la règle de l'article 323.

Le terme (6) a évidemment ses conjugués dans les termes (9) et (15), et le trinome (6) — (9) — (15) peut se ramener à un simple binome entre deux variables $y$ et $l(x^p z^q)$. En effet,

$$(9)+(15)=\frac{ny^m}{[l(x^p z^q)]^{n+1}}\left(\frac{pdx}{x}+\frac{qdz}{z}\right);$$

Mais ce dernier facteur binome peut s'écrire sous la forme

$$\frac{px^{p-1}dx}{x^p}+\frac{qz^{q-1}dz}{z^q}=\frac{z^q d.x^p+x^p d.z^q}{x^q z^q}$$

$$=\frac{d(x^p z^q)}{x^p z^q}=dl(x^p z^q);$$

donc

$$(9)+(15)=\frac{ny^m dl(x^p z^q)}{[l(x^p z^q)]^{n+1}};$$

ainsi l'assemblage de ce terme et de celui (6) donne un binome homogène du degré $m-n-1$ entre les deux variables $y$ et $l(x^p z^q)$.

Enfin, les conjugués du terme (7) sont ceux (8) et (10), et il est aisé de voir que l'on rendra le trinome (10) — (7) — (8) homogène du degré $m-n-1$ entre les trois variables $y$, $lz$ et $lx^p$, en mettant dans le terme (10) la quantité $d.lx^p$ à la place de son égale $\frac{pdx}{x}$, et substituant dans le terme (7) la différentielle $d\,lz$ à la place de son égale $\frac{dz}{z}$. On pourra donc

rassembler la fonction différentielle proposée ($i$) ainsi qu'il suit :

$$[(1)-(3)]+[(5)+(12)-(13)]+[(2)+(4)+(11)+(14)]$$
$$+[(6)-(9)-(15)]+[(10)-(7)-(8)]\ldots\ldots(k);$$

et intégrant partiellement dans chacun de ces rassemblemens, un seul terme à volonté, et par conséquent le plus aisé à intégrer, on aura, si la fonction différentielle proposée ($i$) est exacte,

$$\int(i)=-\int^{y}\frac{\sqrt{x}dy}{y^2}+\int^{x}\frac{aydx}{z}+\int^{u}[l(x^2+u)]^3sdu$$
$$+\int^{y}\frac{my^{m-1}dy}{[l(x^pz^q)]^n}-\int^{y}\frac{my^{m-1}lzdy}{(lx^p)^{n+1}}=\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{ayx}{z}$$
$$+[l(x^2+u)]^3su+\frac{y^m}{[l(x^pz^q)]^n}-\frac{y^mlz}{(lx^p)^{n+1}}+\text{const.}$$

Si nous avions voulu prendre l'intégrale partielle du troisième assemblage [form. ($k$)], par rapport à $l(x^2+u)$, nous aurions fait

$$x^2+u=t,\quad \text{d'où}\quad xdx=\frac{dt-du}{2},$$

et mettant ces valeurs dans les second et onzième termes de la proposée, ils se seraient réduits au seul terme $\frac{3us(lt)^2dt}{t}$ ou $3us\,(lt)^2d.lt$, dont l'intégrale partielle $\int^{lt}$ est

$$us\,(lt)^3=us\,[l(x^2+u)]^3,$$

comme nous l'avons déjà trouvée par l'intégration partielle par rapport à $u$ du quatrième terme de la proposée ($i$).

328. Remarque I. Il nous serait aisé de démontrer

de même que nous l'avons fait précédemment relativement aux différentielles exactes affectées de logarithmes variables, qu'on pourrait aussi se servir de notre méthode d'intégration partielle, pour intégrer les fonctions différentielles exactes renfermant des arcs de cercle variables, c'est-à-dire ayant pour lignes trigonométriques des fonctions variables de $x$, $y$, $z$.... Mais à cause qu'un peu de réflexion de la part de nos lecteurs, suppléera aisément aux démonstrations que nous donnerions, et qui exigeraient un trop grand échafaudage de formules et de calculs, et que d'ailleurs des quantités transcendantes par les arcs de cercle, on peut revenir à celles transcendantes par les logarithmes [équat. (186)...(191)], nous passerons outre.

329. Remarque II. Si dans l'intégrale

$$U\,[=F(x, y, z....)]$$

de la différentielle exacte $dU$ qu'on veut intégrer, il y a quelqu'une des quantités transcendantes élevée à la première puissance, et non multipliée par une fonction algébrique ou même transcendante; alors la différentiation ne laissant plus aucune trace de ces quantités transcendantes, la différentielle $dU$ ne se présente plus que sous une forme purement algébrique, et par conséquent, il sera extrêmement long et difficile, même pour le calculateur le plus exercé, de réduire la proposée $dU$ sous une forme qui mette en évidence les différentielles des quantités transcendantes. Par exemple, ce ne pourra être que par tâtonnement et après un grand nombre de tentatives, qu'on parviendra à mettre la fonction différentielle

$$\frac{y^2\sqrt{x}dy+4x\sqrt{x}dx+4xy\sqrt{x}dy-12x^2dy-2y^2xdy-2xdx-2y^2\sqrt{x}dx}{2y^2x\sqrt{x}+8x^2\sqrt{x}+2y^3x+8yx^2}$$

sous la forme

$$\frac{\frac{dx}{2\sqrt{x}} - dy}{\sqrt{x} - y} - \frac{\frac{dx}{y\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}dx}{y^2}}{1 + \frac{4x}{y^2}};$$

qui est favorable à l'intégration, et d'où l'on conclut sans peine que l'intégrale de la proposée est

$$l(\sqrt{x} - y) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2\sqrt{x}}{y}\right) + \text{const.}$$

---

# CHAPITRE II.

*Des équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, et examen des formes qu'elles doivent avoir après la différentiation immédiate des équations primitives, dans lesquelles on a isolé la constante qui doit être éliminée.*

330. Une équation différentielle qu'on veut intégrer, et dans laquelle tous les termes sont réunis dans un seul membre, se présente presque toujours sous la forme d'un polynome différentiel égalé à zéro, dont les termes sont privés de dénominateurs, et n'ont pas de facteurs communs ; car s'il y avait eu des dénominateurs dans quelques termes, ils auraient disparu par la multiplication de l'équation par le produit de ces dénominateurs, et s'il y avait eu un facteur commun,

il aurait disparu par la division de l'équation par ce facteur commun.

Or, l'équation primitive de l'équation différentielle proposée, peut avoir, 1°. la constante qui a disparu dans la différentiation, combinée avec les termes variables par simple voie d'addition ou de soustraction, et alors elle a pu être isolée dans un seul membre de l'équation primitive sans donner de dénominateur au polynome variable. 2°. Cette même constante peut être combinée dans l'équation primitive par voie de multiplication avec des termes variables, et alors elle n'a pu être isolée dans un seul membre qu'en donnant un dénominateur variable à l'autre membre.

331. Considérant d'abord les équations primitives où la constante éliminée ne se combine que par voie d'addition ou de soustraction avec les termes variables; j'observe, 1°. que si dans une pareille équation tous les termes variables sont algébriques, et si les exposans des variables sont des nombres positifs entiers ou fractionnaires, mais $> 1$; enfin, s'il n'y a pas de facteur variable commun à tous les termes du polynome variable, ou du moins si ce facteur n'est élevé qu'à la première puissance dans l'un des termes; alors la différentielle de cette équation sera la différentielle exacte du polynome variable de l'équation primitive, ce qu'on pourra reconnaître *à priori* par les méthodes enseignées à l'article 54; ainsi l'intégration de l'équation différentielle proposée s'obtiendra dans ce cas-là, comme celle des fonctions différentielles exactes que nous avons appris à intégrer dans le chapitre précédent.

332. 2°. Si tout restant dans l'équation primitive comme dans le cas que nous venons d'examiner, avec

cette seule différence que nous supposerons ici que quelqu'un des exposans des variables est positif, fractionnaire et $< 1$, alors la différentiation par rapport à ces variables, rejetant dans des dénominateurs ces mêmes variables avec des exposans fractionnaires, et ces dénominateurs ayant disparu dans l'équation différentielle proposée, celle-ci ne sera plus la différentielle exacte du polynome variable de l'équation primitive. Mais il est assez aisé dans ce cas-là, de ramener la proposée à la forme convenable qui rend son polynome différentiel, la différentielle exacte du polynome variable de l'équation primitive.

333. 3°. Si tous les termes du polynome variable de l'équation primitive sont multipliés par un facteur variable dont l'exposant est $> 1$, alors il est évident qu'après la différentiation, il restera encore un facteur variable commun à tous les termes de la différentielle qui a disparu dans l'équation proposée; ainsi il faudra rétablir ce facteur pour pouvoir effectuer l'intégration.

334. 4°. Si enfin il y a dans l'équation primitive des termes variables transcendans, et si ces quantités transcendantes sont isolées, c'est-à-dire, non affectées de facteurs variables algébriques ou transcendans; alors la différentiation d'une pareille équation ne donne que des termes différentiels algébriques. Mais ceux de ces termes provenant de la différentiation des quantités transcendantes, sont affectés de dénominateurs variables qui ont disparu dans l'équation différentielle proposée; ainsi cette dernière, sous la forme où elle se présente, n'est pas la différentielle exacte de la proposée.

335. Considérons enfin l'équation primitive lorsque la constante qui doit être éliminée dans l'équation différentielle proposée, est engagée avec des termes

variables par voie de multiplication ; et pour fixer les idées, représentons une telle équation par celle

$$F(x, y \ldots) + cf(x, y \ldots) = 0 \ldots (a),$$

dans laquelle la lettre $c$ représente la constante qui ne se trouve plus dans la différentielle proposée. Différentiant l'équation $(a)$, on a

$$dF(x, y) + cdf(x, y) = 0 \ldots (b);$$

éliminant $c$ entre les équations $(a)$ et $(b)$, il vient

$$F(x, y)\, df(x, y) - f(x, y)\, dF(x, y) = 0 \ldots (c),$$

dont le premier membre n'est pas la différentielle de l'équation primitive après l'isolement de la constante c, mais seulement le numérateur de la différentielle exacte. En effet, isolant $c$ dans l'équation $(a)$, il vient celle

$$c = -\frac{F(x, y)}{f(x, y)} \ldots\ldots (d),$$

qui étant différentiée donne

$$\frac{F(x,y)\, df(x,y) - f(x,y)\, dF(x,y)}{[f(x,y)]^2} = 0.$$

On voit donc qu'il manque au premier membre de l'équation $(c)$, pour être la différentielle exacte de l'équation $(a)$ mise sous la forme $(d)$ afin d'éliminer la constante $c$, le dénominateur $[f(x,y)]^2$ (*).

336. Il résulte de cet examen des différentes formes que doivent avoir les équations différentielles, d'après celles des équations primitives, qu'excepté le premier

(*) Toute cette théorie est conforme à ce que nous avons dit à l'article 29.

cas traité à l'article 331, il faut dans tous les autres cas, user de certains artifices pour ramener l'équation différentielle proposée à une forme convenable à l'intégration qui doit reproduire l'équation primitive. Nous allons finir ce chapitre par donner un exemple pour chacun des deux premiers cas (art. 331 et 332), et nous traiterons les autres cas dans le chapitre suivant, en n'y considérant d'abord que les équations différentielles entre deux variables.

EXEMPLE I. *Intégrer l'équation*

$$(3y\sqrt{x}+2y^3)\,dx+(2\sqrt{x^3}+6xy^2)\,dy=0\ldots(a).$$

Nous servant de l'équation de condition (52)[art. 54] pour déterminer si le premier membre de la proposée est une différentielle exacte, nous avons

$$\frac{d^y(3y\sqrt{x}+2y^3)}{dy}=3\sqrt{x}+6y^2=\frac{d^x(2\sqrt{x^3}+6xy^2)}{dx}.$$

L'exactitude de la proposée étant prouvée, nous aurons, en nous conformant à la règle prescrite à l'article 323, l'équation

$$\int(a)=\int^x 2y^3dx+\int^y 2\sqrt{x^3}dy=y^3x+y\sqrt{x^3}=\text{const},$$

dans laquelle la constante arbitraire comprend le diviseur constant 2 après la division de toute l'équation par le facteur commun 2 du premier membre.

EXEMPLE II. *Intégrer l'équation*

$$10ax^2\sqrt[5]{z^4}\sqrt{u}dy+20axy\sqrt{u}\sqrt[5]{z^4}dx-5bzdu$$
$$-2budz=0\ldots\ldots(b).$$

Il est aisé d'observer que les deux premiers termes de la proposée renferment les quatre variables, et rien que les différentielles de deux de ces variables, tandis

que les deux derniers termes renferment les différentielles des deux autres variables, et seulement deux des quatre variables : il n'y a donc d'autre moyen de ramener la proposée à la forme convenable aux intégrations des fonctions différentielles exactes, que de délivrer les deux premiers termes des deux variables qui s'y trouvent sans leurs différentielles; c'est ce qu'on obtient aisément, en divisant toute l'équation par $\sqrt[5]{z^4}\sqrt{u}$, et l'on a

$$(10ax^2dy+20axydx)-\left(\frac{5b\sqrt[5]{zdu}}{\sqrt{u}}-\frac{2b\sqrt{udz}}{\sqrt[5]{z^4}}\right)=0.$$

Donc si la proposée est exactement intégrable, son intégrale est

$$\int^y 10ax^2dy-\int^u\frac{5b\sqrt[5]{zdu}}{\sqrt{u}}=ax^2y-b\sqrt[5]{z}\sqrt{u}=\text{const.};$$

comprenant dans la constante arbitraire le facteur 0,1 provenant de la division de l'intégrale par le facteur commun 10 du premier membre.

---

# CHAPITRE III.

## *De l'intégration des équations différentielles du premier ordre à deux variables.*

337. Lorsque le membre de l'équation différentielle proposée où se trouvent réunis tous les termes, n'est pas une fonction différentielle exacte, ou ne peut s'y ramener aisément par la division, alors il faut recourir

à d'autres moyens pour intégrer ces équations, et l'un des premiers moyens qu'on emploie, est celui de la *séparation des variables*, c'est-à-dire, que l'équation différentielle proposée étant

$$dF(x, y) = 0,$$

on cherche à la ramener à la forme

$$f(x)\,dx + f'(y)\,dy = 0;$$

et alors on n'a plus qu'à intégrer des fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable.

338. La séparation des variables peut toujours s'effectuer sur les équations différentielles à deux termes; car de telles équations ne peuvent se présenter que sous des formes dont la plus compliquée est celle

$$XYdx + X'Y'dy = 0 \ldots\ldots (282),$$

en représentant par X et X′ des fonctions de la seule variable $x$, et de même pour Y et Y′ relativement à la variable $y$. Or, divisant les deux termes de l'équation (282) par X′Y, on a l'équation séparée

$$\frac{X}{X'}\,dx + \frac{Y'}{Y}\,dy = 0 \ldots\ldots (283),$$

dont l'intégration rentre dans les cas que nous avons déjà traités dans la première section.

339. Toute équation différentielle homogène à deux variables se peut transformer en une autre, dans laquelle la séparation des variables s'opère fort aisément. En effet, soit représentée par

$$F(x, y)\,dx + f(x, y)\,dy = 0 \ldots (284),$$

une équation homogène du degré $n$; faisant

$$y = xz \ldots\ldots (285),$$

d'où

$$dy = xdz + zdx,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (284), ce qui nous donnera la transformée

$$x^n F'(z)\,dx + x^n f'(z)(zdx + xdz) = 0,$$

ou

$$[F'(z) + zf'(z)]\,dx = -xf'(z)\,dz,$$

d'où l'on tire l'équation séparée

$$\frac{dx}{x} = -\frac{f'(z)\,dz}{F'(z) + zf'(z)};$$

et intégrant, il vient

$$lx = -\int \frac{f'(z)\,dz}{F'(z) + zf'(z)} + \text{const.} \ldots (286).$$

Il est clair que si l'on fait

$$x = yz \ldots\ldots (287),$$

on trouvera par le même calcul que le précédent, une équation de la forme

$$ly = -\int \frac{F'(z)\,dz}{f'(z) + zF'(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots (288).$$

Nous avons successivement considéré les deux équations (285) et (287) servant aux transformations respectives de la proposée en d'autres équations où les variables sont séparées, afin que si l'une de ces deux équations conduit à une transformée dont le second membre est trop difficile à intégrer, on recoure à l'autre qui, bien souvent, donnera une transformée qui s'intégrera beaucoup plus aisément.

Application I. *Intégrer l'équation différentielle homogène*

$$axdx + bydx + exdy + gydy = 0 \ldots\ldots (289).$$

Si l'on avait $b = e$, il est clair que le premier membre de cette équation serait une fonction différentielle exacte, et l'on trouverait sans peine que l'intégrale de la proposée serait

$$ax^2 + 2bxy + gy^2 = \text{const.}$$

Mais si les deux coefficiens $b$ et $e$ ne représentent pas des quantités égales, le polynome différentiel de l'équation (289) ne pourra jamais être rendu exact, et cependant nous trouverons par la méthode enseignée précédemment, l'intégrale de la proposée (289).

Comparant identiquement les équations (284) et (289), on a

$$F(x, y) = ax + by \quad \text{et} \quad f(x, y) = ex + gy.$$

Ensuite prenant pour opérer la transformation, l'équation (285), ce qui, évidemment, donnera un résultat aussi simple que si l'on prenait l'équation (287), puisque la proposée est symétrique par rapport aux deux variables, on aura

$$F'(z) = a + bz \quad \text{et} \quad f'(z) = e + gz.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (286), il viendra

$$lx = -\int \frac{\left(\frac{e}{g} + z\right) dz}{z^2 + \frac{b+e}{g} z + \frac{a}{g}} + \text{const.} \ldots\ldots (\alpha).$$

Or, il peut arriver trois cas, savoir :

1°. $4ag > (b+e)^2$; 2°. $4ag = (b+e)^2$; 3°. $4ag < (b+e)^2$.

Dans le premier cas, nous servant de l'équation intégrale (180) [art. 241], en y substituant la lettre $z$

à

à celle $x$ ; ensuite mettant à la place de $z$ sa valeur $\frac{y}{x}$ [équat. (285)], réduisant et comprenant dans une seule constante indéterminée, toutes celles qui se combinent avec elle par voie d'addition et de multiplication, nous aurons pour intégrale de la proposée, dans le cas de $4ag > (b+e)^2$,

$$\int(289) = l\,(gy^2 + (b+e)\,yx + ax^2)$$
$$+ \frac{2\,(e-b)}{\sqrt{4ag-(b+e)^2}} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2gy+(b+e)\,x}{x\sqrt{4ag-(b+e)}}\right)$$
$$= \text{const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (290).$$

Pour le second cas, on a

$$lx = -\int \frac{\left(\frac{e}{g}+z\right)dz}{\left(\sqrt{\frac{a}{g}}+z\right)^2} = -\frac{e}{g}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{a}{g}}+z\right)^2}$$
$$-\int \frac{zdz}{\left(\sqrt{\frac{a}{g}}+z\right)^2}.$$

Or, ces deux derniers binomes différentiels sont respectivement dans les second et troisième cas d'intégration immédiate (art. 212 et 213) ; ainsi effectuant ces intégrations, substituant à la place de $z$ sa valeur $\frac{y}{x}$ ; faisant attention qu'à cause de $4ag = (b+e)^2$, on a $\sqrt{ag} - e = \frac{b-e}{2}$, réduisant et comprenant dans une seule constante indéterminée toute la fonction des seules constantes, on aura pour le cas de $4ag = (b+e)^2$,

$$\int(289) = \frac{(b-e)\,x}{x\sqrt{a}+y\sqrt{g}} + 2\sqrt{g}\,l\,(x\sqrt{a}+y\sqrt{g})$$
$$= \text{const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (291)$$

Dans le troisième cas, le trinome $z^2 + \frac{b+e}{g} z + \frac{a}{g}$ pouvant se décomposer en deux facteurs réels $(z+m)(z+n)$, alors l'intégration de l'équation $(a)$ se réduit à celle des deux fractions différentielles

$$\frac{dz}{(z+m)(z+n)} \quad \text{et} \quad \frac{zdz}{(z+m)(z+n)},$$

ce qui, d'après ce que nous avons enseigné au chapitre II de la première section, n'offre plus de difficultés réelles, mais quelques longueurs de calculs qui mènent pour le cas de $(b+e)^2 > 4ag$, à l'équation

$$\int(289) = \frac{b-e}{\sqrt{(b+e)^2 - 4ag}} \times$$

$$l\left\{\frac{2gy + x[b+e+\sqrt{(b+e)^2-4ag}]}{2gy + x[b+e-\sqrt{(b+e)^2-4ag}]}\right\} = \text{const.}\ldots(292).$$

II. *Intégrer l'équation*

$$\text{aydx} - [\text{ax} - \sqrt{\text{xx}+\text{yy}}]\text{dy} = 0 \ldots\ldots (b).$$

Comparant identiquement cette équation avec celle (284), on a

$$F(x,y) = ay \quad \text{et} \quad f(x,y) = -[ax - \sqrt{xx+yy}].$$

Ensuite prenant pour opérer la transformation, l'équation (285), c'est-à-dire, substituant dans les deux équations précédentes $zx$ à la place de $y$, et supprimant $x$, il vient

$$F'(z) = az \quad \text{et} \quad f'(z) = -(a - \sqrt{1+zz});$$

enfin substituant ces deux valeurs dans l'équation (286), on a

$$lx = \int \frac{(a - \sqrt{1+zz})\,dz}{z\sqrt{(1+zz)}} = \int \frac{adz}{z\sqrt{1+zz}} - lz + \text{const.}$$

Quoique l'intégration de la fraction différentielle irrationnelle $\frac{dz}{z\sqrt{1+zz}}$, n'offre pas de grandes difficultés d'après ce qui a été enseigné au chapitre III de la première section ; cependant les calculs à faire sont assez longs, ce qui nous engage à chercher si la transformation par le moyen de l'équation (287) n'abrégera pas les calculs.

Substituant donc dans les équations

$$F(x, y) = ay \quad \text{et} \quad f(x, y) = -[ax - \sqrt{x^2 + y^2}],$$

la quantité $zy$ à la place de $x$, et supprimant $y$, on a

$$F'(z) = a \quad \text{et} \quad f'(z) = -[az - \sqrt{z^2 - 1}];$$

ainsi l'équation (288) donnera dans cet exemple

$$ly = -a \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} + \text{const.};$$

d'où l'on déduit tout de suite, par le moyen de la formule (138) [art. 207],

$$ly = -l[z + \sqrt{z^2 + 1}]^a + \text{const.}$$

Substituant à la place de $z$ sa valeur $\frac{x}{y}$ [équat. (287), passant tous les termes variables dans le premier membre, mettant $l$ const. à la place de const. ; enfin passant des logarithmes aux quantités naturelles, on a l'équation

$$\frac{y^{a-1}}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^a} = \text{const.},$$

qui est l'intégrale de la proposée ($b$).

340. J'ai donné assez d'étendue à la première application de l'article 339, parce que c'est à l'intégration de l'équation (289) que se ramène celle de l'équation

$$(h+ax'+by')\,dx'+(i+ex'+gy')\,dy'=0\ldots(293),$$

quoique cette dernière ne soit pas homogène. En effet, faisant

$$x'=x+\omega \quad \text{et} \quad y'=y+\delta\ldots\ldots(a),$$

les lettres $\omega$ et $\delta$ représentant des quantités indéterminées, on aura la transformée

$$(h+a\omega+b\delta+ax+by)\,dx$$
$$+(i+e\omega+g\delta+ex+gy)\,dy=0,$$

et faisant, à cause des indéterminées $\omega$ et $\delta$,

$$h+a\omega+b\delta=0 \quad \text{et} \quad i+e\omega+g\delta=0,$$

d'où

$$\omega=\frac{gh-bi}{be-ag} \quad \text{et} \quad \delta=\frac{ai-eh}{be-ag}\ldots(b),$$

l'on n'aura plus qu'à intégrer l'équation (289); ainsi mettant dans les intégrales (290), (291) et (292), respectivement correspondantes aux trois cas,

$$4ag \gtreqless (b+e)^2,$$

les quantités

$$x'+\frac{gh-bi}{ag-be} \quad \text{et} \quad y'+\frac{ai-eh}{ag-be}$$

à la place de celles respectives $x$ et $y$, on aura exactement l'intégrale de l'équation (293) dans les trois cas en question.

Cependant cette méthode est en défaut lorsque $ag = be$, puisqu'alors les valeurs de $\alpha$ et de $\delta$ sont infinies ; il faut donc dans ce cas-là, recourir à un autre artifice pour intégrer l'équation (293) qui, à cause de $g = \frac{be}{a}$, devient

$$(h+ax'+by')\,dx' + \left(i+ex'+\frac{be}{a}y'\right)dy' = 0 \ldots (294).$$

Soit fait $ax' + by' = z$, d'où

$$y' = \frac{z-ax'}{b} \quad \text{et} \quad dy' = \frac{dz - adx'}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (294), on a

$$(h+z)\,dx' + \left(i+\frac{e}{a}z\right)\frac{dz-adx'}{b} = 0\,;$$

d'où l'on tire

$$dx' = \frac{(ai+ez)\,dz}{a\,[(e-b)\,z + ia - bh]}.$$

Le second membre de cette équation n'étant qu'une fonction différentielle à une seule variable des plus faciles à intégrer, on trouvera bientôt

$$\int(294) = ax' + ey' + \frac{eh-ai}{e-b}\,l\left[ax'+by'+\frac{ai-bh}{e-b}\right]$$
$$= \text{const.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (295).$$

Si l'on avait $e = b$, cette méthode serait encore en défaut, mais dans ce cas-là, l'équation (294) devient

$$hdy' + ax'dx' + b(y'dx' + x'dy') + idy' + \frac{b^2}{a}y'dy' = 0,$$

et il est facile de voir que l'intégrale de cette dernière équation est

$$2ahy' + a^2x'^2 + 2abx'y' + 2aiy' + b^2y'^2 = \text{const.}$$

341. L'intégration de toute équation de la forme

$$AF(y)\,d.F(x)+BF(x)\,dF(y)+f(y)\,dy=0\ldots(296),$$

dans laquelle $F(y)$ et $F(x)$ sont des fonctions égales, l'une en $y$ et l'autre en $x$, et $f(y)$ une fonction quelconque de $y$, se ramène aisément à l'intégration d'une fonction différentielle à une seule variable. En effet, multiplions l'équation (296) par $[F(y)]^{\omega}$, la lettre $\omega$ représentant une quantité indéterminée, ce qui nous donnera

$$A[F(y)]^{\omega+1}d.F(x)+BF(x)[F(y)]^{\omega}d.F(y)$$
$$+[F(y)]^{\omega}f(y)\,dy=0\ldots\ldots(a).$$

Or, afin que les deux premiers termes de cette équation forment la différentielle exacte d'une fonction de $x$ et de $y$, il faut qu'on ait

$$\int^{F(x)}A[F(y)]^{\omega+1}dF(x)$$
$$=\int^{F(y)}BF(x)[F(y)]^{\omega}dF(y)\ [\text{art. } 323],$$

d'où

$$A[F(y)]^{\omega+1}F(x)=\frac{B[F(y)]^{\omega+1}F(x)}{\omega+1},$$

ou $$A=\frac{B}{\omega+1};$$

d'où on tire $$\omega=\frac{B-A}{A};$$

donc substituant cette valeur de $\omega$ dans l'équation $(a)$; et intégrant, on a pour intégrale de l'équation (296) celle

$$A[F(y)]^{\frac{B}{A}}F(x)+\int[F(y)]^{\frac{B-A}{A}}f(y)dy=\text{const}\ldots(297).$$

EXEMPLE I. *Intégrer l'équation*

$$aydx + bxdy + nydy + pdy = 0.$$

Cette proposée étant dans le cas que nous venons d'examiner, nous la comparerons à l'équation (296), ce qui nous donnera

$$A = a, B = b, F(y) = y, F(x) = x, f(y) = ny + p,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (297), nous aurons

$$ay^{\frac{b}{a}}x + n\int y^{\frac{b}{a}}dy + p\int y^{\frac{b-a}{a}}dy = \text{const.}$$

ou

$$y^{\frac{b}{a}}\left[x + \frac{ny}{a+b} + \frac{p}{b}\right] = \text{const.}$$

ce qui est l'intégrale de la proposée.

EXEMPLE II. *Intégrer l'équation*

$$3adx + 3ydx + xdylx + 9axdy + 9xydy = 0 \ldots (b).$$

Cette équation ne se présente pas sous une forme convenable à la méthode précédente; mais on l'y ramènera aisément en opérant de la manière suivante.

Soit fait $a + y = z$ d'où $dy = dz$,

ce qui réduit l'équation ($b$) à celle

$$3zdx + xlxdz + 9xzdz = 0,$$

laquelle étant divisée par $x$, donne l'équation

$$3zdlx + lxdz + 9zdz = 0.$$

qui est de la forme de l'équation (296); ainsi l'intégrant d'après la méthode précédente, et substituant dans

son intégrale la valeur $a+y$ de $z$, on aura pour intégrale de la proposée,

$$\sqrt[3]{(a+y)}\,[4lx+9\,(a+y)]=\text{const.}$$

342. Passons maintenant à l'intégration des équations du premier degré, appelées par presque tous les Géomètres, *équations lineaires du premier ordre* (voyez pour cette dénomination, l'article 422), et qu'on peut généralement représenter par celle

$$dy+yXdx+\xi dx=0\ldots\ldots\ldots\ldots(298),$$

dans laquelle X et $\xi$ représentent des fonctions quelconques de $x$.

Soit posé l'équation

$$y=zfx\ldots\ldots\ldots(a),$$

en représentant par $fx$ une fonction indéterminée de $x$; et différentions-la, ce qui nous donnera

$$dy=fxdz+zd.fx\ldots\ldots(b).$$

Substituant ces valeurs de $y$ et de $dy$ dans l'équat. (298), il viendra celle

$$fxdz+zd.fx+zXfxdx+\xi dx=0\ldots\ldots(c).$$

Or, puisque $fx$ est une fonction variable indéterminée, nous pouvons en disposer de manière à faire évanouir la somme des second et troisième termes de l'équation ($c$), ce qui nous donnera les deux équations

$$zdfx+zXfxdx=0\ldots\ldots(d);$$
$$fxdz+\xi dx=0\ldots\ldots\ldots\ldots(e).$$

De la première, nous tirons

$$\frac{dfx}{fx}=-Xdx,$$

d'où

$$fx = e^{-\int X dx} \ldots\ldots (f) \; [*],$$

et de la seconde équation $(e)$, il vient

$$dz = -\xi\,(fx)^{-1} dx\,;$$

donc intégrant et substituant à la place de $fx$ sa valeur [équat. $(f)$], nous aurons

$$z = -\int \xi e^{\int X dx} dx + \text{const.} \ldots\ldots (g)\,;$$

enfin substituant ces valeurs de $fx$ et de $z$ dans l'équation $(a)$, il viendra

$$y + e^{-\int X dx} \left[\int \xi e^{\int X dx} dx + \text{const.}\right] = 0 \ldots\ldots (299),$$

ce qui est l'intégrale de l'équation (298).

EXEMPLE I. *Intégrer l'équation*

$$dy - xdy - aydx - bdx + bxdx = 0.$$

Divisant la proposée par $1 - x$, il vient

$$dy - \frac{ay}{1-x} dx - bdx = 0.$$

Comparant cette équation avec celle (298), on a

$$X = -\frac{a}{1-x} \quad \text{et} \quad \xi = -b,$$

---

(*) Nous ne mettons pas de constante à cette intégrale, parce qu'elle doit entrer dans l'intégrale totale de l'équation (298), où nous placerons la constante indéterminée d'une manière beaucoup plus commode que si nous l'avions placée dans l'équation $(f)$.

donc

$$\int X dx = a l(1-x), \quad e^{-\int X dx} = e^{l\frac{1}{(1-x)^a}} = \frac{1}{(1-x)^a};$$

$$e^{\int X dx} = (1-x)^a,$$

$$\int \xi e^{\int X dx} dx = -b\int (1-x)^a dx = b\int (1-x)^a d(1-x)$$
$$= \frac{b(1-x)^{a+1}}{a+1}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (299), il vient

$$y + \frac{1}{(1-x)^a}\left[\frac{b}{a+1}(1-x)^{a+1} + \text{const.}\right] = 0$$

qui est l'intégrale demandée.

Exemple II. *Intégrer l'équation*

$$dy + aydx + be^{qx}dx = 0 \ldots\ldots (300).$$

Comparant cette équation avec celle (298), on a

$$X = a, \quad \xi = be^{qx},$$

donc

$$\int X dx = ax, \quad e^{-\int X dx} = e^{-ax}, \quad e^{\int X dx} = e^{ax},$$
$$\int \xi e^{\int X dx} dx = b\int e^{(q+a)x} dx = \frac{b}{a+q} e^{(a+q)x}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (299), on a pour l'intégrale de la proposée, l'équation

$$y + e^{-ax}\left[\frac{be^{(a+q)x}}{a+q} + \text{const.}\right] = 0 \ldots\ldots (301).$$

Faisant $q = 0$, on a

$$\int [dy + aydx + bdx = 0] = [(ay+b)e^{ax} = \text{const.}].$$

Exemple III. *Trouver l'équation d'une courbe entre ses coordonnées rectangulaires, telle que si de l'origine*

*des coordonnées on mène une droite faisant un demi-angle droit avec chacun des deux axes, on ait pour un point quelconque de la courbe cherchée, le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente correspondante, égal à celui d'une ligne donnée* m *à la partie de l'ordonnée comprise entre la diagonale tirée et la courbe.*

Représentant par $x$ une ordonnée quelconque de la courbe cherchée, et par $y$ l'abscisse correspondante, il est clair que cette abscisse sera égale à la partie de l'ordonnée $x$ comprise entre l'axe des abscisses et la diagonale; donc la partie de cette ordonnée comprise entre la diagonale et la courbe est $x-y$; ainsi d'après l'énoncé de la question, on aura la proportion

$$x : \frac{xdy}{dx} \text{ (art. 102) } :: m : x-y;$$

d'où l'on tire l'équation différentielle

$$dy + \frac{ydx}{m} - \frac{xdx}{m} = 0;$$

qui est de la forme de l'équation générale (298) en faisant

$$Xdx = \frac{dx}{m}, \quad \xi = -\frac{x}{m},$$

donc

$$\int Xdx = \frac{x}{m}, \quad e^{\mp\int Xdx} = e^{\mp\frac{x}{m}},$$

$$\int \xi e^{\int Xdx} dx = -\int \frac{x}{m} e^{\frac{x}{m}} dx = -m\int \frac{x}{m} e^{\frac{x}{m}} d\frac{x}{m} = -e^{\frac{x}{m}}(x-m)$$

[voyez la form. (214), art. 266]. Substituant ces valeurs dans l'équation (299), il vient

$$y + e^{-\frac{x}{m}}[\text{const.} - e^{\frac{x}{m}}(x-m)] = 0.$$

Mais lorsque $x = 0$, on a

$$y = 0, \quad \text{donc} \quad \text{const.} = -m,$$

et par conséquent on a complètement

$$y = me^{-\frac{x}{m}} + x - m;$$

ce qui est l'équation de la courbe demandée.

Exemple IV. *Intégrer l'équation*

$$xdy + x^m ydx + dx = 0.$$

Divisant cette équation par $x$, on a

$$X = x^{m-1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{x};$$

donc

$$\int Xdx = \frac{x^m}{m}, \quad e^{\pm\int Xdx} = e^{\pm\frac{x^m}{m}}$$

et

$$\int \xi e^{\int Xdx} dx = \int \frac{e^{\frac{x^m}{m}} dx}{x}.$$

Soit fait pour effectuer l'intégration de cette dernière formule,

$$z = \frac{x^m}{m}, \quad \text{d'où}$$

$$x = m^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m}}, \quad dx = \frac{dz}{m^{\frac{m-1}{m}} z^{\frac{m-1}{m}}} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{mz};$$

donc

$$\int \frac{dx e^{\frac{x^m}{m}}}{x} = \frac{1}{m}\int \frac{dz e^z}{z} = \frac{e^z}{mz}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \text{etc.}\right]$$

[form. (215), art. 267]

$$= \frac{e^{\frac{x^m}{m}}}{x^m}\left[1 + \frac{m}{x^m} + \frac{2m^2}{x^{2m}} + \text{etc.}\right];$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (299), il vient

$$e^{\frac{x^m}{m}}\left[y+\frac{1}{x^m}\left(1+\frac{m}{x^m}+\frac{2m^2}{x^{2m}}+\frac{2.3m^3}{x^{3m}}+\text{etc.}\right)\right]$$
$$=\text{const}\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Si la série entre parenthèses était divergente, alors nous servant de la formule (218) [art. 268] pour intégrer $\frac{e^z dz}{z}$, nous aurions

$$\int\frac{dxe^{\frac{x^m}{m}}}{x}=\frac{1}{m}\int\frac{e^z dz}{z}=\frac{1}{m}\,l\,\frac{x^m}{m}+\text{etc.}$$
$$=lx-\frac{1}{m}\,lm+\frac{x^m}{m^2}\left[1+\frac{x^m}{2^2m}+\frac{x^{2m}}{2.3^2m^2}+\text{etc.}\right];$$

donc l'intégrale de la proposée serait

$$ye^{\frac{x^m}{m}}+lx+\frac{x^m}{m^2}\left[1+\frac{x^m}{2^2.m}+\frac{x^{2m}}{2.3^2m^2}+\text{etc.}\right]$$
$$=\text{const}\ldots\ldots\ldots\ldots(b).$$

Les deux intégrales ($a$) et ($b$) ne pourraient servir si l'on avait $m=0$, mais alors la proposée se réduirait à l'équation

$$xdy+ydx+dx=0,$$

dont il est évident que l'intégrale est

$$yx+x=\text{const}.$$

343. Les équations différentielles de la forme

$$dy+yXdx+y^{m+1}\xi dx=0\ldots(302),$$

dans laquelle X et $\xi$ représentent toujours des fonc-

tions quelconques de $x$, peut toujours se ramener à la forme de celle (298) que nous savons intégrer ; en effet, faisant $y^m = \frac{1}{z}$, d'où

$$dy = -\frac{dz}{mz^{\frac{m+1}{m}}} \quad \text{et} \quad y^{m+1} = \frac{1}{z^{\frac{m+1}{m}}};$$

ensuite substituant ces valeurs dans l'équation (302), on a la transformée

$$dz - mzXdx - m\xi dx = 0,$$

qui, étant intégrée suivant la méthode enseignée dans l'article précédent, et substituant dans l'intégrale la valeur de $z = \frac{1}{y^m}$, donnera l'intégrale de la proposée (302).

344. Quoique l'équation différentielle

$$axdy + bydx + x^c y^m (nxdy + pydx) = 0 \ldots (303)$$

soit assez compliquée, cependant elle se transforme aisément en une autre équation, dans laquelle les variables sont séparées, et des plus faciles à intégrer.

En effet, divisant l'équation (303) par $xy$, on a

$$\frac{ady}{y} + \frac{bdx}{x} + x^c y^m \left(\frac{ndy}{y} + \frac{pdx}{x}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (a).$$

Soit actuellement fait

$$\{z = y^a x^b \quad \text{et} \quad u = y^n x^p\} \ldots\ldots (b);$$

d'où

$$\left\{\frac{dz}{z} = \frac{ady}{y} + \frac{bdx}{x} \quad \text{et} \quad \frac{du}{u} = \frac{ndy}{y} + \frac{pdx}{x}\right\} \ldots\ldots (c);$$

et représentant par $\omega$ et $\lambda$ des quantités indéterminées, on aura

$$\{z^{\omega}=y^{a\omega}x^{b\omega} \quad \text{et} \quad u^{\lambda}=y^{n\lambda}x^{p\lambda}\}\ldots\ldots(d).$$

Divisant la première de ces équations en $(d)$ par la seconde, il vient

$$z^{\omega}u^{-\lambda}=y^{a\omega-n\lambda}x^{b\omega-p\lambda}\ldots\ldots(e).$$

Mais les quantités respectivement représentées par $\omega$ et $\lambda$ étant indéterminées, on peut faire

$$\{a\omega-n\lambda=m \quad \text{et} \quad b\omega-p\lambda=c\}\ldots\ldots\ldots(f);$$

d'où on tire

$$\left\{\omega=\frac{nc-pm}{bn-ap} \quad \text{et} \quad \lambda=\frac{ac-bm}{bn-ap}\right\}\ldots\ldots\ldots(g),$$

ce qui réduit l'équation $(e)$ à celle

$$y^{m}x^{c}=z^{\omega}u^{-\lambda}.$$

Substituant cette valeur de $y^{m}x^{c}$, ainsi que celles de $\frac{ady}{y}+\frac{bdx}{x}$ et $\frac{ndy}{y}+\frac{pdx}{x}$ [équat. $(c)$] dans l'équation $(a)$, on aura

$$\frac{dz}{z}+\frac{z^{\omega}du}{u^{\lambda+1}}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z^{\omega+1}}+\frac{du}{u^{\lambda+1}}=0\ldots\ldots(h),$$

équation séparée dont l'intégrale est

$$\frac{\lambda}{z^{\omega}}+\frac{\omega}{u^{\lambda}}=\text{const}\ldots\ldots\ldots\ldots(i).$$

Substituant dans cette équation $(i)$ les valeurs de $\lambda$ et de $\omega$ [équat. $(g)$], ainsi que celles de $z$ et de $u$

[équat. ($b$)], on aura

$$\int[\text{équat. } (303)] = [(ac - bm)\,(y^a x^b)^{\frac{pm-nc}{bn-ap}}$$

$$+ (nc - pm)\,(y^n x^p)^{\frac{bm-ac}{bn-ap}} = \text{const.}] \ldots (304).$$

345. Nous remarquerons que si l'on avait en même temps $ac = bm$ et $pm = nc$, ce qui rendrait l'intégrale précédente nulle ; cela ne pourrait avoir lieu qu'en tant qu'on aurait $m = 0$ et $c = 0$, puisque dans le cas des égalités précédentes, on aurait

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \omega = 0 \text{ [équat. } (g)\text{, art. 344]},$$

et alors les équations ($f$) [art. 344] donneraient

$$m = 0 \quad \text{et} \quad c = 0,$$

ce qui réduirait la proposée (303) à l'équation

$$axdy + bydx + nxdy + pydx = 0,$$

dont il est aisé de voir que l'intégrale est

$$y^{a+n} x^{b+p} = \text{const.}$$

346. Mais si l'on a seulement

$$ac = bm, \quad \text{d'où} \quad c = \frac{bm}{a},$$

c'est-à-dire, si l'équation à intégrer est

$$axdy + bydx + x^{\frac{bm}{a}} y^m (nxdy + pydx) = 0 \ldots (305).$$

Alors, à cause de $\lambda = 0$, l'équation ($h$) [art. 344] se réduisant à celle

$$\frac{dz}{z^{\omega+1}} + \frac{du}{u} = 0,$$

dont

dont l'intégrale est

$$lu - \frac{1}{\omega z^{\omega}} = \text{const.};$$

on aura, par le moyen des substitutions des valeurs de $u$, $z$ [équat. ($b$), art. 344] et de $\omega = \frac{m}{a}$, l'équation

$$f[\text{éq. } (305)] = \left[ ly^n x^p - \frac{a}{m y^m x^{\frac{bm}{a}}} = \text{const.} \right] \ldots (306).$$

347. Si une équation différentielle

$$F(x, y, dx, dy) = 0,$$

est le produit d'une équation primitive

$$\varphi(x, y) = 0,$$

par une équation différentielle

$$f(x, y, dx, dy) = 0,$$

il est clair que l'intégrale de la proposée se réduit à celle de cette dernière équation differentielle; c'est ce qui arrive à l'équation (303) lorsque $bn = ap$, d'où $b = \frac{ap}{n}$, c'est-à-dire, lorsque l'équation proposée est

$$axdy + \frac{ap}{n} ydx + x^c y^m (nxdy + pydx) = 0 \ldots\ldots (a),$$

car la multipliant par $n$, elle devient

$$(nxdy + pydx)(a + nx^c y^m) = 0 \ldots\ldots (b),$$

équation à laquelle on peut satisfaire de deux manières, soit en faisant

$$nxdy + pydx = 0 \ldots\ldots (c),$$

et alors l'intégrale de l'équation ($a$) est

$$x^p y^n = \text{const.} \ldots\ldots (d),$$

soit en faisant

$$a + nx^c y^m = 0 \ldots\ldots (e),$$

et alors la fonction différentielle facteur

$$nxdy + pydx \ldots\ldots (f)$$

qui n'est pas intégrable tant que l'on considère les deux variables $x$ et $y$ indépendantes l'une de l'autre, sera intégrable dans ce cas-ci à cause de la relation entre ces deux variables données par l'équation $(e)$, et qui réduit la fonction $(f)$ à la fonction différentielle à une seule variable

$$\frac{mp - nc}{m} \sqrt[m]{\frac{-a}{n}} \frac{dx}{\sqrt[m]{x^c}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{nc - mp}{c - m} \sqrt[m]{\frac{-a}{n}}\, x^{\frac{m-c}{m}} + \text{const.} = 0 \ldots (g),$$

ce qui est, dans le cas que nous examinons, l'intégrale de l'équation $(a)$, puisqu'il faudrait multiplier le premier membre de l'équation $(g)$ qui est l'intégrale immédiate du facteur différentiel, par la quantité $a + nx^c y^m$ laquelle est nulle d'après l'hypothèse [équat. $(e)$].

Nous remarquerons que l'intégrale $(d)$ correspondante à la première hypothèse [équat. $(c)$] étant absolument indépendante des constantes $a$, $m$ et $c$ qui entrent dans le facteur variable

$$a + nx^c y^m.$$

Cette intégrale $(d)$ appartient à un nombre infini d'équations de la forme de celle $(a)$, puisqu'on peut faire varier à l'infini dans cette équation $(a)$ les quantités $a$, $m$ et $c$, sans que l'équation $(d)$ change; observation essentielle que nous rappellerons dans la suite.

348. Toute équation différentielle hétérogène à deux variables et d'un nombre quelconque de termes, telle que celle

$$(Ax^a y^b + Bx^c y^e + Cx^f y^g + \text{etc.})\,dx$$
$$+ (Dx^{a'} y^{b'} + Ex^{c'} y^{e'} + Gx^{f'} y^{g'} + \text{etc.})\,dy = 0 \ldots (a),$$

sera évidemment intégrable si nous pouvons la transformer en une autre qui soit homogène (art. 339). Afin de connaître la relation qui doit exister entre les exposans des variables, pour que l'équation proposée ($a$) soit susceptible de la transformation en question, commençons par la diviser par l'un des termes variables, par exemple, par celui $Ax^a y^b$, ce qui donnera à la proposée la forme

$$(1 + Hx^h y^i + Ix^k y^l + \text{etc.})\,dx$$
$$+ (Lx^m y^n + Mx^o y^p + Px^q y^r + \text{etc.})\,dy = 0 \ldots (b).$$

Soit fait dans cette équation,

$$(c) \ldots y = z^\omega, \quad \text{d'où} \quad dy = \omega z^{\omega - 1} dz \ldots (d),$$

ce qui la transformera en celle

$$(1 + Hx^h z^{i\omega} + Ix^k z^{l\omega} + \text{etc.})\,dx$$
$$+ \left[\begin{array}{l} \omega Lx^m z^{(n+1)\omega - 1} + Mx^o z^{(p+1)\omega - 1} \\ \quad + \omega Px^q y^{(r+1)\omega - 1} + \text{etc.} \end{array}\right] dz \ldots (e).$$

Or, le premier terme de cette équation étant d'un degré nul par rapport aux deux variables, il faut, pour que la transformée ($e$) soit homogène, qu'on ait la suite d'égalités

$$0 = h + i\omega = k + l\omega, \text{ etc.} = m + (n+1)\omega - 1$$
$$= o + (p+1)\omega - 1 = q + (r+1)\omega - 1 \text{ etc.} \ldots (f);$$

de la première de ces égalités on tire celle

$$\omega = -\frac{h}{i} \ldots (g);$$

donc si cette valeur de $\omega$ satisfait à toutes les autres égalités en $(f)$, c'est-à-dire, si elle rend nuls tous les polynomes compris entre les signes d'égalité, on en conclura que la proposée $(a)$ est susceptible de transformation en une équation homogène, et on aura la transformée demandée, en substituant dans l'équation $(e)$ la valeur de $\omega$ [équat. $(g)$].

349. Appliquant cette méthode à l'équation générale à trois termes

$$dx + ax^m y^n dx = bx^p y^q dy \ldots (307),$$

nous y substituerons les valeurs de $y$ et de $dy$ données par les équations $(c)$ et $(d)$ de l'article 348, ce qui nous donnera la transformée

$$dx + ax^m z^{n\omega} dx - \omega b x^p z^{(q+1)\omega - 1} dz = 0 \ldots (a),$$

qui ne peut être homogène qu'en tant que nous aurons

$$(b) \ldots m + n\omega = 0 \quad \text{et} \quad p + (q+1)\omega - 1 = 0 \ldots (c).$$

de la première de ces équations, nous tirons

$$\omega = -\frac{m}{n} \ldots\ldots (d),$$

et substituant cette valeur de $\omega$ dans l'équation $(c)$, il vient celle

$$n(p-1) = m(q+1) \ldots\ldots (308),$$

qui est l'équation de condition pour que la proposée (307) soit susceptible d'être transformée en une équation homogène.

Substituant à la place de $\omega$ sa valeur $-\frac{m}{n}$ dans l'équation $(a)$, il vient celle

$$dx + ax^m z^{-m} dx + \frac{m}{n} b x^p z^{-\left(\frac{m}{n}(q+1)+1\right)} dz = 0 \ldots (e);$$

mais l'équation (308) donne

$$\frac{m}{n}(q+1)+1=p;$$

donc l'équation ($e$) se réduit d'après celle de condition (308), à la transformée

$$dx+ax^m z^{-m}dx+\frac{bm}{n}x^p z^{-p}dz=0\ldots(f).$$

Faisant suivant la méthode enseignée à l'article 339, $z=ux$, d'où $dz=udx+xdu$, on aura l'équation séparée

$$\frac{dx}{x}=\frac{-bmdu}{nu^p+anu^{p-m}+bmu}\ldots(309).$$

Substituant dans l'intégrale de cette dernière équation, la valeur de

$$u\left(=\frac{z}{x}\right)=\frac{1}{x\sqrt[m]{y^n}}\ldots.(310)$$

[ équat. ($d$) de cet article et équat. ($c$) de l'art. 348], on aura l'intégrale de la proposée (307).

EXEMPLE. *Intégrer, si c'est possible, l'équation*

$$\sqrt{y}dx+3x^2y^{\frac{3}{2}}dx=2x^2dy\ldots\ldots(g).$$

Divisant cette équation par $\sqrt{y}$, il vient celle

$$dx+3x^2ydx=2x^2y^{-\frac{1}{2}}dy\ldots\ldots(h),$$

qui, comparée avec l'équation générale (307), donne

$$a=3;\ m=2,\ n=1,\ b=2,\ p=2,\ q=-\tfrac{1}{2}.$$

Substituant les valeurs de $m$, $n$, $p$ et $q$ dans l'équation de condition (308), on a l'identique $1=1$; donc la proposée ($g$) peut être transformée en une équation homogène d'un degré nul. Ainsi substituant tout de suite les valeurs numériques des lettres dans l'équation

(309), on aura celle

$$\frac{dx}{x} = \frac{-4du}{u^2 + 4u + 3} = \frac{-4du}{(u+1)(u+3)};$$

et intégrant, il vient

$$x\left[\frac{u+1}{u+3}\right]^2 = \text{const.}$$

Mais $u = \frac{1}{x\sqrt{y}}$ [équat. (310)]; donc l'intégrale de l'équation ($g$) est

$$x\left[\frac{x\sqrt{y}+1}{3x\sqrt{y}+1}\right] = \text{const.}$$

350. Mais lorsque l'équation de condition (308) ne sera pas satisfaite, on pourra transformer la proposée (307) en une autre équation qu'il sera possible d'intégrer dans un nombre infini de cas; voici en quoi consiste cette transformation.

Divisant l'équation (307) par $bx^p$, on a

$$\frac{x^{-p}\,dx}{b} + \frac{a}{b}\,x^{m-p}y^n dx = y^q dy \ldots\ldots (a).$$

Soit fait

$$\left\{ y^{q+1} = z \quad \text{et} \quad x^{m-p+1} = u \right\} \ldots\ldots (b);$$

d'où

$$y^q dy = \frac{dz}{q+1}, \quad \text{et} \quad x^{m-p}dx = \frac{du}{m-p+1} \ldots\ldots (c).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ($a$), et multipliant la transformée par $q+1$, il vient

$$dz = \frac{q+1}{b\,(m-p+1)}\,u^{\frac{m}{p-m-1}}du + \frac{a\,(q+1)}{b\,(m-p+1)}\,z^{\frac{n}{q+1}}du \ldots (d)$$

ou faisant pour abréger,

$$\left.\begin{array}{ll} c=\dfrac{q+1}{b\,(m-p+1)}, & g=\dfrac{m}{p-m-1}, \\ h=\dfrac{a\,(q+1)}{b\,(m-p+1)}, & i=\dfrac{n}{q+1} \end{array}\right\}\ldots.(e),$$

on a la transformée

$$dz=cu^g du+hz^i du\ldots.(311).$$

Faisant $i=0$, cette équation est séparée (*) ; et faisant $i=1$, l'équation (311) prend la forme de celle (298) dont nous avons donné l'intégrale générale (299) à l'article 342.

351. Mais si $i=2$, on aura l'équation

$$dz=cu^g du+hz^2 du\ldots..(312),$$

qui a acquis de la célébrité parmi les savans, parce qu'elle a été l'objet des recherches de plusieurs grands Géomètres, et entre autres de *Jacques Bernoulli*, du comte *Jacques Riccati*, dont elle porte le nom, et d'*Euler*, qui ont trouvé un nombre infini de cas dans lesquels cette équation est séparable.

Le plus simple de ces cas-là, et qu'on aperçoit tout de suite, est celui où $g=0$; car alors on trouve subitement

$$du=\frac{dz}{c+hz^2}\ldots..(a),$$

équation séparée dont l'intégrale est

$$u=\frac{1}{\sqrt{(ch)}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{z\sqrt{h}}{\sqrt{c}}\right)+\mathrm{const}\ldots(b)\ [\text{éq. }(135)].$$

---

(*) Dans le même cas de $i=0$, l'équation (307) se sépare en la divisant par $x^p$, puisque d'après la quatrième équation en $(e)$, l'on a $n=0$ lorsque $i=0$.

Faisant $z = \xi^q$, d'où $dz = q\xi^{q-1}d\xi$, et substituant ces valeurs dans l'équation (312), on a celle

$$q\xi^{q-1}d\xi = cu^g du + h\xi^{2q}du$$

qui est homogène si

$$q - 1 = 2q = g;$$

or, la première égalité donne $q = -1$, donc la seconde donne $g = -2$, ainsi l'équation

$$dz = cu^{-2}du + hz^2du$$

se transforme en une équation homogène, en faisant $z = \xi^{-1}$, et la transformée est

$$u^2d\xi + c\xi^2du + hu^2du = 0 \ldots (313).$$

Après avoir considéré ces deux cas particuliers, passons à la recherche générale de tous les autres cas où l'équation du comte *Riccati* est séparable.

Soit fait

$$z = -\left[\frac{1}{hu} + \frac{\xi}{u^2}\right],$$

d'où

$$dz = \frac{du}{hu^2} - \frac{d\xi}{u^2} + \frac{2\xi du}{u^3},$$

et

$$z^2 = \frac{1}{h^2u^2} + \frac{2\xi}{hu^3} + \frac{\xi^2}{u^4}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (312), il vient, toutes réductions faites,

$$u^2d\xi = -cu^{g+4}du - h\xi^2du,$$

et faisant dans cette dernière équation $u = \frac{1}{s}$, on aura celle

$$d\xi = cs^{-g-4}ds + h\xi^2ds \ldots (314).$$

Or, si l'équation (312) est séparable par une valeur de $g$ que je représente par $n$, elle le sera aussi lorsqu'on y fera $g = -n - 4$; car substituant cette valeur de $g$ dans l'équation (314), on a celle

$$d\zeta = cs^n ds + h\zeta^2 ds.$$

Mais nous avons vu que l'équation (312) est séparable lorsque $g = 0$; donc elle est encore séparable lorsque $g = -4$.

Actuellement si dans l'équation (312), on fait

$$z = -\frac{1}{\zeta}, \quad \text{d'où} \quad dz = \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

elle se transformera en celle

$$d\zeta = c\zeta^2 u^g du + h du,$$

et faisant

$$u^{g+1} = s, \quad \text{d'où} \quad u^g du = \frac{ds}{g+1},$$

l'équation précédente devient

$$d\zeta = \frac{h}{g+1} s^{-\frac{g}{g+1}} ds + \frac{c}{g+1} \zeta^2 ds \ldots\ldots (315).$$

Donc si l'équation (312) est séparable pour une valeur de $g$ que je représente par $n$, elle le sera encore lorsqu'on fera $g = -\frac{n}{n+1}$; car substituant cette valeur de $g$ dans l'exposant $\frac{-g}{g+1}$ de $s$ [équat. (315)], il se réduit à $n$; or nous avons démontré que l'équation (312) est séparable lorsque $g = -4$; donc elle sera encore séparable lorsqu'on fera

$$g = \frac{4}{-4+1} = -\frac{4}{3}.$$

De même, puisqu'elle est séparable pour cette dernière valeur de $g$, elle le sera encore pour celle

$$\frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3},$$

et par conséquent aussi pour

$$g = \frac{-\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{8}{3} + 1} = -\frac{8}{5},$$

et continuant ainsi ce calcul qui pose sur ce que si l'équation (312) est séparable lorsque $g = n$, elle l'est encore lorsque

$$g = -n - 4 \quad \text{et} \quad g = \frac{-n}{n+1},$$

en représentant par $n$ le dernier exposant trouvé à la variable $u$, on en conclura que l'équation (312) est séparable lorsque l'exposant de la variable $u$ est égal à l'un des termes de la suite infinie

$$\left.\begin{array}{l} 0, -2, -4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, \\ \qquad -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}, \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (316),$$

dont le terme général, à partir du troisième terme, est

$$\frac{-4q}{2q \mp 1} \ldots\ldots\ldots (317),$$

en faisant successivement $q = 1, 2, 3$, etc. Si l'on fait $q = 0$, le terme général (317) donne le premier terme de la suite (316); et si divisant les deux termes de la fraction (317) par $q$, on fait

$$q = \frac{1}{0}, \quad \text{d'où} \quad 0 = \frac{1}{q},$$

ce terme général donnera le second terme de la suite (316).

Il est à propos d'observer que si l'exposant de la variable dont la différentielle multiplie deux termes de l'équation (312) du comte Riccati, est égal à l'un des nombres occupant les places impaires de la série (316), il faudra la comparer d'abord avec l'équation (314); et substituant les valeurs numériques des symboles des quantités constantes dans l'équation (312), on aura une équation qui devra être comparée a l'équation (315); ensuite substituant les valeurs numériques des symboles des quantités constantes dans l'équation (312), on en aura une qui devra être comparée à l'équation (314), et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation dans laquelle l'exposant qui a diminué de valeur à chaque opération, se trouve enfin $= 0$, et alors on n'a plus qu'à intégrer l'équation séparée ($a$), dont nous avons donné l'intégrale [équat. ($b$)].

Si l'exposant que l'on cherche à diminuer jusqu'à le rendre nul, était l'un des termes occupant les places paires de la série (316), on commencerait par comparer la proposée avec l'équation (315), et l'on continuerait à opérer, comme précédemment.

Rendons ceci plus sensible par une application numérique, en nous proposant d'intégrer l'equation

$$dy = y^2 dx + \frac{2dx}{\sqrt[3]{x^8}} \ldots\ldots\ldots (c).$$

L'exposant de $x$ étant $-\frac{8}{3}$ qui est le cinquième terme de la série (316), nous sommes sûrs que l'équation ($c$) est séparable, et à cause que l'exposant $-\frac{8}{3}$ occupe une place impaire, nous comparons la proposée avec l'équation (314), abstraction faite des symboles

des variables, ce qui nous donne

$c=2$, $g+4=\frac{8}{3}$, d'où $g=-\frac{4}{3}$; enfin $h=1$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (312), nous avons

$$dy' = 2x'^{-\frac{4}{3}}dx' + y'^2dx';$$

comparant cette dernière équation avec celle (315), il vient

$$\frac{h}{g+1}=2, \quad \frac{g}{g+1}=\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{c}{g+1}=1;$$

d'où

$$c=-3, \quad h=-6, \quad g=-4,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (312), nous avons

$$dy'' = -3x''^{-4}dx'' - 6y''^2dx'';$$

comparant cette dernière équation avec celle (314), il vient

$c=-3$, $h=-6$ et $g+4=4$, d'où $g=0$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (312), nous avons

$$dy''' = -3dx''' - 6y'''^2dx''',$$

dont l'intégrale est

$$x''' = \frac{1}{3\sqrt{2}}\text{arc tang}(=y'''\sqrt{2}) + \text{const.}\ldots(d)\ [\text{éq. }(b)].$$

Mais en remontant des valeurs de $x'''$ et de $y'''$ jusqu'à celles de $x$ et de $y$, il vient

$$x''' = \frac{1}{x''}, \quad x'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x'}} \quad \text{et} \quad x' = \frac{1}{x},$$

d'où

$$x'' = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad x''' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ensuite nous avons

$$y''' = \frac{\sqrt[3]{x}(1-6y''\sqrt[3]{x})}{6}, \; y'' = -\frac{1}{y'} \text{ et } y' = -x(1+xy);$$

d'où

$$y'' = \frac{1}{x(1+xy)} \quad \text{et} \quad y''' = \frac{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x^5}-6}{6(1+xy)\sqrt[3]{x}}.$$

Substituant ces valeurs de $x'''$ et de $y'''$ dans l'équation ($d$), nous avons pour l'intégrale demandée de l'équation ($c$), celle

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ arc}\left[\text{tang} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x^5}-6}{3\sqrt{2}\sqrt[3]{x}(1+xy)}\right] + \text{const.}$$

352. Toute équation différentielle de la forme

$$dy = ax^p dx + by^2 x^q dx \ldots\ldots (318),$$

dans laquelle $q$ représente un nombre quelconque différent de l'unité, pourra se transformer en une autre de même forme que l'équation du comte Riccati. En effet, soit fait

$$x^q dx = dz,$$

d'où

$$\frac{x^{q+1}}{q+1} = z \quad \text{et} \quad x = [(q+1)z]^{\frac{1}{q+1}};$$

différentiant cette dernière équation, on a

$$dx = \frac{z^{\frac{-q}{q+1}} dz}{\sqrt[q+1]{(q+1)^q}};$$

de plus

$$x^p = \sqrt[q+1]{[(q+1)z]^p};$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation (318),

on aura la transformée

$$dy = a\,(q+1)^{\frac{p-q}{q+1}} z^{\frac{p-q}{q+1}} dz + by^2 dz\,,$$

qui est de même forme que celle (312).

353. Proposons-nous enfin de trouver quelles valeurs doivent avoir le coefficient $p$ et l'exposant $q$, pour que l'équation à quatre termes

$$dy = ay^2 dx + bx^m dx + pyx^q dx \ldots\ldots (319)$$

se réduise à une équation à trois termes, et de la forme de celle du comte Riccati.

Faisons $y = z + ix^r$, $i$ et $r$ étant deux quantités constantes et indéterminées. Différentiant cette dernière équation, ce qui donne

$$dy = dz + irx^{r-1}dx\,;$$

ensuite substituant les valeurs de $y$ et de $dy$ dans l'équation (319), on a

$$dz = -rix^{r-1}dx + az^2dx + 2azix^r dx + ai^2x^{2r}dx$$
$$+ bx^m dx + pzx^q dx + pix^{q+r}dx \ldots (a).$$

Rendant homogènes les premier, quatrième et septième termes du second membre de cette équation, c'est-à-dire, faisant $r-1 = 2r = r+q$, d'où $r = -1$, $r = q$, et par conséquent $q = -1$, on aura l'équation

$$dz = (i + ai^2 + pi)\,x^{-2}dx + (2ai + p)\,zx^{-1}dx$$
$$+ az^2dx + bx^m dx\,;$$

et afin que les deux premiers termes du second membre de cette dernière équation s'évanouissent, faisant

$$ai^2 + pi + i = 0 \quad \text{et} \quad 2ai + p = 0,$$

d'où

$$i = \frac{-1-p}{a} \quad \text{et} \quad i = \frac{-p}{2a} \text{ (*)},$$

on aura

$$p + 1 = \frac{p}{2}, \quad \text{d'où} \quad p = -2;$$

donc il n'y a que les équations à quatre termes de la forme

$$dy = ay^2dx + bx^m dx - \frac{2ydx}{x} \ldots (320)$$

qui puissent se transformer en l'équation du comte Riccati,

$$dz = az^2dx + bx^m dx \ldots\ldots (321),$$

en faisant

$$y = z + \frac{1}{ax} \ldots\ldots (322).$$

354. Si l'équation à quatre termes que l'on veut réduire à une équation à trois termes de la forme de celle du comte Riccati, est la suivante,

$$dy = ay^2x^n dx + bx^m dx + pyx^q dx \ldots\ldots (323),$$

on fera

$$x^n dx = d\xi,$$

d'où

$$x^{n+1} = (n+1)\xi, \quad x^m dx = (n+1)^{\frac{m-n}{n+1}} \xi^{\frac{m-n}{n+1}} d\xi,$$

$$x^q dx = (n+1)^{\frac{q-n}{n+1}} \xi^{\frac{q-n}{n+1}} d\xi;$$

ce qui donnera la transformée

---

(*) On aurait pu satisfaire à l'équation $ai^2 + pi + i = 0$, en faisant $i = 0$; mais alors celle $2ai + p = 0$ aurait donné $p = 0$, ce qui aurait réduit la proposée (319) à l'équation $dy = ay^2 + bx^m dx$, qui est celle même du comte Riccati.

$$dy = ay^2 d\xi + b(n+1)^{\frac{m-n}{n+1}} \xi^{\frac{m-n}{n+1}} d\xi + p(n+1)^{\frac{q-n}{n+1}} y \xi^{\frac{q-n}{n+1}} d\xi.$$

Mais afin que cette équation qui est de la forme de celle (319), puisse se ramener à la forme de l'équation du comte Riccati, il faut, d'après ce qui a été démontré dans l'article précédent, que

$$p(n+1)^{\frac{q-n}{n+1}} = -2, \quad \text{et que} \quad \frac{q-n}{n+1} = -1;$$

d'où

$$n = -\frac{(p+2)}{2} \quad \text{et} \quad q = -1.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (323), on aura celle

$$dy = ay^2 x^{-\frac{p+2}{2}} dx + bx^m dx + pyx^{-1} dx \ldots (324),$$

qui se transforme en une équation de la forme de celle du comte Riccati, en faisant

$$\left\{ \frac{dx}{x^{\frac{p+2}{2}}} = d\xi \quad \text{et} \quad y = z + \frac{1}{a\xi} \right\} \ldots (325).$$

355. Lorsque dans une équation séparée

$$d.\mathrm{F}x + d.\mathrm{F}'y + d.\mathrm{F}''z + \text{etc.} = 0 \ldots (a);$$

on pourra intégrer chacune des fonctions différentielles à une seule variable, de manière que leurs intégrales soient toutes transcendantes par les logarithmes, ou toutes transcendantes par les arcs de cercle, il est évident que l'intégrale totale de la proposée ($a$) pourra se mettre sous une forme algébrique car dans le premier cas, soit

$$\int d.\mathrm{F}x = lfx, \int d.\mathrm{F}'y = lf'y, \int d.\mathrm{F}''z = lf''z, \text{ etc.},$$

l'intégrale

l'intégrale de la proposée sera

$l[fxfyfz\ldots] = l\,\text{const.}$ ou $fxfyfz\ldots = \text{const.}$;

et dans le second cas, les intégrations par les arcs de cercle pouvant se ramener aux intégrations par les logarithmes (art. 246 et 247), il n'y aura d'autre inconvénient que d'éliminer dans l'intégrale algébrique affectée de $\sqrt{-1}$, cette quantité imaginaire.

Ire APPLICATION. *Trouver l'intégrale algébrique de l'équation séparée*

$$\frac{mdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \frac{ndy}{\sqrt{(b^2-y^2)}} = 0.$$

On voit tout de suite que l'intégrale par les arcs de cercle de la proposée est

$$m\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) - n\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{b}\right) = \text{const.}[\text{éq.}(134)].$$

Mais si l'on écrit la proposée sous la forme

$$\frac{mdx}{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{-1}} \quad \frac{ndy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{-1}} = 0,$$

ou

$$\frac{mdx}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{ndy}{\sqrt{y^2-a^2}} = 0,$$

on trouvera que son intégrale est

$$ml[x+\sqrt{x^2-a^2}] - nl[y+\sqrt{y^2-b^2}] - lC[\text{éq.}(138)],$$

en représentant par C une constante indéterminée et arbitraire; donc

$$[x+\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{-1}]^m = C[y+\sqrt{(b^2-y^2)}\sqrt{-1}]^n.$$

Développant les puissances respectives $m$ et $n$ des deux binomes, passant dans un seul membre tous les termes affectés de $\sqrt{-1}$, et élevant au quarré, on aura

l'intégrale algébrique de la proposée, et d'un nombre limité de termes, si $m$ et $n$ sont des nombres entiers et positifs.

Lorsque $m = n$, on trouve tout de suite, en représentant toujours par C la racine $m$ de cette constante arbitraire, que l'intégrale de la proposée est

$$a^2 + b^2C^2 - 2Cy = 2C\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}.$$

II° APPLICATION. *Trouver l'intégrale algébrique de l'équation*

$$\frac{dx}{2x\sqrt{ax - a^2}} = \frac{dy}{a^2 + y^2} \cdots\cdots\cdots (b).$$

Faisant

$$ax - a^2 = z^2,$$

d'où $$x = \frac{a^2 + z^2}{a} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2zdz}{a},$$

on a la transformée

$$\frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{dy}{a^2 + y^2},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{a}\left[\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{a}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{a}\right)\right] = \text{const.},$$

ou

$$\frac{1}{a}\,\text{arc}\left[\text{tang} = \frac{a(z - y)}{a^2 + zy}\right] = \text{const.}$$

Multipliant cette équation par $2a\sqrt{-1}$, passant aux logarithmes [équat. (186)], et faisant

$$2a\sqrt{-1} \times \text{const.} = lC,$$

on a

$$l\left[\frac{a^2 + zy + a(z - y)\sqrt{-1}}{a^2 + zy - a(z - y)\sqrt{-1}}\right] = lC,$$

et passant aux quantités algébriques, il vient

$$a(C+1)(z-y)\sqrt{-1}=(C-1)(zy+a^2),$$

ou divisant par $a(C+1)(zy+a^2)\sqrt{-1}$, et faisant pour abréger, $\frac{C-1}{a(C+1)\sqrt{-1}}=\text{const.}$, on a

$$\frac{z-y}{zy+a^2}=\text{const.},$$

et substituant la valeur de $z$, il vient définitivement pour intégrale de la proposée ($b$), l'équation algébrique

$$\frac{\sqrt{ax-a^2}-y}{y\sqrt{ax-a^2}+a^2}=\text{const.}$$

356. Lorsque l'équation différentielle séparée qu'on veut intégrer, a des termes qui ont leurs intégrales logarithmiques affectées de l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et d'autres termes dont les intégrales logarithmiques ne sont pas affectées de cette imaginaire; il est clair que si l'on prend les intégrales par les arcs de cercle de tous les termes de cette équation, celles des premiers termes que nous venons de considérer ne seront pas affectées de l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et les autres le seront [*voyez* les équations (186).....(191)]. Donc il sera impossible de pouvoir obtenir l'intégrale algébrique dépouillée de l'imaginaire $\sqrt{-1}$, d'une pareille équation, car l'on ne pourrait délivrer les termes affectés de $\sqrt{-1}$, qu'en en embarrassant les termes qui n'en étaient pas affectés. Ainsi il vaut mieux dans ce cas-là, se contenter de l'intégrale transcendante, partie par les logarithmes, et partie par les arcs de cercle de l'équation proposée.

Soit, par exemple, demandé l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}} \ldots\ldots\ldots (a).$$

Si l'on voulait l'intégrer entièrement par les logarithmes, on aurait

$$\frac{l\,[x+\sqrt{x^2-a^2}]}{\sqrt{-1}} = l\,[y+\sqrt{a^2+y^2}] + lC,$$

ou

$$[x+\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{-1}]^{-\sqrt{-1}} = Cy + C\sqrt{a^2+y^2},$$

équation qui est réelle, mais qu'on ne pourra jamais mettre sous une forme algébrique dépouillée de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$; ainsi il est préférable, pour intégrer l'équation $(a)$, de prendre l'intégrale par les arcs de cercle de la fonction en $x$, et celle pour les logarithmes de la fonction en $y$, ce qui produira l'équation

$$\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) = l\,[Cy + C\sqrt{a^2+y^2}].$$

Nous verrons au chapitre II de la quatrième section, qu'il existe d'autres équations séparées dont les deux membres ne sont intégrables séparément, ni algébriquement, ni par les arcs de cercle, ni par les logarithmes, et qui cependant, par la combinaison des deux membres, donnent une intégrale algébrique.

# CHAPITRE IV.

*De la méthode générale des facteurs pour intégrer les équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, lorsque ces équations, dans leur état primitif, ne sont pas intégrables.*

357. AINSI que nous l'avons démontré au chapitre II (art. 333, 334 et 335), le polynome égalé à zéro d'une équation différentielle, ne se présente pas ordinairement sous la forme d'une fonction différentielle exacte, parce que très-souvent ce polynome est privé d'un facteur variable qui a disparu dans le passage de l'équation primitive à sa différentielle. Nous avons traité au chapitre III plusieurs équations différentielles qui étaient dans ce cas-là, et par certains artifices qui, pour la plupart, avaient pour objet de séparer les variables, nous sommes parvenus à intégrer ces équations. Mais s'il existait une méthode sûre et qui pût s'appliquer à tous les cas possibles, pour déduire de l'équation différentielle à plusieurs variables qu'on veut intégrer, le facteur par lequel on doit multiplier cette équation, pour que le produit fût une fonction différentielle exacte lorsque la proposée en est susceptible (ce qui n'est pas toujours, ainsi que nous le verrons à l'article 360), cette méthode serait très-précieuse et éviterait les recherches particulières à chaque cas, telles que celles dont nous nous sommes

occupés dans le chapitre précédent (*). Mais malheureusement l'analyse a fait jusqu'à présent bien peu de progrès dans la recherche du facteur qui rend intégrable une équation différentielle susceptible de le devenir. Nous allons examiner quelques-uns des cas des plus simples où l'on peut trouver ce facteur, et nous ferons connaître les relations qui doivent exister entre les coefficiens des équations à plus de deux variables, pour qu'elles soient susceptibles de devenir des différentielles exactes par la multiplication d'un facteur.

358. Soit l'équation différentielle et inexacte

$$Pdx + Qdy = 0 \ldots\ldots (326),$$

dans laquelle P et Q représentent des fonctions quelconques des variables $x$ et $y$, et représentons par $\theta$ le facteur variable qui doit rendre l'équation précédente intégrable, facteur que dorénavant nous appellerons *facteur intégrant*. On aura donc, d'après l'équation de condition (52) [art. 54], celle

$$\frac{d^y(P\theta)}{dy} = \frac{d^x(Q\theta)}{dx},$$

ou développant, il viendra

$$\frac{Pd^y\theta}{dy} - \frac{Qd^x\theta}{dx} = \left(\frac{d^xQ}{dx} - \frac{d^yP}{dy}\right)\theta \ldots\ldots (327),$$

équation dont il est fort difficile de tirer la valeur du facteur $\theta$ lorsqu'il est fonction des deux variables ;

(*) Nous avons déjà trouvé à l'article 341, le facteur $[F(y)]^{\frac{B-A}{A}}$, par lequel il faut multiplier l'équation (296) pour pouvoir l'intégrer.

mais s'il n'est fonction que de l'une des deux variables, par exemple, de celle $x$, alors on déduira aisément de l'équation (327) la valeur de $\theta$, puisqu'on aura

$$d^y\theta = 0, \quad d^x\theta = d\theta,$$

et par conséquent

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{Q}\left[\frac{d^yP}{dy} - \frac{d^xQ}{dx}\right]dx \ldots\ldots (a).$$

Il faut donc pour que $\theta$ ne soit fonction que de la variable $x$, qu'on ait Q dans l'équation proposée (326), ne contenant pas la variable $y$, et $P =$ à une fonction quelconque de $x$, dans laquelle il n'entrera que la première puissance positive de $y$. Ainsi représentant par $X'$ le coefficient de $dx$ dans l'équation $(a)$, on aura

$$\theta = e^{\int X'dx} \ldots\ldots (b),$$

et l'équation (326) étant multipliée par cette valeur de $\theta$, aura son premier membre qui sera une fonction différentielle exacte.

L'équation (298) [art. 342] est dans le cas que nous venons d'examiner; car la comparant avec celle (326), on a

$$P = yX + \xi \quad \text{et} \quad Q = 1,$$

donc

$$X' = \frac{1}{Q}\left[\frac{d^yP}{dy} - \frac{d^xQ}{dx}\right] = X,$$

ce qui réduit l'équation $(b)$ à celle

$$\theta = e^{\int Xdx},$$

et multipliant l'équation (298) par cette valeur de $\theta$,

il vient

$$e^{\int Xdx}dy+yXe^{\int Xdx}dx+\xi e^{\int Xdx}dx=0\ldots.(c),$$

dont le premier membre est une fonction différentielle exacte, car

$$\frac{d^x e^{\int Xdx}}{dx}=e^{\int Xdx}X=\frac{d^y\left[ye^{\int Xdx}X+\xi e^{\int Xdx}\right]}{dy}.$$

Pour intégrer l'équation $(c)$, nous observerons que

$$d.ye^{\int Xdx}=e^{\int Xdx}dy+yXe^{\int Xdx}dx,$$

et substituant dans cette dernière équation la valeur de $e^{\int Xdx}dy$ déduite de celle $(c)$, nous aurons, toutes réductions faites, l'équation

$$d.ye^{\int Xdx}=-\xi e^{\int Xdx}dx,$$

qui, étant intégrée, donne

$$y=e^{-\int Xdx}\left[\text{const.}-\int\xi e^{\int Xdx}dx\right],$$

même intégrale que celle (299) trouvée à l'art. 342.

359. L'exactitude d'une fonction différentielle entre trois variables, peut être vérifiée par les trois équations de condition (53), ou même par une seule équation de condition provenant de la combinaison de ces trois équations. En effet, soit l'équation

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\ldots.(328),$$

dans laquelle P, Q, R sont des fonctions quelconques des trois variables $x$, $y$, $z$; on aura, si le premier membre de cette équation est une fonction différentielle exacte, les trois équations de condition

$$\left\{\frac{d^yP}{dy}=\frac{d^xQ}{dx},\ \frac{d^zP}{dz}=\frac{d^xR}{dx},\ \frac{d^zQ}{dz}=\frac{d^yR}{dy}\right\}\ldots\ldots.(a).$$

Prenant la valeur de $dx$ dans les deux premières équations, égalant ces deux valeurs; ensuite de l'équation résultante tirant la valeur de $\frac{dy}{dz}$, et égalant cette valeur avec celle de $\frac{dy}{dz}$ tirée de la dernière des trois équations en $(a)$; enfin chassant les dénominateurs de l'équation résultante, on a l'équation de condition unique

$$d^y \mathrm{P} d^z \mathrm{Q} d^x \mathrm{R} = d^z \mathrm{P} d^x \mathrm{Q} d^y \mathrm{R} \ldots\ldots\ldots (329).$$

pour vérifier l'exactitude de la fonction différentielle à trois variables $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$ (*). Mais si l'équa-

---

(*) Généralement on peut réduire les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition indiquées à l'article 54, pour vérifier si une fonction différentielle entre $n$ variables est exacte, à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations, c'est-à-dire avec $n-1$ équations de moins. Par exemple, pour vérifier si la fonction différentielle à quatre variables

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}du$$

est exacte, l'article 54 donne les six équations de condition

$$\frac{d^y \mathrm{P}}{dy} = \frac{d^x \mathrm{Q}}{dx}, \quad \frac{d^z \mathrm{P}}{dz} = \frac{d^x \mathrm{R}}{dx}, \quad \frac{d^u \mathrm{P}}{du} = \frac{d^x \mathrm{Q}}{dx},$$

$$\frac{d^z \mathrm{Q}}{dz} = \frac{d^y \mathrm{R}}{dy}, \quad \frac{d^u \mathrm{Q}}{du} = \frac{d^y \mathrm{S}}{dy} \text{ et } \frac{d^u \mathrm{R}}{du} = \frac{d^z \mathrm{S}}{dz}.$$

Divisant la première de ces équations de condition par la seconde, la cinquième par la sixième; prenant dans chacun de ces deux résultats, la valeur de $\frac{dz}{dy}$, égalant ces deux valeurs, et chassant les dénominateurs, on a la première équation du groupe suivant. Divisant la seconde équation par la troisième, la quatrième par la cinquième; prenant dans les deux résultats la valeur de $\frac{du}{dz}$; égalant ces deux valeurs et chassant les dénominateurs, on a la seconde équation du groupe suivant. Enfin faisant changer de place aux deux membres de la première équation, et dans cet

tion (329) n'étant pas satisfaite, la proposée (328) est cependant susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur $\theta$, il existera certaine relation entre les fonctions variables P, Q, R et leurs différentielles partielles que nous allons déterminer.

Si la fonction différentielle

$$\theta P dx + \theta Q dy + \theta R dz$$

est exacte, on doit avoir les équations de condition

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\theta d^y P}{dy} + \frac{P d^y \theta}{dy} &= \frac{\theta d^x Q}{dx} + \frac{Q d^x \theta}{dx} \\
\frac{\theta d^z P}{dz} + \frac{P d^z \theta}{dz} &= \frac{\theta d^x R}{dx} + \frac{R d^x \theta}{dx} \\
\frac{\theta d^z Q}{dz} + \frac{Q d^z \theta}{dz} &= \frac{\theta d^y R}{dy} + \frac{R d^y \theta}{dy}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b)$$

qui sont les développemens des équations $(a)$, après y avoir mis les quantités $\theta P$, $\theta Q$ et $\theta R$ à la place des respectives P, Q et R.

Par le moyen des trois équations $(b)$, éliminant $d^x\theta$, $d^y\theta$, $d^z\theta$, ensuite divisant par $\theta$, on a l'équation de

---

état divisant membre à membre par la quatrième; divisant de même la troisième équation par la sixième, prenant dans les deux résultats la valeur de $\frac{dz}{dx}$, égalant ces deux valeurs et chassant les dénominateurs, on a la troisième équation du groupe

$$\begin{aligned}
d^y P d^u Q d^z R d^z S &= d^z P d^x Q d^u R d^y S, \\
d^z P d^u Q d^y R d^x S &= d^y P d^z Q d^x R d^y S, \\
d^u P d^z Q d^y R d^z S &= d^y P d^z Q d^u R d^y S.
\end{aligned}$$

Telles sont les trois équations de condition qui doivent avoir lieu lorsque la fonction différentielle à quatre variables est exacte. On opérera d'une manière semblable pour les fonctions à 5, 6, etc. variables.

condition

$$R\frac{d^2Q}{dx}-Q\frac{d^2R}{dx}+P\frac{d^2R}{dy}-R\frac{d^2P}{dy}+Q\frac{d^2P}{dz}-P\frac{d^2Q}{dz}=0\ldots(330),$$

qui doit avoir lieu toutes les fois que la proposée à trois variables (328) est susceptible d'exactitude par la multiplication d'un facteur.

360. Donc, 1°. toute équation différentielle à deux variables (326) est susceptible d'être intégrée par la multiplication d'un facteur $\theta$, puisque dans une telle équation on a

$$R=0,\quad dR=0,\quad d^2P=0\quad\text{et}\quad d^2Q=0,$$

ce qui réduit celle (330) à l'équation identique $0=0$.

361. 2°. Toute équation entre trois variables qui ne satisfait pas à celle (330), n'est pas intégrable, et par conséquent paraît au premier abord insignifiante. Cependant M. Monge a démontré dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* (année 1784), qu'une telle équation différentielle entre trois variables qui ne pouvait pas s'intégrer, représentait une infinité de courbes à double courbure jouissant d'une propriété commune. D'ailleurs, nous observerons que dans ces équations non intégrables, celle (330) donne un rapport entre les trois variables, qui, tel qu'il se présente, ou augmenté, ou diminué d'une quantité constante, satisfait souvent à la proposée; telle est, par exemple, l'équation

$$(y-z)\,dz+(z-y)\,dx+(x+a)\,dy=0\ldots\ldots(a),$$

pour laquelle l'équation de condition (330) n'est pas satisfaite, puisqu'elle est dans ce cas-ci

$$z=x+y+a;$$

cependant si l'on substitue cette valeur de $z$ dans la proposée $(a)$, on a l'équation identique $0 = 0$.

Soit encore l'équation

$$\{1+\sqrt[3]{(z-y-x)}[1+a\sqrt[4]{(z-y-x)}-b\sqrt[3]{(z-y-x)}]\}dx$$
$$+[1+x\sqrt[3]{(z-y-x)}]\,dy-dz=0\ldots\ldots\ldots\ldots(b),$$

pour laquelle l'équation (330) devient

$$z=x+y+\left(\frac{3a}{4b}\right)^{12}\ldots\ldots\ldots(c).$$

Ainsi la proposée $(b)$ n'est pas intégrable, elle n'est pas non plus satisfaite en y substituant la valeur de $z$ donnée par l'équation $(c)$; mais si l'on retranche de cette valeur le terme constant, l'équation restante $z=x+y$ satisfait à la proposée.

362. Soit généralement l'équation différentielle

$$Pdx+Qdy+Rdz+Sdu+\text{etc.}=0\ldots\ldots(a)$$

entre un nombre quelconque $m$ de variables. Il est clair que si le polynome différentiel de cette équation étant multiplié par le facteur $\theta$, devient une fonction différentielle exacte, tous les $\frac{m(m-1)}{2}$ binomes $\theta Pdx+\theta Qdy$, $\theta Pdx+\theta Rdz$, etc. qu'on pourra former en combinant de deux à deux les $m$ termes de la proposée $(a)$ multipliée par $\theta$, seront des différentielles exactes, ce qui donne lieu aux $\frac{m(m-1)}{2}$ équations de condition semblables à celles dont il est parlé à l'article 54. Pareillement dans ce même cas, tous les $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ trinomes

$$\{\theta Pdx+\theta Qdy+\theta Rdz,\ \theta Pdx+\theta Qdy+\theta Sdu,\ \text{etc}\}\ldots(b)$$

qu'on peut former en combinant de trois à trois les $m$ termes de la proposée multipliée par $\theta$, seront des différentielles exactes. Donc si la différentielle proposée ($a$) est susceptible d'exactitude, chacun des $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ trinomes ($b$) devra satisfaire à une équation de condition semblable à celle (330) ; d'où il paraît au premier abord que pour une équation differentielle entre $m$ variables, il doit y avoir $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ équations de condition. Mais par le calcul il est aisé de se convaincre que lorsqu'on a calculé $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ de ces équations, les $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}$ autres s'ensuivent immédiatement des premières, et par conséquent sont inutiles à calculer. Ainsi pour une équation à quatre variables, on n'a besoin que de calculer trois équations de condition au lieu de quatre ; pour une équation entre cinq variables, on n'a besoin que de calculer six équations de condition au lieu de dix, et ainsi de suite.

Soit, par exemple, l'équation à quatre variables

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu = 0.$$

Il est clair que si son premier membre est susceptible de devenir une fonction différentielle exacte, en multipliant cette équation par $\theta$, on aura les quatre équations suivantes :

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\ ,\quad Pdx+Rdz+Sdu=0\ ,$$
$$Pdx+Qdy+Sdu=0\ ,\quad Qdy+Rdz+Sdu=0\ ,$$

dont les premiers membres doivent aussi être des fonctions différentielles exactes en les multipliant par le

facteur $\theta$, puisque si la fonction

$$P\theta dx + Q\theta dy + R\theta dz + S\theta du$$

est une différentielle exacte, il faut qu'elle le soit encore en faisant successivement $du$, $dz$, $dy$ et $dx$ égal à zéro. On aura donc, conformément à l'équation de condition (330), les quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&R\frac{d^xQ}{dx} - Q\frac{d^xR}{dx} + P\frac{d^yR}{dy} - R\frac{d^yP}{dy} + Q\frac{d^zP}{dz} - P\frac{d^zQ}{dz} = 0\\
&S\frac{d^xQ}{dx} - Q\frac{d^xS}{dx} + P\frac{d^yS}{dy} - S\frac{d^yP}{dy} + Q\frac{d^uP}{du} - P\frac{d^uQ}{du} = 0\\
&S\frac{d^xR}{dx} - R\frac{d^xS}{dx} + P\frac{d^zS}{dz} - S\frac{d^zP}{dz} + R\frac{d^uP}{du} - P\frac{d^uR}{du} = 0
\end{aligned}\right\}(331).$$

$$S\frac{d^yR}{dy} - R\frac{d^yS}{dy} + Q\frac{d^zS}{dz} - S\frac{d^zQ}{dz} + R\frac{d^uQ}{du} - Q\frac{d^uR}{du} = 0$$

Mais si l'on multiplie la première de ces quatre équations par S, la seconde par R et la troisième par Q ; qu'ensuite on ajoute la première équation résultante avec la troisième résultante ; que de cette somme on retranche la seconde équation résultante, et qu'enfin on divise par P, on aura la dernière des quatre équations précédentes. Donc cette quatrième équation n'étant qu'une suite évidente des trois premières, il n'est nécessaire que de calculer les trois groupées sous le n° 331.

363. Il résulte de ce qui a été démontré précédemment, qu'on peut toujours connaître si une équation différentielle à plus de deux variables est intégrable par la multiplication d'un facteur intégral ; mais cette connaissance en fait sentir plus vivement le regret de ne pouvoir généralement déterminer le facteur en question. Cependant les équations différentielles homo.

gènes entre un nombre quelconque de variables, se soustraient à cette impuissance de l'analyse. En effet, soit l'équation

$$dU' = Pdx + Qdy + Rdz + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (a),$$

que nous supposons homogène et inexacte. Représentons toujours par $\theta$ le facteur intégral dont le produit par la fonction différentielle inexacte $dU'$ doit donner une fonction différentielle homogène et exacte $dU$ ; on aura donc $\theta dU'$ ou

$$\theta Pdx + \theta Qdy + \theta Rdz + \text{etc.} = dU = 0 \ldots\ldots (b).$$

Mais d'après la propriété des équations différentielles démontrée à l'article 56, on a, en représentant par $n$ le degré d'homogénéité de U,

$$\theta Px + \theta Qy + \theta Rz + \text{etc.} = nU \ldots\ldots (c);$$

donc divisant membre à membre l'équation ($b$) par celle ($c$), il viendra

$$\frac{Pdx + Qdy + Rdz + \text{etc.}}{Px + Qy + Rz + \text{etc.}} = \frac{dU}{nU} \ldots\ldots (d).$$

Or, le dernier membre de l'équation ($d$) est une différentielle exacte, puisque son intégrale immédiate est $\frac{1}{n} lU$ ; donc le facteur qui rend la proposée ($a$) une différentielle exacte, est

$$\theta = \frac{1}{Px + Qy + Rz + \text{etc.}} \ldots\ldots (332).$$

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle inexacte et homogène*

$$(yx + y^2)\,dx - (x^2 - yx)\,dy = 0.$$

Nous avons

$$P = yx + y^2, \quad Q = -x^2 + xy,$$

donc

$$Px + Qy = 2y^2x,$$

ainsi le facteur cherché est $\frac{1}{2y^2x}$, ce qui donne l'équation différentielle exacte

$$\frac{dx}{2y} - \frac{xdy}{2y^2} + \frac{dx}{2x} + \frac{dy}{2y} = 0,$$

dont l'intégrale immédiate est

$$\int \frac{xdx}{2y} + \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{dy}{2y} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{x}{y} + lxy = \text{const.}$$

364. La règle précédente est en défaut lorsque le degré $n$ d'homogénéité de l'intégrale cherchée U est nul, puisqu'alors intégrant l'équation ($d$) de l'article précédent, on aurait l'intégrale du premier membre $= \frac{lU}{0} = \infty$. Mais dans ce cas de $n = 0$, on a, en ne considérant d'abord que l'équation à deux variables,

$$Pdx + Qdy = 0 \ldots (a),$$

celle ($c$) de l'article précédent qui donne

$$Px + Qy = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = -P\frac{x}{y} \ldots\ldots (b);$$

ce qui réduit l'équation ($a$) à celle

$$P\left(\frac{ydx - xdy}{y}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad Pyd.\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \ldots (c);$$

donc afin de pouvoir intégrer la proposée lorsque son intégrale

intégrale homogène est d'un degré nul, ce qui est indiqué par l'équation ($b$), il faut multiplier l'équation ($c$) par un facteur $\theta$ qui rende $\theta Py =$ à une fonction de $\frac{x}{y}$.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle inexacte et homogène*

$$(x^2y + y^3)\,dx - (x^3 + xy^2)\,dy = 0.$$

On a

$$P = y(x^2 + y^2), \quad Q = -x(x^2 + y^2);$$

donc

$$Q = -P.\frac{x}{y},$$

ce qui indique d'abord que l'intégrale de la proposée est de degré nul. Il faut donc multiplier la valeur de $Py$, c'est-à-dire $y^2(x^2 + y^2)$ par un facteur $\theta$ qui rende

$$\theta y^2(x^2 + y^2) = f\left(\frac{x}{y}\right);$$

et il est aisé de voir que ce facteur doit être $y^2x^2$; ainsi l'on aura à intégrer l'équation

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

ou

$$d\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 - y^2}{xy} = \text{const.}$$

Considérons maintenant l'équation différentielle inexacte et homogène à trois variables

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \ldots\ldots (d),$$

dans le même cas de $n = 0$, ce qui donnera l'équation

$$Px + Qy + Rz = 0 \ldots\ldots\ldots (e),$$

d'où

$$R = -P\frac{x}{z} - Q\frac{y}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (f);$$

substituant cette valeur dans l'équation $(d)$, elle se réduit à celle

$$P\left(\frac{zdx - xdz}{z}\right) + Q\left(\frac{zdy - ydz}{z}\right) = 0,$$

laquelle étant divisée par $z$ donne l'équation

$$Pd\left(\frac{x}{z}\right) + Qd\left(\frac{y}{z}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (g).$$

Ainsi afin que cette dernière équation, et par conséquent la proposée $(d)$, soit intégrable, il faut multiplier l'équation $(g)$ par un facteur $\theta$ qui rende $\theta P$ fonction de $\frac{x}{z}$ et $\theta Q$ fonction de $\frac{y}{z}$.

Exemple. *Intégrer l'équation*

$$z^2x^2dx + zy^3dy - (zx^3 + y^4)\,dz = 0 \ldots\ldots\ldots (h).$$

Comparant cette équation avec celle $(d)$, on a

$$P = z^2x^2, \quad Q = zy^3, \quad R = -(zx^3 + y^4),$$

donc

$$Px + Qy + Rz = z^2x^3 + zy^4 - z^2x^3 - zy^4 = 0;$$

d'où nous conclurons que l'intégrale de la proposée,

si elle est susceptible d'intégration, est une équation homogène d'un degré nul. Substituant les valeurs de P et de Q dans l'équation (g), on a celle

$$z^2x^2d\left(\frac{x}{z}\right)+zy^3d\left(\frac{y}{z}\right)=0\ldots\ldots(i).$$

Or, $\theta z^2x^2$ ne peut être fonction de $\frac{x}{z}$ qu'en faisant $\theta=\frac{1}{z^4}$, et cette même valeur de $\theta$ rend $\theta zy^3$ fonction de $\frac{y}{z}$; donc la proposée est intégrable, et l'on a l'équation

$$\frac{x^2}{z^2}d\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{y^3}{z^3}d\left(\frac{y}{z}\right)=0;$$

intégrant cette dernière équation, on a pour intégrale exacte de la proposée (h), l'équation

$$\frac{x^3}{3z^3}+\frac{y^4}{4z^4}=\text{const.},\quad\text{ou}\quad\frac{4zx^3+3y^4}{12z^4}=\text{const.}$$

Enfin, ce que nous avons dit précédemment suffit pour voir que généralement dans toute équation différentielle inexacte et homogène entre un nombre quelconque de variables, représentée par

$$Pdx+Qdy+Rdz\ldots\ldots+Tdt=0,$$

dans laquelle on aura

$$Px+Qy+Rz\ldots\ldots+Tt=0\ldots\ldots(k),$$

il faudra, pour que la proposée soit intégrable, qu'on puisse trouver un facteur $\theta$ qui rende en même temps

$$\theta P=f\left(\frac{x}{t}\right),\quad\theta Q=f\left(\frac{y}{t}\right),\quad\theta R=f\left(\frac{z}{t}\right),\text{ etc.}$$

365. Cependant il y a des cas où l'équation ($e$) de l'article précédent étant satisfaite, et la proposée étant susceptible d'une intégration exacte, on ne peut trouver le facteur $\theta$ qui rend en même temps le produit $\theta P$ une fonction de $\frac{x}{z}$, et celui $\theta Q$ une fonction de $\frac{y}{z}$, il faut alors avoir recours à une transformation qui conduit à une équation ne renfermant plus que deux variables qu'on peut séparer si la proposée est susceptible d'intégration ; telle est, par exemple, l'équation

$$(ay-bz)\,dx+(cz-ax)\,dy+(bx-cy)\,dz=0\ldots(a),$$

qui, comparée avec l'équation

$$Pdx+Qdy+Rds=0,$$

donne

$$P=ay-bz,\quad Q=cz-ax\quad\text{et}\quad R=bx-cy,$$

d'où

$$Px+Qy+Rz=ayx-bzx+czy-axy+bxz-cyz=0;$$

il faudrait donc, suivant la règle précédente, trouver un facteur $\theta$ qui rendît en même temps

$$\theta\,(ay-bz)=f\frac{x}{z}\quad\text{et}\quad\theta\,(cz-ax)=f\frac{y}{z},$$

ce qui est impossible : mais faisant

$$\{y=rx\quad\text{et}\quad z=ux\}\ldots.(b),$$

d'où

$$dy=rdx+xdr\quad\text{et}\quad dz=udx+xdu,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation ($a$), on aura, toutes réductions faites, l'équation

$$(cu-a)\,dr=(cr-b)\,du,$$

d'où l'on tire celle séparée

$$\frac{dr}{cr-b}=\frac{du}{cu-a},$$

dont l'intégrale est

$$l\left[\frac{cr-b}{cu-a}\right]=l.\text{const.};$$

ou passant des logarithmes aux quantités algébriques, et substituant les valeurs de $r$ et de $u$ déduites des équations $(b)$, on a pour intégrale de la proposée $(a)$,

$$\frac{cy-bx}{cz-ax}=\text{const.}$$

On opérerait d'une manière semblable pour les équations homogènes à un nombre quelconque de variables qui satisferaient à l'équation $(k)$ de l'article (364), si l'on avait trop de peines à trouver le facteur intégral $\theta$ qu'exige la méthode de l'article 364, et l'on n'aurait plus, comme par cette dernière méthode où le nombre $n$ de variables $x, y, z \ldots s, t$ se réduisent aux $n-1$ variables $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t} \ldots \frac{s}{t}$, qu'à intégrer une équation qui renfermerait une variable de moins.

366. Lorsque dans l'équation différentielle et homogène qu'on veut intégrer, celle $(k)$ de l'article 364 n'est pas satisfaite, alors le facteur intégral $\theta$ [éq. (332)] est toujours connu. Mais il est souvent plus commode pour opérer cette intégration, de se servir d'un procédé semblable à celui de l'article 365, lequel conduit, dans ce cas, à la transformation de l'équation qu'on veut intégrer en une autre, dans laquelle il ne reste, comme à l'article 339 relativement aux équations homogènes à deux variables, que l'une des anciennes variables

isolée dans un seul membre avec sa différentielle ; de manière que l'on n'a plus qu'à intégrer une fonction différentielle renfermant une variable de moins que la proposée. Par exemple, soit proposé d'intégrer l'équation différentielle inexacte et homogène

$$(y^2+yz+z^2)\,dx+(x^2+xz+z^2)\,dy \\ +(x^2+xy+y^2)\,dz=0\ldots(a).$$

Il est évident d'après ce que nous avons démontré à l'article 363, que pour rendre cette équation une différentielle exacte, il faudrait la diviser par la quantité

$$(y^2+yz+z^2)\,x+(x^2+xz+z^2)\,y+(x^2+xy+y^2)\,z;$$

mais il est beaucoup plus commode pour opérer l'intégration de la proposée, de se servir de la méthode que nous venons d'indiquer. Soit donc fait

$$y=rx \quad \text{et} \quad z=ux,$$

d'où

$$dy=rdx+xdr \quad \text{et} \quad dz=udx+xdu.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ($a$), on a, toutes réductions faites,

$$\frac{dx}{x}=\frac{du+dr}{u+r+1}-\frac{rdu+udr+du+dr}{ur+u+r},$$

dont l'intégrale est

$$lx=l(u+r+1)-l(ur+u+r)+l.\text{const.};$$

donc mettant à la place de $r$ et de $u$ leurs valeurs respectives $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$, et passant des logarithmes aux expressions algébriques, il vient

$$\frac{yz+xz+yx}{y+x+z}=\text{const.},$$

ce qui est l'intégrale de l'équation ($a$).

367. Il est évident, d'après ce qui a été démontré à l'article 363, qu'on trouvera aisément le facteur $\theta$ de toute équation différentielle qui pourra se transformer en une homogène, puisque le facteur (332) de cette transformée étant connu, il n'y aura qu'à y substituer les valeurs des nouvelles variables en anciennes. Par exemple, l'équation (293) [art. 340] se transforme en l'homogène (289) [art. 339]; or, le facteur qui rend cette dernière équation une différentielle exacte, est

$$\frac{1}{ax^2+(b+e)xy+gy^2};$$

donc mettant pour abréger $\omega$ et $\delta$ à la place des valeurs déterminées de ces quantités [équat. ($b$), art. 340], et faisant attention que des équations ($a$) du même article 340, on tire

$$x=x'-\omega \quad \text{et} \quad y=y'-\delta,$$

on aura pour facteur intégral de l'équation (293) la quantité

$$\frac{1}{a(x'-\omega)^2+(b+e)(x'-\omega)(y'-\delta)+g(y'-\delta)^2}.$$

368. Nous ne nous arrêterons pas plus long-temps sur la recherche des facteurs intégraux des équations différentielles inexactes à plus de deux variables; car cette recherche offre presque toujours des difficultés insurmontables, ce qui paraît étonnant lorsqu'on fait attention que toute équation différentielle inexacte, susceptible de devenir exacte par la multiplication d'un facteur intégral, peut encore devenir exacte par la multiplication d'un nombre infini d'autres facteurs intégraux qui résultent du produit d'un seul de ces facteurs par une fonction quelconque de l'intégrale de

la proposée. En effet, soit supposé que

$$Pdx + Qdy + Rdz + \text{etc.}$$

étant une fonction differentielle inexacte, le facteur $\theta$ la rende exacte, et que conséquemment $dU$ représentant la différentielle exacte d'une fonction U des variables $x$, $y$, $z$...., on ait

$$\theta Pdx + \theta Qdy + \theta Rdz + \text{etc.} = dU \ldots\ldots (a).$$

Il est clair que si l'on multiplie les deux membres de cette dernière équation par une fonction de U que je représente par F (U), de sorte que le second membre de l'équation

$$\theta F(U) Pdx + \theta F(U) Qdy + \theta F(U) Rdz + \text{etc.} = F(U)\, dU$$

soit une différentielle exacte; le premier membre de cette équation sera une fonction différentielle exacte; et à cause que F (U) peut avoir un nombre infini de valeurs differentes, qui rendront F (U) $dU$ une différentielle exacte, il s'ensuit que si un seul facteur $\theta$ est susceptible de rendre exacte une fonction différentielle, il y en a un nombre infini d'autres $\theta F(U)$ qui opéreront le même effet.

---

# CHAPITRE V.

## *De la méthode inverse des facteurs.*

369. Toute équation différentielle à deux variables étant susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur $\theta$ (art. 360), et cependant l'analyse étant presque toujours insuffisante pour trou-

ver ce facteur, nous allons prendre une marche inverse de celle que nous avons prise dans le chapitre précédent, c'est-à-dire qu'au lieu de chercher directement le facteur qui rend intégrable une équation différentielle, nous allons chercher la relation qui doit exister entre les coefficiens variables des différentielles d'une équation donnée de forme seulement, pour qu'un facteur donné aussi de forme seulement, rende l'équation intégrable. C'est dans ces recherches qui servent à trouver les facteurs propres à rendre intégrables un nombre infini d'équations différentielles à deux variables, que consiste la méthode inverse des facteurs dont nous allons nous occuper.

370. PROBLÈME I. *Trouver la relation qui doit exister entre les fonctions indéterminées $X$, $X'$ de* x *qui entrent dans l'équation*

$$Xydx + X'dx + ydy = 0 \ldots\ldots (333),$$

*et celles* $\xi$, $\xi' \ldots \xi^{(m-2)}$ *de même nature qui entrent dans l'expression du facteur*

$$\theta = \frac{1}{[y^m + f(x)y^{m-1} + \xi y^{m-2} + \xi' y^{m-3} \ldots + \xi^{(m-2)'}]^n} \ldots (334).$$

*pour que l'équation* (333) *soit intégrable en la multipliant par le facteur* $\theta$.

SOLUTION. Comparant l'équation (333) avec la générale

$$Pdx + Qdy = 0,$$

on a

$$P = Xy + X' \quad \text{et} \quad Q = y,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (327) (art. 358), il vient

$$(Xy + X')\frac{d^y\theta}{dy} - y\frac{d^x\theta}{dx} = -X\theta \ldots\ldots (335).$$

Substituant dans cette dernière équation les valeurs de $d^y\theta$, $d^x\theta$ et $\theta$ que donne l'équation (334), et faisant

$$d.f(x)=f'(x)\,dx,\quad d\xi=\xi_1 dx,$$
$$d\xi'=\xi'_1 dx,\quad d\xi''=\xi''_1 x dx,\quad \text{etc.},$$

il viendra une équation complète du degré $m$ par rapport à la variable $y$ qui, devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, ne pourra généralement être satisfaite qu'en faisant chacun des coefficiens égal à zéro, ce qui donnera un nombre $m+1$ d'équations par le moyen desquelles on cherchera à déterminer les valeurs des $m+1$ indéterminées X, X', $\xi_1$, $\xi'_1$, $\xi''_1$, etc., et substituant convenablement ces valeurs dans les deux équations (333) et (334), on aura satisfait à la solution du problème proposé.

Nous allons, pour éclaircir cette théorie, en faire quelques applications.

I°. Proposons-nous d'abord de trouver les valeurs des quantités indéterminées X et X' de l'équation (333), pour qu'elle devienne intégrable en la divisant par $[y+f(x)]^n$.

Faisant $\theta=\frac{1}{[y+f(x)]^n}$, on a

$$\frac{d^y\theta}{dy}=\frac{-n}{[y+f(x)]^{n+1}};$$

et

$$\frac{d^x\theta}{dx}=\frac{-n\,df(x)}{[y+f(x)]^{n+1}dx}=\frac{-n\,f'(x)}{[y+f(x)]^{n+1}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (335), on a celle

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)\mathrm{X}\\ -nf'(x)\end{array}\right\}\begin{array}{l}y+n\mathrm{X}'\\ -f(x)\,\mathrm{X}\end{array}=0$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, donne les deux équations

$$\{(n-1)X-nf'(x)=0 \text{ et } nX'-f(x)X=0\}\ldots(a),$$

d'où l'on tire

$$X=\frac{nf'(x)}{n-1}=\frac{ndf(x)}{(n-1)dx}\ldots\ldots(b),$$

et

$$X'=\frac{f(x)f'(x)}{n-1}=\frac{f(x)df(x)}{(n-1)dx}\ldots\ldots(c).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (333), il vient celle

$$\frac{nydf(x)}{n-1}+\frac{f(x)df(x)}{n-1}+ydy=0\ldots\ldots(336),$$

qui n'est pas immédiatement intégrable, mais qui le devient en la divisant par la quantité

$$[y+f(x)]^n\ldots\ldots(337)[*].$$

Soit, par exemple,

$$f(x)=x \quad \text{et} \quad n=2,$$

alors on aura l'équation différentielle non intégrable

$$2ydx+xdx+ydy=0,$$

qui le devient en la divisant par $(y+x)^2$ [**], et

---

[*] L'équation (336) étant homogène, pourrait encore se rendre exacte en la divisant par la quantité

$$\frac{n}{n-1}yf(x)+\frac{[f(x)]^2}{n-1}+y^2 \text{ (art. 363).}$$

[**] Ce diviseur est identique avec celui dont nous avons parlé dans le renvoi précédent, en y faisant

$$n=2 \quad \text{et} \quad f(x)=x.$$

il est aisé de voir qu'effectuant l'intégration, on a

$$\int\left[\frac{2ydx+xdx+ydy}{(y+x)^2}=0\right]=\left[\int^y\frac{ydy}{(y+x)^2}=0\right]$$
$$=\left[\frac{x}{y+x}+l(y+x)=\text{const.}\right].$$

Si l'on fait $n=1$, l'équation $(b)$ donne

$df(x)=0$, d'où $f(x)=$ à une constante $c$ (*);

et substituant ces valeurs dans la seconde des deux équations $(a)$, il vient celle

$$X'=cX;$$

donc l'équation différentielle inexacte

$$Xydx+cXdx+ydy=0\ldots\ldots(\delta)$$

étant divisée par $y+c$ donnera la différentielle exacte et séparée

$$Xdx+\frac{ydy}{y+c}=0,\ldots\ldots(\omega),$$

dont l'intégrale est

$$\int Xdx+y-cl(y+c)=\text{const.}\ldots\ldots(\lambda).$$

II°. Trouver la relation qui doit exister entre $X$, $X'$ et $\xi$ pour que les équations de la forme de celle (333) deviennent intégrables en les multipliant par le facteur

$$\theta=\frac{1}{(y^2+f(x)y+\xi)^n}.$$

Faisant

$$df(x)=f'(x)dx \quad \text{et} \quad d\xi=\xi_1 dx,$$

(*) Il ne faut pas considérer cette constante $c$ comme une quantité constante arbitraire; c'est une quantité constante quelconque et déterminée qui entre dans $X'$, et par suite dans les équations $(\delta)$, $(\omega)$; et la constante arbitraire de l'intégrale de cette dernière équation est ce que nous représentons dans l'équation $(\lambda)$ par *const.*

on aura

$$\frac{d^x\theta}{dx} = \frac{-n[yf'(x)+\xi_1]}{[y^2+f(x)y+\xi]^{n+1}},$$

et

$$\frac{d^y\theta}{dy} = \frac{-n[2y+f(x)]}{[y^2+f(x)y+\xi]^{n+1}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (335) et ordonnant par rapport aux puissances de $y$, on aura l'équation

$$\left.\begin{matrix}(2n-1)X\\ -nf'(x)\end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix}(n-1)Xf(x)\\ +2nX'\\ -n\xi_1\end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix}nX'f(x)\\ -X\xi\end{matrix}\right. = 0 \ldots (d),$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, ne peut être généralement satisfaite qu'en faisant chaque coefficient égal à zéro, ce qui donne les trois équations

$$X = \frac{n}{2n-1}f'(x) \ldots\ldots\ldots (e),$$

$$(n-1)Xf(x) + 2nX' = n\xi_1,$$

$$X' = \frac{X\xi}{nf(x)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f),$$

par le moyen desquelles éliminant X et X', et substituant respectivement aux quantités $f'(x)$ et $\xi_1$ celles $\frac{df(x)}{dx}$ et $\frac{d\xi}{dx}$, on parvient à l'équation

$$f(x)\,d\xi - \frac{2^2 df(x)}{2n-1} - \frac{n-1}{2n-1}[f(x)]^2 df(x) = 0 \ldots (g),$$

qui est de la même forme que celle (296) [ art. 341 ], et dont conséquemment on trouvera par le moyen de la formule (297), que l'intégrale est

$$[f(x)]^{\frac{-2}{2n-1}}\xi - \tfrac{1}{4}[f(x)]^{\frac{4(n-1)}{2n-1}} = c,$$

en représentant par $c$ une constante. Prenant dans

cette dernière équation la valeur de $\xi$, on a

$$\xi = \tfrac{1}{4}[f(x)]^2 + c[f(x)]^{\frac{2}{2n-1}} \ldots\ldots (h).$$

Substituant cette valeur de $\xi$, ainsi que celle de X [équat. ($e$)] dans l'équation ($f$) ; ensuite substituant les valeurs de X et de X′ dans l'équation (333), et celle de $\xi$ [équat. ($h$)] dans le facteur $\theta$, on aura l'équation différentielle inexacte

$$\frac{nydf(x)}{2n-1} + \frac{f(x)df(x)}{4(2n-1)} + \frac{c[f(x)]^{\frac{3-2n}{2n-1}}df(x)}{2n-1} + ydy = 0 \ldots\ldots\ldots (338),$$

qui se rendra exacte en la divisant par la quantité

$$\{y^2 + f(x)y + \tfrac{1}{4}[f(x)]^2 + c[f(x)]^{\frac{2}{2n-1}}\}^n \ldots (339).$$

Cette solution ne satisfait pas au cas où $n = \frac{1}{2}$; mais alors l'équation ($d$) se réduit à celle

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}f'(x)y^2 + \tfrac{1}{2}Xf(x) \\ \quad -X' \\ \quad +\tfrac{1}{2}\xi_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - \tfrac{1}{2}X'f(x) = 0 \ldots (i), \\ \quad + X\xi \end{array}$$

d'où

$$f'(x)\left[=\frac{df(x)}{dx}\right] = 0,$$

ce qui donne

$$f(x) = c,$$

en représentant toujours par $c$ une constante. Les autres coefficiens de l'équation ($i$) étant égalés à zéro, mettant à la place de $\xi_1$ sa valeur $\frac{d\xi}{dx}$, et par le moyen des deux équations résultantes, prenant les valeurs de X et de X′, on a

$$X = \frac{cd\xi}{(4\xi - c^2)\,dx} \quad \text{et} \quad X' = \frac{2\xi d\xi}{(4\xi - c^2)\,dx}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (333) et dans le facteur (334), on a l'équation différentielle inexacte

$$\frac{(cy+2\xi)\,d\xi}{4\xi-c^2}+ydy=0\ldots.(340),$$

qu'on rendra exacte en la divisant par

$$\sqrt{y^2+cy+\xi}\ldots\ldots(341).$$

Pour intégrer l'équation différentielle inexacte

$$\frac{(cy+2\xi)\,d\xi}{(4\xi-c^2)\sqrt{y^2+cy+\xi}}+\frac{ydy}{\sqrt{y^2+cy+\xi}}=0\ldots.(342),$$

commençons par intégrer partiellement le dernier terme par rapport à $y$, ce qui nous donnera, d'après la méthode enseignée à l'article 249,

$$\int^y\frac{ydy}{\sqrt{y^2+cy+\xi}}=\sqrt{y^2+cy+\xi}$$
$$-\tfrac{1}{2}cl\left[y+\tfrac{1}{2}c+\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]\ldots\ldots\ldots(k).$$

Or, il est clair que l'intégrale de l'équation (342) ne peut différer de celle ($k$) que d'une fonction de $x$; cela posé, différentiant l'intégrale précédente par rapport à $y$ et $\xi$, ce qui donne pour sa différentielle complète

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+cy+\xi}}+\frac{\left[y+\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]d\xi}{\sqrt{y^2+cy+\xi}\left[2y+c+2\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]};$$

ensuite retranchant cette différentielle de celle (342), et réduisant au même dénominateur, on a la fraction

$$\frac{\left[2(y^2+cy+\xi)+\left[c+2y\right]\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]cd\xi}{4\left[\xi-c^2\right]\left[2y+c+2\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]\sqrt{y^2+cy+\xi}}$$

qui réduite à sa plus simple expression en divisant ces deux termes par

$$\left[2y+c+2\sqrt{y^2+cy+\xi}\right]\sqrt{y^2+cy+\xi},$$

devient

$$\frac{c\,d\xi}{4(\xi - c^2)};$$

or l'intégrale de cette dernière fraction est

$$\frac{c}{4}\,l(\xi - c^2);$$

donc ajoutant cette quantité avec l'intégrale $(k)$, on aura complètement

$$\int[\text{équat. } (342)] = \left\{\sqrt{y^2 + cy + \xi}\right.$$

$$\left. + \frac{c}{2}\,l\left[\frac{\sqrt{\xi - c^2}}{y + \frac{1}{2}c + \sqrt{y^2 + cy + \xi}}\right] = \text{const.}\right\} \ldots (343).$$

Si $n = 1$, alors l'équation (338) se réduit à celle homogène

$$y\,df(x) + \frac{(4c+1)}{4} f(x)\,df(x) + y\,dy = 0 \ldots (l),$$

et la quantité (339) par laquelle on doit la diviser pour la rendre une différentielle exacte devient

$$y^2 + yf(x) + \frac{1+4c}{4}[f(x)]^2,$$

ce qui est conforme à ce que nous avons démontré à l'article 363.

Si nous poursuivions nos recherches sur le même sujet, c'est-à-dire, si nous nous proposions en troisième lieu de trouver les relations qui doivent exister entre X, X', $\xi$ et $\xi'$ pour que les équations différentielles inexactes de la forme de celle (333), pussent devenir exactes en les divisant par une quantité de la forme

$$(y^3 + f(x)\,y^2 + \xi y + \xi')^n,$$

il

il faudrait, pour déterminer $\xi$ et $\xi'$, intégrer des équations différentielles du second ordre dont nous n'avons pas encore parlé, et qui d'ailleurs sont généralement très-difficiles à intégrer.

Il est à propos d'observer que si l'on change seulement les signes de $n$ dans les résultats précédens, on satisfera de même à la solution du problème dont la condition est que le facteur soit de la forme

$$[y^m+f(x)y^{m-1}+\xi y^{m-2}+\xi' y^{m-3}\ldots+\xi^{(m-2)}]^n\ldots(344).$$

On trouvera, par exemple, que l'équation différentielle inexacte

$$\frac{nydf(x)}{2n+1}-\frac{f(x)df(x)}{4(2n+1)}-\frac{c[f(x)]^{-\frac{3+2n}{2n+1}}df(x)}{2n+1}$$
$$+ydy=0\ldots\ldots\ldots\ldots(345)$$

devient exacte en la multipliant par

$$\left\{y^2+f(x)y+\tfrac{1}{4}[f(x)]^2+c[f(x)]^{\frac{2}{2n-1}}\right\}^n\ldots\ldots(346).$$

371. Problème II. *Déterminer la relation qui doit exister entre X et X′ pour que les trois équations différentielles inexactes*

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ldots\ldots Xydx+X'dx+ydy=0\\(b)\ldots\ldots Xydx+X'dy+ydy=0\\(c)\ldots\ldots Xydx+X'dy+xdx=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(347)$$

*deviennent exactes en les multipliant par le facteur*

$$\theta=(x+y)^n\ldots\ldots(348).$$

Solution. I°. Comparant l'équation ($a$) avec celle

$$Pdx+Qdy=0\ldots\ldots(d)\ [\text{équat. (326), art. 358}],$$

on a

$$P=Xy+X' \quad \text{et} \quad Q=y;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^y P}{dy} = X \quad \text{et} \quad \frac{d^x Q}{dx} = 0 :$$

de plus, on a

$$\frac{d^x \theta}{dx} = \frac{d^y \theta}{dy} = n\,(x+y)^{n-1};$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation (327) [art. 358], on aura, toutes réductions faites, l'équation

$$[(n+1)X - n]\,y + nX' + Xx = 0,$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, ne sera généralement satisfaite qu'en faisant

$$(n+1)X - n = 0 \quad \text{et} \quad nX' + Xx = 0;$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad X' = -\frac{x}{n+1}.$$

Ainsi substituant ces valeurs dans l'équation ($a$), on aura l'équation différentielle inexacte

$$\frac{(ny - x)\,dx}{n+1} + y\,dy = 0 \ldots\ldots (349),$$

qui deviendra exacte en la multipliant par $(x+y)^n$.

Effectuant la multiplication, et observant qu'alors le premier membre de l'équation (349) est une fonction différentielle exacte, on aura d'après la méthode enseignée à l'article 323,

$$\int [\text{équat. } (349)] = \int^y [y\,dy\,(x+y)^n = 0]$$
$$= \left[\frac{(x+y)^{n+1}[(n+1)\,y - x]}{(n+1)(n+2)} = \text{const.}\right] \ldots (350)[*].$$

---

[*] Il est à propos de faire ici une observation qui vient à l'appui de ce qui a été déjà dit à l'article 368.

L'équation (349) étant homogène, pourra encore se rendre une

Si l'exposant $n$ du facteur (348) était négatif, alors à la place de l'équation (349), on aurait celle

$$\frac{ny+x}{n-1}dx+ydy=0\ldots\ldots(351),$$

qui deviendrait une différentielle exacte en la divisant par $(x+y)^n$, et il est aisé de trouver, toujours d'après la méthode de l'article (323), que

$$\int[\text{équat. }(351)]=\int^y\left[\frac{ydy}{(x+y)^n}=0\right]$$
$$=\left[\frac{x}{(n-1)(y+x)^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(y+x)^{n-2}}=\text{const}\right]\ldots(352).$$

La solution précédente échappe au cas où $n=-1$; mais il est aisé de voir que pour cette valeur de $n$, l'équation (349), ainsi que celle ($a$) du groupe (347), se réduisent à l'équation

$$ydy=0,$$

qui est immédiatement intégrable sans le secours de facteur. Donc toute équation de la forme de celle ($a$), dans laquelle les fonctions X et X′ de $x$ ne sont pas des quantités nulles, ne peut s'intégrer en la divisant par $x+y$. La même solution (352) échappe encore au cas de $n=-2$ dans l'équation (349), ou $n=2$,

---

différentielle exacte en la divisant par

$$\frac{(ny-x)x}{n+1}+y^2 \text{ (art. 363)},$$

c'est-à-dire en la multipliant par

$$\frac{n+1}{(y+x)(ny+y-x)},$$

qui est le produit du premier facteur $(y+x)^n$ multiplié par la $(n+2)^{me}$ partie de l'unité divisée par l'intégrale de l'équation (347).

dans l'équation (351), parce qu'alors il y a des logarithmes dans l'intégrale. En effet, il est aisé de voir que

$$\int^y \left[\frac{ydy}{(x+y)^2}=0\right]=\left[l(x+y)+\frac{x}{x+y}=\text{const}\right],$$

ce qui, conséquemment, est l'intégrale de l'équation

$$(2y+x)\,dx+ydy=0.$$

II°. L'équation ($b$) comparée avec celle ($d$) donne

$$P=Xy \quad \text{et} \quad Q=X'+y,$$

d'où

$$\frac{d^yP}{dy}=X \quad \text{et} \quad \frac{d^xQ}{dx}=\frac{dX'}{dx}.$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle $n\,(x+y)^{n-1}$ de $\frac{d^x\theta}{dx}$ et de $\frac{d^y\theta}{dy}$ dans l'équation (327) [art. 358], on a celle

$$\left[(n+1)X-\frac{dX'}{dx}-n\right]y-\left[nX'+\frac{dX'}{dx}-Xx\right]=0,$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, sera généralement satisfaite en posant les équations

$$(n+1)\,X-\frac{dX'}{dx}-n=0\ldots\ldots(e)$$

et $$nX'+\frac{dX'}{dx}-Xx=0\ldots\ldots\ldots(f),$$

par le moyen desquelles éliminant X et multipliant la résultante par $dx$, il vient l'équation différentielle

$$xdX'+(n+1)\,X'dx=xdx,$$

qui est de la même forme que celle (296) [art, 341], et dont conséquemment l'intégrale donnée par l'équa-

tion (297) du même article, est

$$X' = \frac{c + x^{n+2}}{(n+2)\,x^{n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (g),$$

en représentant par c une constante. Mais éliminant $\frac{dX'}{dx}$ entre les deux équations ($e$) et ($f$), on a celle

$$X = \frac{x - X'}{x},$$

et y substituant la valeur de $X'$ [équat. ($g$)], il vient

$$X = \frac{n+1}{n+2} - \frac{c}{(n+2)\,x^{n+2}}.$$

Enfin mettant cette valeur de X et celle de $X'$ [équat. ($g$)] dans l'équation ($b$), on a celle différentielle inexacte

$$\left(n + 1 - \frac{c}{x^{n+1}}\right)\frac{ydx}{n+2}$$
$$+ \left(\frac{c}{(n+2)\,x^{n+1}} + \frac{x}{n+2} + y\right)dy = 0 \ldots\ldots (353),$$

qui devient exacte en la multipliant par $(x+y)^n$; et prenant l'intégrale par rapport à $y$ seul des trois derniers termes de l'équation (353) multipliée par $(x+y)^n$, ce qui donne l'intégrale entière de cette équation, puisqu'après sa multiplication par $(x+y)^n$, son premier membre est une fonction différentielle exacte (art. 323), on aura

$$\int [\text{équat. } (353)] = \frac{c + x^{n+2}}{(n+2)\,x^{n+1}} \int^y dy\,(x+y)^n$$
$$+ \int^y y dy\,(x+y)^n = \text{const.},$$

et effectuant les intégrations, il vient

$$\int[\text{équat. } (353)] =$$

$$= \left\{(x+y)^{n+1}\left[(n+1)y + \frac{c}{x^{n+1}}\right] = \text{const.}\right\} \ldots (354).$$

Si $n$ est négatif, alors on a l'équation inexacte

$$\frac{n-1}{n-2}ydx + \frac{cyx^{n-2}dx}{n-2} - \frac{cx^{n-1}dy}{n-2}$$

$$-\frac{xdy}{n-2} + ydy = 0 \ldots\ldots (355),$$

qui devient exacte en la divisant par $(x+y)^n$, et intégrant comme nous l'avons fait pour l'équation (353) d'après la règle prescrite à l'article 323, on a

$$\int[(\text{éq. } (355)] = \left[\frac{cx^{n-1} - (n-1)y}{(x+y)^{n-1}} = \text{const.}\right] \ldots (356).$$

Si $n = -1$, alors substituant cette valeur de $n$ dans l'équation (353), ou plus simplement faisant $n = 1$ dans l'équation (355), on a l'équation différentielle inexacte

$$\frac{-cydx}{x} + (x+c)\,dy + ydy = 0 \ldots\ldots (357),$$

qui divisée par $y+x$ est exacte, et l'on trouve

$$\int[\text{ éq. } (357)] = \left[cl\left(\frac{y+x}{x}\right) + y = \text{const.}\right] \ldots (358).$$

Si $n = -2$, alors faisant dans l'équation (355) $n=2$, le dernier terme $ydy$ disparaît, et il reste l'équation différentielle homogène inexacte

$$ydx + cydx - cxdy - xdy = 0 \ldots\ldots (h),$$

qui divisée par $(y+x)^2$ devient exacte, et alors son

intégrale est

$$\frac{(c+1)y}{y+x} = \text{const.}\ (*).$$

III°. Pour la troisième équation ($c$) du groupe (347), on a

$$P = Xy + x \quad \text{et} \quad Q = X',$$

d'où

$$\frac{d^y P}{dx} = X \quad \text{et} \quad \frac{d^x Q}{dx} = \frac{dX'}{dx};$$

ainsi faisant les substitutions convenables dans l'équation (327) [art. 358], on a celle

$$\left[(n+1)X - \frac{dX'}{dx}\right]y + nx - nX' - \frac{dX'}{dx}x + Xx = 0,$$

qui devant être satisfaite indépendamment des valeurs de $y$, donne les deux équations

$$(n+1)X - \frac{dX'}{dx} = 0 \ldots\ldots (i)$$

et $$nx - nX' - \frac{dX'}{dx}x + Xx = 0 \ldots\ldots (k),$$

---

(*) Ce résultat est conforme à ce qui a été dit à l'article 364. En effet, on a dans l'équation ($h$) celle $Q = -P\frac{x}{y}$ qui est satisfaite; il faut donc multiplier l'équation ($h$) par un facteur qui rende $\theta Py$ ou $\theta(1+c)y^2$ une fonction de $\frac{x}{y}$, ce qui aura lieu en faisant

$$\theta = \frac{1}{y^2\left(1+\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{(y+x)^2},$$

puisqu'alors on aura

$$\theta(1+c)y^2 = \frac{1+c}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2}.$$

d'où éliminant X, il vient l'équation différentielle

$$xdX' + (n+1)X'dx = (n-1)xdx,$$

qui est de la même forme que celle (296) [art. 341], et dont conséquemment l'intégrale donnée par l'équation (297) [art. 341] est

$$x^{n+1}X' - \frac{n+1}{n+2}x^{n+2} = c \ldots\ldots (l)$$

Mais éliminant $\frac{dX'}{dx}$ entre les deux équations ($i$) et ($k$), il vient

$$X = 1 - \frac{X'}{x},$$

et substituant dans cette dernière équation la valeur de X′ déduite de l'équation ($c$), on a celle

$$X = \frac{1}{n+2} - \frac{c}{x^{n+2}} \ldots\ldots (m).$$

Enfin mettant cette valeur ainsi que celle de X′ [équat. ($l$)] dans l'équation ($c$), on a celle différentielle inexacte

$$\left[\frac{y}{n+2} - \frac{cy}{x^{n+2}} + x\right]dx$$
$$+\left[\frac{n+1}{n+2}x + \frac{c}{x^{n+1}}\right]dy = 0 \ldots\ldots (359),$$

qu'on rendra exacte en la multipliant par $(x+y)^n$. Ainsi on aura, d'après la règle de l'article (323),

$$\int [\text{équat. } (359)] =$$
$$= \left\{\left[\frac{n+1}{n+2}x + \frac{c}{x^{n+1}}\right]\int^y (x+y)^n dy = \text{const.}\right\},$$

et effectuant l'intégration, il vient

$$\int [\text{équat. } (359)] =$$
$$= \left[\left(\frac{n+1}{n+2}x + \frac{c}{x^{n+1}}\right)\frac{(x+y)^{n+1}}{n+1} = \text{const.}\right] \ldots (360).$$

Si $n$ est négatif, alors l'équation (359) se réduit à celle différentielle inexacte

$$\left[\frac{y}{n-2} + cx^{n-2}y - x\right]dx$$
$$-\left[\frac{n-1}{n-2}x + cx^{n-1}\right]dy = 0 \ldots (361),$$

qui devient exacte en la divisant par $(x+y)^n$, et intégrant à l'ordinaire suivant la règle de l'article 323, on a

$$\int[\text{équat. } (361)] =$$
$$\left[\left(\frac{n-1}{n-2}x + cx^{n-1}\right)\frac{1}{(n-1)(x+y)^{n-1}} = \text{const.}\right] \ldots (362).$$

Dans le cas de $n = -1$ pour l'équation (359), ou de $n = 1$ pour celle (361), on a les intégrales respectives (360) et (362) de ces équations qui sont insignifiantes. Mais substituant cette valeur de $n = -1$ dans l'équation (359), ou plutôt celle de $n = 1$ dans l'équation (361), on a celle inexacte

$$\left(y - \frac{cy}{x} + x\right)dx + cdy = 0 \ldots\ldots (363),$$

qu'on rendra exacte en la divisant par $y + x$; ainsi on aura à intégrer l'équation différentielle exacte

$$dx - \frac{cydx}{x(x+y)} + \frac{cdy}{x+y} = 0,$$

ou

$$dx + c\left[\frac{xdy - ydx}{x^2} : \left(1 + \frac{y}{x}\right)\right] = dx + \frac{cd.\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y}{x}} = 0,$$

et intégrant, il viendra

$$\int[\text{équat.}(363)] = \left[x + cl\left(\frac{x+y}{x}\right) = \text{const.}\right] \ldots (364).$$

Si $n = -2$, alors faisant dans l'équation (362) $n = 2$, elle se réduit à l'inexacte

$$ydx - xdy = 0,$$

qui devient exacte en la divisant par $(y + x)^2$, et a pour intégrale, après cette division,

$$\text{const.} = \frac{y}{x + y}.$$

372. PROBLÈME III. *Trouver la relation qui doit exister entre les quantités* X, $\xi$, $\xi'$ *qui représentent des fonctions de* x, *afin que les équations différentielles inexactes de la forme*

$$dy + y^2dx + Xdx = 0 \ldots\ldots (365)$$

*deviennent exactes en les multipliant par un facteur de la forme*

$$\theta = \frac{F(x)}{y^2 + 2\xi y + \xi'} \ldots\ldots\ldots (366),$$

*dans lequel* F(x) *représente une fonction déterminée de* x

SOLUTION. Comparant l'équation (365) avec celle $Pdx + Qdy = 0$, on a

$$P = y^2 + X \quad \text{et} \quad Q = 1,$$

donc

$$\frac{d^yP}{dy} = 2y \quad \text{et} \quad \frac{d^xQ}{dx} = 0;$$

de plus, faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}, \quad F''(x) = \dfrac{dF'(x)}{dx}, \\ \xi_1 = \dfrac{d\xi}{dx} \quad \text{et} \quad \xi'_1 = \dfrac{d\xi'}{dx} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (a),$$

on a

$$\frac{d^y\theta}{dy} = \frac{-2yF(x) + 2\xi F(x)}{[y^2 + 2\xi y + \xi']^2}$$

et

$$\frac{d^x\theta}{dx} = \frac{[y^2 + 2\xi y + \xi']F'(x) - F(x)[2y\xi_1 + \xi'_1]}{[y^2 + 2\xi y - \xi']^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (327)[art. 358], multipliant par $(y^2 + 2\xi y + \xi')^2$, réduisant, transposant tous les termes dans le premier membre et ordonnant par rapport aux puissances de $y$, il vient l'équation

$$\left.\begin{array}{l} 2F(x)\,\xi \\ -F'(x) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y^2 - 2F(x)\,X \\ \quad -2F'(x)\,\xi \\ \quad +2F(x)\,\xi_1 \\ \quad +2F(x)\,\xi' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y - 2F(x)X\xi = 0 \\ \quad - F'(x)\,\xi' \\ \quad + F(x)\,\xi'_1 \end{array}\right\} \ldots (b),$$

qui ne peut être généralement satisfaite indépendamment des valeurs de $y$, qu'en faisant chacun des coefficiens de $y$ égal à zéro. Or, le coefficient de $y^2$ étant rendu nul, donne

$$\xi = \frac{F'(x)}{2F(x)} \ldots\ldots\ldots (c);$$

donc

$$\xi_1 = \frac{F(x)F''(x) - [F'(x)]^2}{2[F(x)]^2} \; [3^e,\ 2^e \text{ et } 1^{re} \text{ éq. du grou. } (a)].$$

Substituant ces valeurs dans le coefficient de $y$ égalé à zéro, on a

$$X = \frac{F(x)\,F''(x) - 2[F'(x)]^2}{2[F(x)]^2} + \xi' \ldots (d);$$

donc la troisième colonne de l'équation $(b)$ étant égalée à zéro, on a

$$F(x)\xi'_1 - 2F'(x)\xi' - \frac{F(x)F'(x)F''(x) - 2[F'(x)]^3}{2[F(x)]^2} = 0.$$

Substituant dans cette équation la valeur de $\xi'_1 = \frac{d\xi'}{dx}$ [dernière équat. du groupe $(a)$], multipliant par $dx$, et faisant attention que $F'(x)\,dx = dF(x)$ [première équat. du groupe $(a)$], on a l'équation différentielle

$$F(x)\,d\xi' - 2\xi' dF(x)$$
$$-\frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{2[F(x)]^2} dF(x) = 0 \ldots\ldots (\delta),$$

qui est de la même forme que celle (296) [art. 341], et dont conséquemment l'intégrale donnée par l'équation (297) est

$$\xi' = c[F(x)]^2 + \tfrac{1}{2}[F(x)]^2 \times$$
$$\int \frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{[F(x)]^5} dF(x) \ldots (e),$$

Substituant cette valeur de $\xi'$ dans celle de X [équat. $(d)$]; ensuite la valeur résultante de X dans l'équation (365); enfin substituant les valeurs de $\xi$ et de $\xi'$ [équat. $(c)$ et $(e)$] dans l'équation (366), on aura celle différentielle inexacte

$$dy + y^2 dx + \frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{2[F(x)]^2} dx +$$
$$\left\{\tfrac{1}{2}[F(x)]^2\left[2c + \int \frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{[F(x)]^5} dF(x)\right]\right\} dx \ldots (367),$$

qu'on rendra exacte en la multipliant par

$$\frac{F(x)}{\left\{\begin{array}{c} y^2 + \frac{F'(x)y}{F(x)} + \frac{1}{2}[F(x)]^2 \times \\ \left[2c + \int \frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{[F(x)]^5} dF(x)\right] \end{array}\right\}} \ldots (368).$$

Soit

$$F(x) = x^m,$$

d'où

$$F'(x) = mx^{m-1}, \quad F''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

et

$$\int \frac{F(x)F''(x) - 2[F'(x)]^2}{[F(x)]^5} dF(x)$$
$$= -m^2(m+1)\int \frac{dx}{x^{2m+3}} = \frac{m^2}{2x^{2(m+1)}}.$$

Substituant ces valeurs dans les formules (367) et (368), on a l'équation différentielle inexacte

$$dy + y^2dx - \frac{m(m+2)}{4}x^{-2}dx + cx^{2m}dx = 0 \ldots (369),$$

qui devient exacte en la multipliant par

$$\frac{x^m}{y^2 + myx^{-1} + cx^{2m} + \frac{1}{4}m^2x^{-2}} \ldots\ldots (370).$$

Pour intégrer l'équation (369) multipliée par le facteur (370), nous nous y prendrons de la manière suivante

$$\int [\text{équat. } (369) \times (370)] =$$
$$\int^y \frac{x^m dy}{y^2 + myx^{-1} + cx^{2m} + \frac{1}{4}m^2x^{-2}} + \varphi(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc}\left[\text{tang} = \frac{2xy+m}{2\sqrt{c}x^{m+1}}\right]$$
$$+ \varphi(x)\,[\text{équat. } (180), \text{ art. } 241] \ldots\ldots (f),$$

Différentiant cette dernière équation, il vient

$$[\text{équat. } (369) \times (370)] =$$
$$\frac{-myx^{m-1}dx + x^m dy - \frac{1}{2}m(m+1)x^{m-2}dx}{y^2 + myx^{-1} + cx^{2m} + \frac{1}{4}m^2x^{-2}} + d\varphi(x) \ldots (g).$$

Mais

$$[\text{équat. } (369) \times (370)] =$$

$$= \frac{x^m dy + y^2 x^m dx - \frac{1}{4} m (m+2) x^{m+2} dx + c x^{3m} dx}{y^2 + m y x^{-1} + c x^{2m} + \frac{1}{4} m^2 x^{-2}};$$

donc retranchant cette dernière équation de celle $(g)$; ensuite prenant dans la résultante la valeur de $d\varphi(x)$, on aura, toutes réductions faites,

$$d\varphi(x) = x^m dx, \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

substituant cette valeur dans l'équation $(f)$, il viendra complètement

$$\int[\text{équat. } (369)] = \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2yx + m}{2x^{m+1}\sqrt{c}}\right) + \frac{x^{m+1}}{m+1} = \text{const.}\right] \ldots\ldots (371).$$

*Remarque.* Faisant successivement $m = 0$ et $m = -2$, l'équation (369) se réduit respectivement à ces deux valeurs de $m$ aux deux équations

$$dy + y^2 dx + c dx = 0 \ldots\ldots (h)$$

et $$dy + y^2 dx + c x^{-4} dx = 0 \ldots\ldots (i),$$

qui sont de la forme de celle du comte Riccati [équat. (312)], dans les premier et troisième cas de séparation [série (316), art. 351].

On trouve tout de suite par le moyen de la formule (371) que

$$\int(h) = \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{\sqrt{c}}\right) + x = \text{const.}\right],$$

$$\int(i) = \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x(yx-1)}{\sqrt{c}} - \frac{1}{x} = \text{const.}\right]\right. (*).$$

(*) Comparant l'équation $(i)$ avec celle (314) [art. 351], on a

373. De même, si l'on veut connaître la relation qui doit exister entre certaines fonctions indéterminées des variables qui se trouvent dans une équation différentielle inexacte à trois variables de forme désignée, et dans le facteur aussi de forme désignée, qui doit rendre exacte l'équation différentielle; on cherchera par le moyen des trois équations du groupe (*b*) [art. 359], à déterminer les valeurs des fonctions indéterminées par un procédé semblable à celui dont nous nous sommes servis précédemment pour les équations à deux variables. Mais afin que cette méthode réussisse, il faut que le nombre d'équations essentiellement différentes, ne surpasse pas celui des variables, et que dans ce nombre aucune ne se contredise.

---

$$c = -c, \quad h = -1 \quad \text{et} \quad g + 4 = 4, \quad \text{ou} \quad g = 0.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (312) [art. 351], il vient celle

$$dz = -cdu - z^2 du \quad \text{ou} \quad du = \frac{-dz}{c + z^2},$$

dont l'intégrale est

$$\text{const.} = -u - \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\sqrt{c}}\right);$$

mais

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{u} - \frac{y}{u^2} = -(yx^2 - x),$$

donc

$$\text{const.} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc}\left[\text{tang} = \frac{x(yx - 1)}{\sqrt{c}}\right] - \frac{1}{x},$$

ce qui est la même intégrale que celle que nous a donné directement la formule (371).

# CHAPITRE VI

*Des intégrales et solutions particulières des équations différentielles du premier ordre ; propriété des facteurs ou diviseurs qui rendent exactes les équations différentielles inexactes, et qui sert, dans un grand nombre de cas, à découvrir ces facteurs.*

374. QUELLE QUE soit la valeur que l'on donne à la constante qui complète une intégrale, la differentielle de cette intégrale étant toujours la même, il s'ensuit qu'une seule équation différentielle a un nombre infini d'intégrales différentes, que nous appellerons *intégrales particulières*.

375. Outre ce nombre infini d'intégrales qui satisfont l'équation différentielle proposée par voie de différentiation, il y a encore quelquefois des équations primitives variables absolument indépendantes de l'intégrale de la proposée, qui satisfont à cette dernière équation, soit par voie de simple substitution, soit par voie de substitution et de différentiation. Nous appellerons ces équations primitives, *solutions particulières* (*).

(*) Les dénominations d'*intégrales particulières* et *solutions particulières* que beaucoup de Géomètres n'ont pas données aux mêmes choses que nous leur faisons exprimer, ont cependant été adoptées par Laplace, et nous n'avons pas hésité, d'après cet illustre Géomètre, de nous en servir ; d'ailleurs les dénominations en question nous paraissent mieux exprimer que toute autre, le vrai caractère des choses qu'elles indiquent.

376. Toute équation différentielle

$$Pdx + Qdy + Rdz + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens variables P, Q, R...., auront des diviseurs variables communs, sera évidemment satisfaite en faisant chacun de ces diviseurs égal à zéro; donc alors l'équation proposée aura autant de solutions particulières de *première espèce*, c'est-à-dire, qui satisfont à la proposée par simple voie de substitution, qu'il y a de diviseurs variables communs à tous les coefficiens P, Q, R..... Ainsi la recherche de ces solutions particulières n'exige que celle du plus grand commun diviseur entre plusieurs polynomes.

377. Mais il arrive aussi quelquefois que les coefficiens variables P, Q, R..... n'ayant pas de communs diviseurs, on trouve cependant des équations variables indépendantes de l'intégrale de la proposée, qui satisfont à cette dernière équation. Par exemple, l'équation différentielle

$$\{\sqrt{[xy(xy-2)(x^2-y^2)]} - x(xy-1)\sqrt{x^2-y^2} + y\sqrt{x^2y^2-2xy}\}\,dy$$
$$-\{y(xy-1)\sqrt{x^2-y^2} + x\sqrt{x^2y^2-2xy}\}\,dx = 0 \ldots (a),$$

qui, divisée par $\sqrt{xy(xy-2)(x^2-y^2)}$, a pour intégrale complète

$$y = \sqrt{[x^2y^2-2xy]} + \sqrt{x^2-y^2} + c \ldots\ldots (b),$$

en représentant par $c$ la constante arbitraire, a pour solutions particulières de *seconde espèce*, c'est-à-dire pour solutions particulières qui satisfont à la proposée par voie de substitution et de différentiation, les deux équations

$$(c) \ldots\ldots xy = 2 \quad \text{et} \quad x^2 = y^2 \ldots\ldots (d).$$

En effet, la première de ces équations réduit celle ($a$) à l'équation

$$x\sqrt{x^2-y^2}dy+y\sqrt{x^2-y^2}dx=0,$$

ou

$$xdy+ydx=0,$$

ce qui est précisément la différentielle de l'équation ($c$). De même l'équation ($d$) réduit la proposée ($a$) à celle

$$ydy-xdx=0,$$

qui est précisément la différentielle de l'équation ($d$). Nous allons nous occuper dans les articles suivans, de la recherche de ces solutions particulières, qui sont presque toujours aussi utiles dans la résolution des problèmes, que l'intégration complète des équations différentielles auxquelles ont donné lieu ces problèmes.

378. Si l'équation différentielle

$$d\mathrm{F}(x,y)=0,$$

a pour intégrale immédiate l'équation rationnelle

$$f(x,y)=c,$$

il est clair que la différentiation de cette intégrale ne peut que produire la proposée

$$d\mathrm{F}(x,y)=0;$$

mais si l'intégrale immédiate de cette dernière équation étant affectée de quantités radicales telle que l'équation

$$f(x,y)+\sqrt[m]{f'(x,y)}+\sqrt[n]{f''(x,y)}+\text{etc.}=c\ldots(a);$$

on la rend rationnelle, alors cette intégrale se présentera sous la forme de l'équation

$$\varphi(x,y)+c\varphi'(x,y)+c^2\varphi''(x,y)\ldots+c^q=0\ldots(b),$$

dont il est évident que la différentielle ne reproduira plus l'équation

$$dF(x, y) = 0$$

dont elle est l'intégrale, mais sera une équation différentielle affectée de $c$ et du degré $q - 1$ par rapport à cette constante. Cependant de la différentielle de l'intégrale $(b)$, on déduira la proposée

$$dF(x, y) = 0,$$

en résolvant l'équation $d(b) = 0$ par rapport à $c$, et introduisant cette valeur de $c$ dans l'intégrale immédiate $(a)$.

Pour rendre ceci plus sensible, prenons pour exemple l'équation

$$(2\sqrt{xy} + x)\,dy + y\,dx = 0 \ldots\ldots (c),$$

qui, divisée par $2\sqrt{xy}$, a pour intégrale complète

$$y + \sqrt{xy} = c \ldots\ldots (d).$$

Eliminant de cette dernière équation le radical, il vient l'équation rationnelle

$$y^2 - xy - 2cy + c^2 = 0,$$

dont la différentielle

$$(2y - x - 2c)\,dy - y\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots (e)$$

diffère de celle proposée $(c)$; mais on tire de l'équation $(e)$ celle

$$c = y - \frac{x}{2} - \frac{y\,dx}{2\,dy};$$

et introduisant cette valeur de $c$ dans l'équation $(d)$, on reproduit la proposée $(c)$.

379. Cela posé, soit l'équation différentielle

$$dF(x, y) = 0 \ldots\ldots (a),$$

dont nous représenterons l'intégrale complète et immédiate par

$$f(x,y)+\sqrt[m]{f'(x,y)}+\sqrt[n]{f''(x,y)}=c\ldots(b),$$

Eliminant les radicaux dans cette dernière équation, il viendra pour intégrale rationnelle de la proposée $(a)$, une équation que nous représenterons par

$$\Phi(x,y,c)=0\ldots\ldots\ldots(c).$$

Ainsi différentiant cette dernière équation par rapport à $x$ et $y$, tirant de la différentielle

$$d^{xy}\Phi(x,y,c)=0\ldots\ldots(d)$$

la valeur de $c$ que nous supposons être donnée par l'équation

$$c=\Phi'(x,y)+\Phi''\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\ldots\ldots(e),$$

et substituant cette valeur de $c$, ou toute autre provenant de la résolution de l'équation $(d)$, qui peut être d'un degré supérieur au premier par rapport à $c$, on reproduira la proposée (art. 378); et il n'y a que ces valeurs de $c$ qui peuvent produire un tel effet. Mais toute autre valeur de $c$ que je représenterai par $c'$, qui, bien loin d'altérer celle donnée par l'équation $(e)$ [*], rendra impossible qu'elle n'existe pas, devra évidemment changer l'équation $(b)$ en une autre qui satisfera à la proposée; car si cela n'avait pas lieu, il s'ensuivrait que ce que deviendrait l'équation $(b)$ par la substitution de la valeur en question de $c'$, ne réduisant pas celle $(a)$ à l'identique $0=0$, on aurait une autre équa-

[*] Je ne considérerai, pour abréger, qu'une seule des valeurs de $c$ donnée par l'équation $(d)$.

tion différentielle

$$dF'(x, y) = 0,$$

dont conséquemment l'intégrale serait différente de celle ($b$), ce qui changerait l'équation ($c$) et par conséquent celle ($d$); donc la valeur de $c$ serait différente de celle donnée par l'équation ($e$); d'où il s'ensuivrait que la valeur en question de $c'$, substituée dans l'équation ($b$), ne nécessiterait plus celle $c$ donnée par l'équation ($e$), ce qui est contraire à ce que nous supposons devoir exister, et que nous allons démontrer pouvoir toujours avoir lieu. En effet, différentiant l'équation ($c$) par rapport à $x$, $y$ et $c$, en effectuant seulement la différentiation par rapport à $c$, on a

$$d^{xy}\Phi(x, y, c) + \varphi(x, y, c)\,dc = 0 \ldots\ldots (f).$$

Or, il est évident que cette équation se réduira à celle ($d$), et par conséquent donnera nécessairement à $c$ la valeur exprimée par l'équation ($e$), si l'on fait

$$\varphi(x, y, c)\,dc = 0,$$

équation à laquelle on peut satisfaire de deux manières, 1°. en faisant $dc = 0$, ce qui donne $c =$ const.; et comme on peut faire cette constante égale à une quantité quelconque $a$, $b$, ....., il en résulte pour l'équation ($b$) une simple intégrale particulière de la proposée ($a$), que nous savons devoir toujours satisfaire à cette dernière équation (art. 374); 2°. en faisant $\varphi(x, y, c) = 0$; d'où résulte

$$c' = \varphi'(x, y) \ldots\ldots (g),$$

qui substituée dans l'équation ($b$), donne lieu, comme nous l'avons vu précédemment, à une solution particulière de la proposée: et généralement on aura autant de solutions particulières de l'équation ($a$) que l'on

pourra déduire de valeurs de $c'$ de l'équation

$$\varphi(x, y, c) = 0.$$

Si la valeur de $c'$ donnée par l'équation ($g$) était constante, alors on aurait encore par la substitution de cette valeur de $c'$ dans l'équation ($b$), une simple intégrale particulière de la proposée.

380. De la théorie précédente, il suit évidemment qu'une équation différentielle rationnelle algébrique ne peut avoir de solutions particulières, puisque l'intégrale d'une telle équation se présentant toujours sous la seule forme algébrique rationnelle, on ne pourra pas obtenir pour $c$ une valeur telle que celle donnée par l'équation ($e$) de l'article précédent, et par conséquent à des valeurs de $c'$ qui conduisent aux solutions particulières de la proposée.

381. D'après toutes ces considérations, nous conclurons la règle générale suivante, pour trouver les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre qui ne sont pas rationnelles algébriques, et qui sont susceptibles d'en avoir.

*L'intégrale immédiate se présentant sous une forme irrationnelle, on la complétera d'abord avec une constante* c, *ensuite on la rendra rationnelle* (opération qui est absolument du ressort de la simple algèbre); *on différentiera cette équation par rapport à* c *seulement, sans écrire* dc; *on fera le résultat égal à zéro, et tirant de cette équation toutes les valeurs de* c, *on les substituera dans l'intégrale immédiate et rendue complète, ce qui donnera toutes les solutions particulières de la proposée.*

APPLICATION. *Trouver les solutions particulières*

*des équations de la forme*

$$df(x,y) - \frac{df'(x,y)}{n[f'(x,y)]^{\frac{n-1}{n}}} = 0 \ldots\ldots (a).$$

Il est aisé de voir que l'intégrale immédiate et complète de cette équation est

$$f(x,y) - \sqrt[n]{f'(x,y)} = c \ldots\ldots (b),$$

d'où

$$[f(x,y) - c]^n = f'(x,y),$$

et différentiant cette dernière équation par rapport à $c$ seulement, sans écrire $dc$, il vient

$$n[f(x,y) - c]^{n-1} = 0,$$

d'où l'on tire

$$c = f(x,y);$$

et substituant cette valeur de $c$ dans l'équation $(b)$, on a

$$f'(x,y) = 0,$$

qui est la seule solution particulière de la proposée.

Généralement, il est aisé de voir, sans calcul, que toute équation de la forme

$$df(x,y,z\ldots) + \frac{df'(x,y,z\ldots)}{m[f'(x,y,z\ldots)]^{\frac{m-1}{m}}} + \frac{df''(x,y,z\ldots)}{n[f''(x,y,z\ldots)]^{\frac{n-1}{n}}} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots (372),$$

a pour solutions particulières les équations

$$\{f'(x,y,z\ldots) = 0,\ f''(x,y,z\ldots) = 0, \text{etc.}\} \ldots (373).$$

382. Nous observerons que c'est à tort que quelques

Géomètres ont dit qu'il fallait différentier l'intégrale rationnelle (c) [art. 379] par rapport à $y$ et $c$, ensuite par rapport à $x$ et $c$, faire $\frac{dy}{dc}=0$, après cela $\frac{dx}{dc}=0$; enfin prendre dans chacune de ces équations les valeurs de $c$, et les substituer successivement dans l'intégrale complète pour avoir les solutions particulières de la proposée. Voici entre autres, comment s'exprime M. Bossut dans ses *Traités de Calculs différentiel et intégral*, tome II, pag. 323, art. 953.

« Tout ce qui a été établi relativement à l'équation » $\frac{dy}{dc}=0$, doit s'entendre également pour l'équation » analogue $\frac{dx}{dc}=0$. c'est-à-dire que si au lieu de » faire varier $y$ et $c$ dans l'équation $V=0$ (c'est l'in- » tégrale complète et rationnelle), on fait varier $x$ » et $c$, et qu'on suppose $\frac{dx}{dc}=0$, cette équation, traitée » comme l'équation $\frac{dy}{dc}=0$, servira aussi à détermi- » ner les intégrales particulières (*) de la même équation

(*) Ce Géomètre nomme *intégrales particulières*, ce que moi et beaucoup d'autres Géomètres avant moi, entr'autres Laplace, ont nommé *solutions particulières*, et il nomme *intégrales incomplètes*, ce que j'appelle *intégrales particulières* (voyez le tome II, pag. 313 et 314 de l'ouvrage cité). Les dénominations qu'emploie M. Bossut, ne me paraissent pas s'adapter d'une manière précise aux choses qu'il nomme ainsi, puisque ce qu'il appelle *intégrale particulière*, n'est pas compris dans l'intégrale complète; et qu'il y a de la différence entre ce qu'il nomme intégrales incomplètes et ce que je nomme intégrales particulières. En effet, pour chaque équation différentielle

$$dF(x,y)=0,$$

il n'y a qu'une intégrale incomplète, laquelle est une intégrale par-

» différentielle $Z = 0$ [c'est la proposée qu'à l'article
» 397, nous avons représentée par l'équation $(a)$]. Ordi-
» nairement les équations $\frac{dy}{dc} = 0$, $\frac{dx}{dc} = 0$, donnent
» les mêmes résultats ; mais ils peuvent être différens,
» et on ne doit pas négliger d'en faire la recherche,
» afin d'être sûr qu'on a trouvé toutes les intégrales
» particulières que l'équation $Z = 0$ peut comporter ».

Pour démontrer que les résultats donnés par les équations $\frac{dy}{dc} = 0$ et $\frac{dx}{dc} = 0$ ne peuvent être différens, il nous suffira d'observer que l'équation $\Phi(x, y, c) = 0$ étant d'abord différentiée par rapport à $y$ et $c$, et ensuite par rapport à $x$ et $c$, donne

$$d^y\Phi(x,y,c) + d^c\Phi(x,y,c) = 0$$

$$\text{et} \quad d^x\Phi(x,y,c) + d^c\Phi(x,y,c) = 0,$$

$$\text{ou} \quad \varphi(x,y,c)\,dy + f(x,y,c)\,dc = 0,$$

$$\text{et} \quad \varphi'(x,y,c)\,dx + f(x,y,c)\,dc = 0;$$

donc

$$\frac{dy}{dc} = \frac{-f(x,y,c)}{\varphi(x,y,c)} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dc} = \frac{-f(x,y,c)}{\varphi'(x,y,c)},$$

d'où faisant

$$\frac{dy}{dc} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dc} = 0,$$

on tire toujours le même résultat

$$f(x, y, c) = 0,$$

---

ticulière en faisant dans l'intégrale complète $c = 0$; mais il y a un nombre infini d'intégrales particulières qui ne sont pas des intégrales incomplètes, en donnant à la constante $c$ un nombre infini de valeurs, autres que zéro.

qu'on obtient encore plus simplement en différentiant $\Phi(x, y, c) = 0$ par rapport à $c$ seulement, et faisant le coefficient de $dc = 0$ : c'est ce que nous avons fait dans les articles précédens.

383. Nous avons vu à l'article 380 qu'une équation différentielle

$$Pdx + Qdy = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$$

ne pouvait avoir de solutions particulières qu'en tant que $\frac{P}{Q}$ est affecté de quantités radicales. Or, il est évident que les termes rationnels de l'équation proposée ne pourront disparaître en même temps que les radicaux par certaines équations primitives qui ne sont pas les intégrales, qu'en tant que certaines quantités rationnelles sous les signes radicaux étant égalées à zéro, la différentielle de ces quantités reproduira tous les termes rationnels de la proposée. Donc pour obtenir les solutions particulières d'une équation différentielle sans en connaître l'intégrale, *il faudra égaler à zéro chacun des polynomes rationnels affectés d'un signe radical, et les équations primitives qu'on obtiendra de cette manière, seront les solutions particulières de la proposée, si en les différentiant on retrouve le polynome différentiel rationnel de l'équation qu'on traite.* Or

$$\frac{dy}{dx}\left(= -\frac{P}{Q}\right),$$

étant affecté de quantités variables radicales, il est clair que la quantité $\frac{d^y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dy}$ sera égale à une suite de

termes, parmi lesquels il y en aura dont le numérateur rationnel aura pour dénominateur une quantité variable irrationnelle, qui est précisément celle qu'il faut égaler à zéro pour avoir les solutions particulières de la proposée ; donc

$$\frac{d^y \frac{dy}{dx}}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{-Qd^yP + Pd^yQ}{Q^2dy} = \frac{1}{0} \ldots\ldots (374)$$

est le caractère des solutions particulières des équations différentielles.

Exemple. *Trouver les solutions particulières de l'équation*

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Nous avons

$$P = x, \quad Q = y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}, \quad d^yP = 0;$$

$$d^yQ = dy - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

d'où

$$-\frac{Qd^yP + Pd^yQ}{Q^2dy} = \frac{x}{(y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})^2}$$

$$-\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,(y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})^2},$$

quantité qui ne peut devenir $= \infty$, indépendamment des valeurs de $x$ et de $y$, qu'en faisant successivement

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \text{et} \quad x^2 - a^2 = 0.$$

Ces deux équations sont les solutions particulières de la proposée. En effet, différentiant la première de ces équations, on a $xdx + ydy = 0$; ce qui réduit la proposée à l'identité $0 = 0$. De même différentiant l'équation $x^2 - a^2$, on a $2xdx = 0$, d'où $dx = 0$, ce qui réduit la proposée à l'équation identique $ydy = ydy$.

384. Suivant la théorie développée dans le chapitre précédent, on a presque toujours une extrême difficulté à trouver l'un des facteurs $\theta$ intégrans d'une équation différentielle qui n'est pas immédiatement intégrable. Mais grace à une découverte qu'a faite Euler, et dont nous allons nous occuper dans cet article, on peut, ainsi que nous le verrons à l'article 388, trouver, dans un très-grand nombre de cas, l'un des facteurs ou diviseurs qui rendent les équations différentielles proposées exactes. Le célèbre Géomètre que nous venons de citer, observa que le facteur ou diviseur propre à rendre exacte une équation différentielle, étant égalé à zéro, satisfait à cette équation différentielle. En effet, soit toujours représenté par

$$Pdx + Qdy = 0 \ldots\ldots\ldots (a),$$

L'équation différentielle qui ne peut s'intégrer immédiatement, et par $\theta$ le facteur ou diviseur intégrant cherché, ce qui donnera pour le cas de $\theta$ facteur, l'équation

$$\frac{d^y \theta P}{dy} = \frac{d^x \theta P}{dx},$$

et pour le cas de $\theta$ diviseur, l'équation

$$\frac{d^y \left(\frac{P}{\theta}\right)}{dy} = \frac{d^x \left(\frac{Q}{\theta}\right)}{dx},$$

Développant ces deux équations, on aura celle

$$P\frac{d^y \theta}{dy} - Q\frac{d^x \theta}{dx} = \pm \left[\frac{d^x Q}{dx} - \frac{d^y P}{dy}\right]\theta \ldots\ldots (375)[*],$$

---

[*] Cette équation prise avec le signe $+$, est celle (327)[art. 358] où nous ne considérions $\theta$ que comme facteur.

le signe $+$ lorsque $\theta$ est facteur, le signe $-$ lorsque $\theta$ est diviseur. Or, si l'on fait $\theta = 0$, l'équation (375) se réduira à celle

$$P\frac{d^y\theta}{dy} - Q\frac{d^x\theta}{dx} = 0 \ldots\ldots (b);$$

et puisqu'en différentiant l'équation $\theta = 0$, on a celle

$$d^y\theta + d^x\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^y\theta}{dy} = -\frac{d^x\theta}{dy} = -\frac{d^x\theta}{dy}\cdot\frac{dx}{dx};$$

on aura, en substituant cette valeur de $\frac{d^y\theta}{dy}$ dans l'équation $(b)$, celle

$$-P\frac{d^x\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} - Q\frac{d^x\theta}{dx} = 0,$$

et multipliant par $-\frac{dydx}{d^x\theta}$, il viendra l'équation

$$Pdx + Qdy = 0 \ldots\ldots (a)$$

qui est la proposée. Ainsi l'équation $\theta = 0$ satisfait à celle $(a)$ que le facteur ou diviseur $\theta$ rend intégrable; donc $\theta = 0$ est une solution ou intégrale particulière de l'équation $(a)$. Par exemple, nous avons vu à l'article (371), qu'on rendait intégrable l'équation

$$\frac{ny + x}{n - 1}dx + ydy = 0 \ldots\ldots (c) \text{ [équat. (351)]},$$

en la divisant par $(x + y)^n$; or, si l'on fait ce diviseur $= 0$, d'où l'on tire $y = -x$, il est aisé de voir que cette dernière équation satisfera à la proposée $(c)$, puisqu'elle réduira celle-ci à l'identique $xdx = xdx$. L'équation $y = -x$ ne peut être une solution particulière de la proposée $(c)$, puisque cette dernière

équation est rationnelle (art. 380); elle en est donc une intégrale particulière. En effet, l'intégrale complète de la proposée ($c$) est

$$\frac{(n-1)y+x}{(n-1)(n-2)(y+x)^{n-1}} = \text{const.},$$

et si l'on fait const. $= \frac{1}{0}$, on a

$$y + x = 0.$$

Prenons encore pour exemple l'équation

$$(1 - 4\sqrt{y^3})\,dy + 4x\sqrt{y}dx = 0,$$

qui devient intégrable en la divisant par $\sqrt{y}$; or $\sqrt{y} = 0$ ou $y = 0$ satisfait à la proposée et en est une solution particulière, et non une intégrale particulière (*), ainsi qu'il est aisé de le vérifier (art. 383).

385. Remarque I. J'ai dit que l'équation $\theta = 0$ fait évanouir le second membre de celle (375); mais si P et Q renferment un facteur radical fonction de $x$ et de $y$, tel que l'équation $\theta = 0$ le fasse évanouir, il est clair que le second membre de l'équation (375) se réduira à la fraction équivoque $\frac{0}{0}$ que je présume devoir toujours se réduire à zéro ou à l'infini dans la circonstance actuelle; du moins cela a-t-il toujours lieu dans l'exemple suivant, qui est le plus général possible de son espèce (**).

---

(*) Je n'ai donné cet exemple que pour prouver que l'équation $\theta = 0$ pouvait être une solution particulière de la proposée, ce qui a échappé à certains Géomètres qui ont avancé que cette équation était généralement une intégrale particulière de la proposée.

(**) Cet exemple prouvera, ce me semble, que M. Lacroix n'aurait pas dû assurer dans son excellent *Traité de Calcul différen-*

Soit supposé que pour rendre exacte l'équation

$$[f(x,y)+(y^a-x^a)^{\frac{1}{m}}]dx+[f'(x,y)$$
$$+(y^c-x^c)^{\frac{1}{q}}]dy=0\ldots.(a),$$

il faut la multiplier par le facteur

$$\theta=(y^n-x^n)^p\ldots\ldots(b).$$

Comparant l'équation $(a)$ avec celle

$$Pdx+Qdy=0;$$

substituant les valeurs de P, Q et $\theta$ dans l'équation (375); mettant dans celle qui en proviendra la valeur de $\frac{d^y(y^n-x^n)^p}{dy}=-\frac{d^x(y^n-x^n)^p}{dy}\frac{dx}{dx}$ qui résulte de l'équation $\theta=0$; multipliant par $\frac{dydx}{d^x(y^n-x^n)^p}$, ou $\frac{-dy}{np(y^n-x^n)^{p-1}x^{n-1}}$; faisant attention que $\theta=0$ multipliant les termes rationnels $\frac{d^xf'(x,y)}{dx}$ et $\frac{d^yf(x,y)}{dy}$, les fait évanouir, enfin effectuant les différentiations particulières $d^x(y^c-x^c)^{\frac{1}{q}}$ et $d^y(y^a-x^a)^{\frac{1}{m}}$, on aura

---

*tiel et intégral* (tome II, pag. 280 et 281), « que la fraction $\frac{0}{0}$ » n'a pas lieu, si la proposée est dégagée de tout dénominateur. » Il est bien vrai que dans l'exemple suivant, le calcul nous apprendra que cette fraction $\frac{0}{0}$ est $=0$; mais elle ne s'en sera pas moins présentée, et nos recherches sur cet objet ne se sont pas assez étendues pour que nous osions assurer que dans tous les cas semblables, on a $\frac{0}{0}=0$.

l'équation

$$[f(x,y)+(y^a-x^a)^{\frac{1}{m}}]\,dx+[f'(x,y)+(y^c-x^c)^{\frac{1}{q}}]\,dy$$
$$+\frac{dy}{np}\left[\frac{c(y^n-x^n)\,x^{c-n}}{q(y^c-x^c)^{\frac{q-1}{q}}}+\frac{a(y^n-x^n)\,y^{a-1}}{m(y^a-x^a)^{\frac{m-1}{m}}\,x^{n-1}}\right]=0..(c).$$

Or, il est clair que

$$y^n-x^n=[y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2\ldots+x^{n-1}](y-x),$$

donc en supposant $\theta=0$, ce qui donne $y=x$, on aura

$$\frac{y^n-x^n}{(y^c-x^c)^{\frac{q-1}{q}}}=\frac{0}{0}=\frac{ny^{n-1}}{(cy^{c-1})^{\frac{q-1}{q}}}\times\frac{y-y}{(y-y)^{\frac{q-1}{q}}}$$
$$=\frac{n}{c^{\frac{c-1}{q}}}\,y^{\frac{q(n-c)+c-1}{q}}\times(y-y)^{\frac{1}{q}},$$

quantité qui est $=0$ lorsque $q$ est positif, et est $=\infty$ lorsque $q$ est négatif. De même on aura dans l'hypothèse de $y=x$, le dernier terme de l'équation ($c$) qui sera $=0$ ou $=\infty$, suivant que $m$ sera positif ou qu'il sera négatif. Ainsi, de même que pour les équations différentielles rationnelles, celle $\theta=0$ de la forme ($b$) satisfera à l'équation de la forme ($a$), lorsque les quantités radicales seront facteurs; mais s'il y a un simple diviseur radical, l'équation $\theta=0$ ne satisfera plus à la proposée.

386. Remarque. II. Si l'équation $\theta=0$ fait évanouir l'un des deux coefficiens variables P et Q de la proposée, il est clair que le facteur ou diviseur intégrant $\theta$, ne sera fonction que de la seule variable dont la différentielle est multipliée dans la proposée par le coefficient qui ne s'est pas évanoui. Par exemple, soit

P le coefficient que l'équation $\theta = 0$ fait évanouir, il est clair qu'alors l'équation (375) se réduira à celle

$$Q\frac{d^x\theta}{dx} = 0, \quad \text{donc} \quad d^x\theta = 0,$$

ce qui donne

$$\theta = fy = 0.$$

Dans ce dernier cas, l'équation $\theta = 0$ est encore une intégrale ou solution particulière de la proposée, puisqu'on aura alors

$$dfy = 0, \quad \text{d'où} \quad dy = 0.$$

387. Remarque. Si l'on a $\theta = a^{f(x,y)}$, $a$ représentant une fonction constante finie et donnée, l'on ne pourra supposer ce facteur ou diviseur $= 0$, car de l'équation $a^{f(x,y)} = 0$, on tire

$$f(x, y) = \frac{lo}{la} = \frac{-\infty}{la};$$

388. C'est d'après la belle propriété énoncée et démontrée à l'article 384 du facteur susceptible de rendre intégrable une équation différentielle inexacte, que bien souvent on parvient à trouver ce facteur. Voici comment on procède dans ce calcul qui, nécessairement, tient un peu au tâtonnement, mais peut être souvent fort utile.

1°. On cherche des fonctions de $y$ et de $x$ qui puissent satisfaire à la proposée, et ces fonctions se trouvent quelquefois à la simple inspection de l'équation donnée; ou autrement on suppose l'une des variables égale à une suite convenable de termes où se trouve l'autre variable élevée aux puissances 1, 2, 3..... avec des coefficiens indéterminés, et substituant dans la proposée la valeur de la variable qu'on veut éliminer, on égale les coefficiens de l'autre variable à zéro, et s'il résulte de ces différens calculs des

valeurs qui ne se contredisent pas entre elles, on substitue les valeurs trouvées aux coefficiens indéterminés dans l'équation hypothétique, laquelle, conséquemment, satisfera à la proposée.

2°. On fait $\theta =$ à la quantité précédente élevée à une puissance indéterminée $p$, et substituant cette valeur de $\theta$, ainsi que celles de P et de Q dans l'équation (375), on cherche à déterminer la valeur de $p$. Si l'on ne peut réussir dans cette dernière tentative, l'on cherche, comme précédemment, une nouvelle fonction de $x$ et de $y$ qui satisfasse à la proposée, en prenant l'équation hypothétique différente de la première; après cela, faisant $\theta$ successivement égal aux deux quantités trouvées, l'une élevée à la puissance indéterminée $p$, l'autre à la puissance indéterminée $q$, on cherche, comme nous l'avons dit ci-dessus, à déterminer les valeurs de $p$ et de $q$. Quelques exemples rendront plus sensibles les procédés dont on doit se servir en pareil cas.

1°. *Trouver le facteur qui doit rendre intégrable l'équation*

$$\frac{ydx}{n+2} - \frac{aydx}{x^{n+2}} + \frac{n+1}{n+2}\,xdy + \frac{ady}{x^{n+1}} + xdx = 0 \ldots\ldots (a),$$

Essayons de faire $y = mx$, $m$ étant une quantité indéterminée. Substituant cette valeur de $y$ dans la proposée, n'écrivant pas $dx$, faisant toutes les réductions nécessaires et divisant par $x$, nous avons l'équation

$$\left.\begin{matrix} 2m + m \\ +2 + 1 \end{matrix}\right\} n = 0,$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $n$, donne $m = -1$; donc mettant cette valeur dans

l'équation hypothétique $y - mx = 0$, on a

$$y + x = 0.$$

Faisons maintenant

$$\theta = (y+x)^p, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^y\theta}{dy} = \frac{d^x\theta}{dx} = p\,(y+x)^{p-1};$$

ce qui réduit l'équation (375) à celle

$$p\,(\mathrm{P} - \mathrm{Q}) = \left(\frac{d^x\mathrm{Q}}{dx} - \frac{d^y\mathrm{P}}{dy}\right)(y+x):$$

faisant dans cette équation les substitutions des valeurs de

$$\mathrm{P} = \frac{y}{n+2} - ayx^{-(n+2)} + x, \quad \mathrm{Q} = \frac{n+1}{n+2}x + ax^{-(n+1)},$$

$$\frac{d^y\mathrm{P}}{dy} = \frac{1}{n+2} - ax^{-(n+2)},$$

et

$$\frac{d^x\mathrm{Q}}{dx} = \frac{n+1}{n+2} - a(n+1)x^{-(n+2)},$$

il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{p}{n+2} - apx^{-(n+2)} = \frac{n}{n+2} - anx^{-(n+2)};$$

égalant les termes homologues de cette équation, on a deux équations qui donnent simultanément $p = n$; donc $(y+x)^n$ est le facteur qui rend intégrable l'équation ($a$).

II°. Proposons-nous encore de trouver le facteur intégrant de l'équation

$$2\,(a^2 - x)\,ydy - aydx - xdx = 0 \ldots (b).$$

Il est évident à la simple inspection de cette proposée, que l'équation $a^2 - x = 0$, d'où $x = a^2$ et $dx = 0$, y satisfait. Mais si l'on pose $\theta = (a^2 - x)^p$, et qu'on

fasse les substitutions convenables dans l'équation (375); on a

$$2p = 2y - a,$$

d'où l'on ne peut tirer la valeur cherchée de $p$. Tâchons donc de trouver une autre fonction variable qui satisfasse à la proposée, et pour cela faisons $x = my^2 + ny$, $m$ et $n$ étant des coefficiens indéterminés. Substituant cette valeur de $x$ et celle de $dx = (2my + n)\,dy$ dans la proposée ($b$), on aura l'équation

$$\left.\begin{matrix} 2m \\ +2m^2 \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +2n \\ +2am \\ +3mn \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +n^2 \\ +an \\ -2a^2 \end{matrix}\right\} y = 0,$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$, donne

$$m = 0 \quad \text{ou} \quad m = -1, \quad n = 0 \quad \text{ou} \quad n = -2a,$$

enfin $$n = a \quad \text{ou} \quad n = -2a;$$

or, il n'y a que la seconde valeur $-1$ de $m$ qui donne à $n$ les deux valeurs identiques $-2a$; donc l'équation hypothétique

$$x = my^2 + ny$$

se réduit à celle

$$y^2 + 2ay + x = 0,$$

qui satisfait à la proposée. Cela posé faisant

$$\theta = (a^2 - x)^p (y^2 + 2ay + x)^q \ldots\ldots (c);$$

d'où

$$\frac{d^y\theta}{dy} = 2q(a^2 - x)^p (y^2 + 2ay + x)^{q-1}(y + a)$$

et

$$\frac{d^x\theta}{dx} = -p(a^2 - x)^{p-1}(y^2 + 2ay + x)^q$$
$$+ q(a^2 - x)^p (y^2 + 2ay + x)^{q-1}.$$

Substituant ces valeurs ainsi que celle de

$$P = -(ay + x) \quad \text{et} \quad Q = 2y(a^2 - x)$$

dans l'équation (375), on a celle

$$+2\left\{\begin{matrix} 2p \\ \\ \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} y^3 - 2aq \\ +4ap \\ +3a \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} y^2 - 4a^2q \\ -2a^2 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} y + 2p \\ +2 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} yx - 2aq \\ -a \end{matrix}\right\}x = 0;$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $y$ et de $x$, ne peut être généralement satisfaite qu'en faisant chaque coefficient égal à zéro; or, les coefficiens du premier et du quatrième terme étant chacun égalé à zéro, donnent simultanément $p = -1$, et d'après cette valeur de $p$, les second, troisième et cinquième coefficiens de l'équation précédente étant égalés à zéro, donnent aussi simultanément $q = -\frac{1}{2}$; ainsi, d'après ces valeurs de $p$ et de $q$, la formule (c) se réduit à celle

$$\theta = \frac{1}{(a^2 - x)\sqrt{y^2 + 2ay + x}};$$

ce qui est le facteur demandé.

Ceux qui seront curieux de voir plusieurs autres exemples où les procédés enseignés précédemment sont appliqués d'une manière fort ingénieuse, n'auront qu'à lire un très-beau Mémoire, sur cet objet, par M. Trembley, et imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Turin, années 1790 et 1791.

# CHAPITRE VII.

*Méthode pour résoudre, par approximation, les équations différentielles du premier ordre à deux variables, lorsqu'on a trop de peine à les intégrer exactement.*

389. DÉDUIRE d'une équation différentielle entre plusieurs variables, la valeur primitive de l'une de ces variables en fonctions primitives des autres variables, est ce qu'on appelle *résoudre cette équation différentielle*. Par exemple, la solution complète et exacte de l'équation différentielle

$$2ydy + x^3dy + 3yx^2dx + 2xdx = 0 \ldots\ldots (a),$$

est

$$y = -\tfrac{1}{2}\left[x^3 \pm \sqrt{x^6 - 4x^2 + \text{const.}}\right] \ldots\ldots (b);$$

car l'intégrale complète et exacte de l'équation $(a)$ est

$$y^2 + x^3y + x^2 = \text{const.} \ldots\ldots (c),$$

qui, résolue par rapport à la variable $y$, donne l'équation $(b)$, dans laquelle *const* représente la constante arbitraire, laquelle est égale à celle quadruplée de l'équation $(c)$. Ainsi une équation différentielle exacte entre deux variables dont l'intégrale est algébrique, peut toujours être résolue exactement.

Mais il peut arriver que l'équation différentielle proposée soit exacte, et que son intégrale ayant des termes affectés de fonctions transcendantes de variables, ne

puisse être résolue par rapport à l'une de ces variables que par une suite indéfinie de termes, fonctions de l'autre variable ; et dans ce cas, la proposée a été intégrée exactement, mais n'a été résolue que par approximation. Par exemple, l'équation

$$xdy + 2ydx + 3x^3ydy + 4x^2y^2dx = 0$$

a pour intégrale complète et exacte celle

$$l(x^4y^3) - \frac{1}{x^4y} = \text{const.}$$ [éq. (305) et (306), art. 346).

Or, si l'on veut tirer de cette dernière équation la valeur de $y$ en fonctions de $x$, ou réciproquement, il me paraît impossible de l'avoir autrement que par une suite indéfinie de termes, c'est-à-dire par approximation.

Il peut encore arriver que l'équation différentielle proposée étant exacte, ne puisse cependant s'intégrer que par approximation par rapport à l'une ou aux deux variables, d'où il s'ensuit une solution de la proposée qui n'est que par approximation ; telles sont, par exemple, 1°. l'équation séparée

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{dxlx}{1 - x}$$

dont on ne peut avoir que l'intégrale par approximation

$$\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{a}\right) + lxl(1-x) + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$
$$= \text{const.}$$ [voy. l'équat. (134), art. 206 et l'art. 261) ;

2°. l'équation

$$y^2dx - yxdy + a^2dy = 0,$$

qui, divisée par $y^3$, donne l'équation différentielle

exacte

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} + \frac{a^y dy}{y^3} = 0,$$

qui ne peut s'intégrer que par approximation, et l'on tire de son intégrale approchée la seule solution par approximation

$$x = \frac{a^y}{2y} + a^y la - \frac{y(la)^2}{6}\left[ly + \frac{la}{1}y + \frac{(la)^2}{1.2}\frac{y}{2} + \text{etc.}\right] + \text{const.}$$

Ainsi toute équation différentielle entre deux variables est exacte, ou peut être rendue exacte d'un nombre infini de manières (art. 360 et 368); mais on ne peut intégrer exactement, et encore moins résoudre exactement toute équation différentielle entre deux variables. Or, quoiqu'une équation différentielle inexacte puisse toujours se rendre exacte (art. 360), cependant les difficultés presque insurmontables que l'on éprouve quelquefois pour obtenir son exactitude, et la grande probabilité que même après avoir trouvé le facteur ou diviseur qui rend intégrable la proposée, on ne pourra avoir qu'une solution approchée de la proposée, a donné l'idée aux Géomètres de franchir tout de suite la difficulté de chercher le facteur intégrant, lorsque ce facteur est trop difficile à trouver, et de déduire directement de la proposée inexacte sa solution par approximation. Cette méthode pour résoudre approximativement les équations différentielles à deux variables, consiste seulement *à donner à la variable dont on veut avoir la valeur en fonctions de l'autre, une valeur hypothétique formée par une suite indéfinie ordonnée suivant les puissances de la seconde variable, et dans laquelle les coefficiens et exposans sont indéterminés; ensuite à différentier cette valeur, prendre dans l'équa-*

*tion différentielle qui en résulte, la valeur du rapport des différentielles des deux variables ; égaler cette valeur avec celle qu'on déduit de la même quantité dans l'équation proposée, ce qui donne une équation qu'on réduira par une simple substitution de la valeur hypothétique de la première variable en fonctions de la seconde, à ne plus renfermer que cette dernière variable ; et ordonnant par rapport aux puissances de la variable qui reste, on rendra l'équation résultante généralement réelle, quelle que soit la valeur qu'on pourra supposer à la variable, en donnant à la partie commune et indéterminée des exposans, une valeur convenable pour qu'il ne résulte aucune absurdité de l'obligation où l'on se trouve d'égaler chaque coefficient à zero, ce qui donnera autant d'équations que de coefficiens indéterminés dans l'équation hypothétique, d'où l'on déduira les valeurs de chacun de ces coefficiens, et les substituant dans l'équation hypothétique, l'on aura la vraie solution par approximation de l'équation différentielle proposée.*

390. Afin d'exposer d'une manière générale et analytique cette méthode, soit considérée l'équation

$$F'(x,y)\,dx + F''(x,y)\,dy = 0 \ldots\ldots (376).$$

Il est clair que si l'on donne à la solution par approximation de cette équation la forme

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+1} + Cx^{\lambda+2} + Dx^{\lambda+3} + \text{etc.} . (377),$$

la valeur de $y$ ne sera complète qu'en tant que par les conditions du problème qui auront donné lieu à la solution de l'équation (376), on devra avoir $y = 0$, lorsque $x = 0$. Mais si pour obtenir toute la généralité que doit avoir complètement une solution d'équation

différentielle, on suppose que $y=q$, lorsque $x=p$; on devra donner à la valeur cherchée de $y$ la forme

$$y=q+A(x-p)^{\lambda}+B(x-p)^{\lambda+1}+C(x-p)^{\lambda+2}+\text{etc.}\ldots\ldots(378),$$

ou, faisant pour abréger,

$$\{z=x-p,\quad \text{d'où}\quad x=z+p\}\ldots\ldots(379),$$

on aura l'équation

$$y=q+Az^{\lambda}+Bz^{\lambda+1}+Cz^{\lambda+2}+\text{etc.}\ldots\ldots(380);$$

d'où faisant attention que $dz=dx$, on tirera celle

$$\frac{dy}{dx}=A\lambda z^{\lambda-1}+B(\lambda+1)z^{\lambda}+C(\lambda+2)z^{\lambda+1}+\text{etc.}\ldots(a).$$

Mais de l'équation proposée (376), on tire celle

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'(x,y)}{F''(x,y)}=-\frac{F'[(z+p),y]}{F''[(z+p),y]};$$

donc retranchant cette dernière équation de celle $(a)$, on aura l'équation

$$F'[(z+p),y]+F''[(z+p),y][A\lambda z^{\lambda-1}+B(\lambda+1)z^{\lambda}+C(\lambda+2)z^{\lambda+1}+\text{etc.}]=0\ldots(381),$$

dans laquelle substituant la valeur hypothétique de $y$ [équat. (380)], ordonnant par rapport aux puissances de $z$, et déterminant la partie $\lambda$ commune à tous les exposans de $z$, de manière qu'on puisse faire chaque coefficient de l'équation résultante égal à zéro, l'on aura autant d'équations que de coefficiens indéterminés A, B, C..... qu'on a introduits dans le calcul, et par conséquent on pourra déterminer leurs valeurs respectives, qu'on substituera ainsi que celle de $z$

[équat. (379)] dans l'équation (380), ce qui donnera la solution demandée.

Pour bien faire sentir l'esprit de la méthode, nous allons d'abord l'appliquer à une équation que nous savons intégrer directement et rigoureusement, et nous verrons l'identité des deux résultats.

APPLICATION I. *Résoudre l'équation*

$$dy + xdy - mydx = 0 \ldots\ldots (b).$$

Comparant identiquement cette équation avec celle (376), on a

$$F'(x, y) \quad \text{ou} \quad F'[(z+p), y] = -my,$$

et

$$F''(x, y) \quad \text{ou} \quad F''[(z+p), y] = 1 + z + p.$$

Substituant ces valeurs et celle de $y$ donnée par l'équation (380), dans l'équation (381), il vient celle

$$\left.\begin{array}{l} -mq + A\lambda \\ +Ap \end{array}\right\} z^{\lambda-1} \left.\begin{array}{l} -mA \\ +B(\lambda+1) \\ +A\lambda \\ +pB(\lambda+1) \end{array}\right\} z^{\lambda} \left.\begin{array}{l} -mB \\ +C(\lambda+2) \\ +B(\lambda+1) \\ +pC(\lambda+2) \end{array}\right\} z^{\lambda+1} \begin{array}{l} -\text{etc.} = 0 \ldots (c), \\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}$$

qui ne peut avoir généralement lieu, quelle que soit la valeur de $z$, qu'en tant que tous les termes s'évanouissent simultanément; mais $m$ et $q$ étant des quantités déterminées, le premier terme $-mq$ ne peut s'évanouir tout seul; donc afin que l'équation ($c$) puisse avoir lieu, il faut réunir ce terme-là avec le suivant, ce qui n'offre aucune difficulté, puisque l'exposant $\lambda$ de $z$ étant une quantité indéterminée, il n'y a qu'à faire

$$\lambda - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = 1,$$

ce qui réduit l'équation ($c$) à celle

$$\left.\begin{array}{l} -mq - Am \\ +A \quad +2B \\ +Ap + A \\ \qquad\quad +2pB \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z - Bm \\ +3C \\ +2B \\ +3pC \end{array}\right\} \begin{array}{l} z^2 - \text{etc.} = 0; \\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}$$

et faisant chacun des coefficiens de cette équation égal à zéro, ensuite déduisant des équations résultantes, les valeurs de A, B, C....., on a

$$A = \frac{mq}{p+1}, \; B = \frac{m(m-1)q}{2(p+1)^2}, \; C = \frac{m(m-1)(m-2)q}{2.3\,(p+1)^3}, \text{ etc.}$$

Enfin substituant ces valeurs ainsi que celles de $\lambda = 1$ et de $z = x - p$ dans l'équation (380), on trouve

$$y = q\left[1 + m\frac{x-p}{p+1} + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{x-p}{p+1}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\left(\frac{x-p}{p+1}\right)^3 + \text{etc.}\right] = q\left[1 + \frac{x-p}{p+1}\right]^m;$$

donc

$$y = q\left[\frac{x+1}{p+1}\right]^m \ldots\ldots\ldots (d)$$

est l'intégrale complète et la solution exacte de la proposée (*). Cette intégrale est identique avec celle

(*) Quoique la méthode que nous donnons ici pour résoudre les équations différentielles, paraisse ne devoir jamais donner que des solutions approchées; cependant il arrive quelquefois, comme dans cet exemple, que la valeur en série indéfinie de l'une des variables en fonctions de l'autre, à laquelle conduit le calcul, est telle, qu'on y reconnaît le développement d'une formule finie; et alors substituant cette formule à la série, on a la solution exacte de l'équation proposée. Mais malheureusement, ces cas-là sont extrêmement rares, et lorsqu'ils arrivent, je suis persuadé que, comme dans cet exemple-ci, l'on pourrait trouver directement la solution exacte par les méthodes ordinaires d'intégration.

d'intégration immédiate que l'on trouve par le moyen de la méthode enseignée à l'article 341 : car l'équation

$$dy + xdy - mydx = 0$$

étant de la forme de celle (296) [art. 341], l'équation (297) donne pour son intégrale

$$\text{const.} = \frac{m(1+x)}{\sqrt[m]{y}};$$

mais si, comme nous l'avons supposé précédemment on a $y = q$ lorsque $x = p$, on aura

$$\text{const.} = \frac{m(1+p)}{\sqrt[m]{q}};$$

donc substituant cette valeur de const. dans l'intégrale précédente, divisant par $m$, élevant toute l'équation résultante à la puissance $m$, enfin prenant la valeur de $y$, on retrouvera l'équation ($d$)

II°. *Résoudre l'équation*

$$dy - ay^2dx - bx^mdx = 0 \ldots\ldots (e)$$

*du comte Riccati, prise dans toute sa généralité.*

Si nous faisions $y = \frac{u}{a}$, le second terme de la transformée que nous obtiendrions par ce moyen, n'aurait plus le coefficient $a$; ainsi pour plus de simplicité dans le calcul, nous pouvons ne nous occuper que de la solution de l'équation

$$dy - y^2dx - bx^mdx = 0 \ldots\ldots (f).$$

Comparant cette équation avec celle (376), on a

$$F'(x,y) = -y^2 - bx^m \quad \text{et} \quad F''(x,y) = 1,$$

ou

$$'[(z+p),y]=-y^2-b\,(p+z)^m \text{ et } F''[(p+z),y]=1.$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle de $y$ [éq. (380)], dans l'équation (381), il en résulte une équation dont les deux premiers termes sont

$$\left.\begin{matrix}-q^2\\-bp^m\end{matrix}\right\}z^0+A\lambda z^{\lambda-1},$$

et dont les autres termes sont affectés des puissances $\lambda$, $\lambda+1\ldots\ldots 2\lambda$, $2\lambda+1\ldots\ldots 1$, $2\ldots\ldots$ de $z$; or, pour que cette équation ait toujours lieu indépendamment des valeurs de $z$, il faut que tous les termes s'évanouissent simultanément, ce qui ne pourra avoir généralement lieu tant que $-(q^2+bp^m)z^0$ sera un terme isolé de l'équation; il faut donc l'associer avec le second $A\lambda z^{\lambda-1}$, ce qui peut se faire en prenant l'indéterminée $\lambda=1$, et alors on aura l'équation

$$\left.\begin{matrix}A+2B\\-q^2-2qA\\-bp^m-bmp^{m-1}\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}z+3C\\-2qB\\-A^2\\-\dfrac{bm(m-1)}{2}p^{m-1}\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}z^2+\text{etc.}=0,\\-\text{etc.}\\-\text{etc.}\\-\text{etc.}\end{matrix}\right\}$$

et égalant chaque coefficient à zéro, l'on aura une suite d'équations d'où se déduiront les valeurs suivantes :

$$A=bp^m+q^2,\quad B=\frac{2q^3+bp^{m-1}(2pq+m)}{2},$$

$$C=\frac{6q^4+bp^{m-2}(4p^2q^2+2mpq+2bp^{m-2}+4p^2q^2+m^2-m)}{6},$$

et ainsi de suite. Substituant ces valeurs dans l'équation (380), on aura la solution par approximation de l'équation générale du comte Riccati.

III. *Résoudre par approximation l'équation*

$$dy - ydx - bx^m dx = 0 \ldots\ldots (g),$$

*avec la condition que l'évanouissement de l'une des deux variables fait aussi évanouir l'autre.*

Nous avons dans ce cas-ci $p = 0$ et $q = 0$, ce qui réduit respectivement les équations (380) et (381) à celles (377) et

$$F'(x, y) + F''(x, y)[A\lambda x^{\lambda-1} + B(\lambda+1)x^{\lambda} + C(\lambda+2)x^{\lambda+1} + \text{etc.}] = 0 \ldots (382).$$

Cela posé, comparant l'équation proposée (g) avec celle (376), on a

$$F'(x, y) = -y - bx^m \quad \text{et} \quad F''(x, y) = 1;$$

substituant ces valeurs, ainsi que celle de $y$ [éq. (377)], dans l'équation (382), il vient celle

$$-bx^m + \lambda A x^{\lambda-1} + \left.\begin{matrix}(\lambda+1)B\\ -A\end{matrix}\right\} x^{\lambda} + \left.\begin{matrix}(\lambda+2)C\\ -B\end{matrix}\right\} x^{\lambda+1} + \begin{matrix}\text{etc.}\\ -\text{etc.}\end{matrix} = 0 \ldots (h).$$

Mais cette équation ne pouvant avoir généralement lieu, quelles que soient les valeurs de $x$, qu'en tant que tous les coefficiens s'évanouissent simultanément, et le premier terme $-bx^m$ ne pouvant s'évanouir isolément, puisque $b$ est une quantité déterminée, il faut réunir ce terme avec le suivant, dans lequel $\lambda$ étant une quantité indéterminée, on peut faire

$$\lambda - 1 = m, \quad \text{d'où} \quad \lambda = m + 1,$$

ce qui change l'équation ($h$) en celle

$$\left.\begin{matrix}(m+1)A\\ -b\end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix}(m+2)B\\ -A\end{matrix}\right\} x^{m+1} + \left.\begin{matrix}(m+3)C\\ -B\end{matrix}\right\} x^{m+2} + \begin{matrix}\text{etc.}\\ +\text{etc.}\end{matrix} = 0,$$

et faisant tous les coefficiens égaux à zéro, on aura une suite d'équations, d'où l'on tirera à l'ordinaire,

$$A = \frac{b}{m+1}, \quad B = \frac{b}{(m+1)(m+2)},$$
$$C = \frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \text{ etc.};$$

et substituant ces valeurs, ainsi que celle de $\lambda = m+1$ dans l'équation (382), on aura

$$y = \frac{b}{m+1} x^{m+1} \left[ 1 + \frac{1}{m+2} x \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m+2)(m+3)} x^2 + \text{etc.} \right] \ldots\ldots (i)$$

qui est la solution par approximation de la proposée ($g$).

Si l'on fait dans cette équation ($i$), $m = 0$, on aura

$$y = b \left( x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2.3} x^3 + \text{etc.} \right) = b (e^x - 1),$$

ce qui est réellement l'intégrale complète et exacte de l'équation

$$dy - ydx - bdx = 0,$$

à laquelle se réduit celle ($g$) lorsque $m = 0$, ainsi qu'il est aisé de le trouver directement.

391. De même que nous avons résolu par approximation les équations différentielles, en prenant la valeur de $y$ en $x$ et constantes; on pourra aussi, par le moyen de nos formules (377).....(382), déterminer la valeur de $x$ en $y$, lorsqu'on aura lieu de croire par la nature de la question qui a donné lieu à ces calculs, que la série en $y$ sera plus simple ou plus convergente

convergente que celle en $x$. Pour y parvenir, il n'y aura qu'à changer dans l'équation proposée $y$ en $x$, et réciproquement, et prendre comme ci-dessus la valeur de $y$ en $x$; enfin étant parvenu à cette solution, on y remettra $x$ pour $y$, et réciproquement : on en verra un exemple dans l'article suivant.

392. De ce que nous avons dit précédemment, nous conclurons une méthode bien simple pour résoudre le problème suivant, qui présenterait de grandes difficultés si l'on s'y prenait de toute autre manière.

PROBLÈME. *Etant donnée une équation finie entre des fonctions circulaires et logarithmiques de deux variables, trouver la valeur de l'une de ces variables par une suite de termes qui ne soient que des fonctions algébriques et réelles de l'autre variable* (*).

SOLUTION. Par le moyen de la proposée, on déter-

---

(*) Une fonction circulaire pouvant toujours se réduire à une fonction logarithmique, et réciproquement (art. 246 et 247), il est clair qu'on pourra réduire la proposée à une équation qui ne contiendra plus qu'une espèce de fonctions transcendantes : mais à cause qu'alors la fonction convertie de son espèce première à la seconde, est affectée d'imaginaires dont on ne peut la débarrasser, le problème offre les mêmes difficultés que dans le principe. Par exemple, si l'on propose de déduire de l'équation

$$\text{arc}\,(\sin = x) = ly,$$

la valeur de $y$ en fonctions algébriques et réelles de $x$, la proposée pourra se changer en l'équation

$$ly = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,[x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}]\ [\text{équat. (188), art. 247}],$$

d'où

$$y = [x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)}]^{\sqrt{-1}};$$

or, il me parait extrêmement difficile, et je crois même impossible, de dépouiller le développement de cette quantité de l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

minera la valeur $q$ de $y$ lorsqu'on fait $x = p$; ensuite on différentiera l'équation, et on résoudra par approximation l'équation différentielle par rapport à $y$ ou par rapport à $x$, par la méthode enseignée précédemment.

APPLICATION. *Tirer de l'équation*

$$\mathrm{ly} = \mathrm{arc}\,(\sin = \mathrm{x}) \ldots\ldots\ldots (a),$$

*la valeur de* y *exprimée par une suite de fonctions algébriques et réelles de* x.

Cette équation donne $y = 1$ lorsque $x = 0$; soit donc fait $p = 0$ et $q = 1$. Cela posé, différentiant l'équation $(a)$, ce qui donne

$$ydx - \sqrt{(1 - xx)}\, dy = 0,$$

et comparant identiquement cette dernière équation avec celle (376), on aura

$$F'(x,y) = y \quad \text{et} \quad F''(x,y) = -\sqrt{1 - xx}:$$

Substituant ces valeurs ainsi que celle de

$$y = 1 + Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+1} + \text{etc.}\ldots\ldots(b)\ [\text{équat. } (380)],$$

dans l'équation (381), il vient celle

$$1 + Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+1} + Cx^{\lambda+2} + \text{etc.} - \sqrt{1 - xx}\,[A\lambda x^{\lambda-1}$$
$$+ B(\lambda+1)\,x^{\lambda} + C(\lambda+2)\,x^{\lambda+1} + \text{etc.}] = 0 \ldots\ldots (c).$$

Mais

$$\sqrt{1 - xx} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2.2} - \frac{3x^6}{2^3.2.3} - \frac{3.5x^8}{2^4.2.3.4} - \text{etc.}(d).$$

Donc substituant cette valeur dans l'équation $(c)$, il est aisé de voir, avant de se donner la peine d'effectuer la multiplication, que l'équation résultante ordonnée

suivant les puissances de $x$, commencera par ces deux termes $1 - A\lambda x^{\lambda-1}$; or, cette équation devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $x$, ce qui exige que chaque terme s'évanouisse, il faut nécessairement réunir ces deux termes en un seul, en faisant l'indéterminée $\lambda = 1$; ainsi l'on n'a plus qu'à multiplier le développement ($d$) par la série

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + \text{etc.}$$

Effectuant cette multiplication, et ordonnant le produit avec la série

$$1 + Ax + Bx^2 + 3Cx^3 + \text{etc.},$$

l'équation ($c$) se réduit à celle

$$\left.\begin{matrix} 1 + A \\ -A - 2B \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + B \\ -3C \\ + \frac{A}{2} \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + C \\ -4D \\ + B \end{matrix}\right\} x^3 \begin{matrix} + \text{etc.} = 0; \\ - \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{matrix}$$

d'où l'on tire à l'ordinaire

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{5}{24}, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle de $\lambda = 1$ dans l'équation ($b$), on a

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (e),$$

ce qui est l'équation demandée.

De l'équation proposée ($a$), on tire

$$y = e^{\text{arc}(\sin = x)},$$

et faisant

$$z = \text{arc}(\sin = x), \quad \text{d'où} \quad x = \sin z,$$

on a

$$y = e^z,$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation ($e$), il viendra depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 100°$,

$$e^z = 1 + \sin z + \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{\sin^3 z}{3} + \frac{5 \sin^4 z}{24} + \text{etc.... } (f).$$

Proposons-nous maintenant de déduire de l'équation donnée ($a$) la valeur de $x$ en une suite indéfinie des fonctions algébriques et réelles de $y$.

Pour atteindre ce but par le procédé le plus simple, écrivons la proposée ($a$) comme il suit :

$$\text{arc}\,(\sin = y) = lx \ldots\ldots (g) \text{ [voyez l'art. 391]},$$

et alors nous chercherons la valeur de $y$ en fonctions algébriques et réelles de $x$. Cela posé, nous commencerons par observer que $y = 0$ lorsque $x = 1$; donc $p = 1$ et $q = 0$. Actuellement différentiant l'équation ($g$), nous avons celle

$$xdy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0,$$

qui, comparée avec l'équation (376), donne

$$F'(x,y) = -\sqrt{1-y^2} \quad \text{et} \quad F''(x,y) = x,$$

ou

$$F'[(z+1),y] = -\sqrt{1-y^2} \quad \text{et} \quad F''[(z+1),y] = z+1.$$

Donc, prenant pour figuratrice de la valeur de $y$, l'équation

$$y = Az^{\lambda} + Bz^{\lambda+1} + Cz^{\lambda+2} + \text{etc.} \ldots (h) \text{[éq. (380)]},$$

et substituant toutes ces valeurs dans l'équation (381), nous aurons pour les deux premiers termes de l'équation résultante $-1 + A\lambda z^{\lambda-1}$ qui, nécessairement, doivent

pour la réalité de cette équation, se réduire à un seul terme, ce que nous obtiendrons en faisant la quantité indéterminée $\lambda = 1$ ; d'où il s'ensuivra, tout calcul fait, l'équation indéfinie

$$\left.\begin{array}{r} A + 2B \\ -1 + A \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{r} + 3C \\ + 2B \\ + \frac{1}{2}A^2 \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{r} + 4D \\ + 3C \\ + AB \end{array}\right\} z^3 + \text{etc.} = 0;$$

et faisant chaque coefficient égal à zéro, nous en déduirons par les méthodes ordinaires de l'élimination,

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{6}, \quad D = 0, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs ainsi que celle de $\lambda = 1$ dans l'équation ($h$), ou plutôt dans celle

$$y = A(x-1) + B(x-1)^2 + C(x-1)^3 + \text{etc.}$$

Enfin remettant $x$ à la place de $y$, et réciproquement, nous aurons pour équation demandée,

$$x = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{6}(y-1)^3 - \frac{1}{12}(y-1)^5 + \text{etc.} \ldots (i).$$

---

# CHAPITRE VIII.

*Des équations à deux variables, dans lesquelles les différentielles du premier ordre se trouvent élevées à des puissances entières plus grandes que l'unité, ou se multiplient entre elles.*

393. Les équations que nous nous proposons de résoudre dans ce chapitre, sont comprises dans la

forme générale

$$dy^m + f'(x,y)\,dy^{m-1}dx + f''(x,y)\,dy^{m-2}dx^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f^{m'}(x,y)\,dx^m = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (383),$$

et il est aisé de voir que, quoique cette équation soit du $m^{ième}$ degré, elle n'est pourtant que du premier ordre, puisqu'elle n'est composée que des différentielles du premier ordre $dx$ et $dy$ élevées à des puissances entières, ou multipliées entre elles.

Les équations de la forme de celle (383) s'intègrent comme celle du premier degré à deux variables. En effet, si nous divisons cette équation par $dx^m$, nous aurons celle du $m^{ième}$ degré

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + f'(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + f''(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-2} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f^{m'}(x,y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (384),$$

qui, résolue, donnera un nombre $m$ d'équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y) \quad \text{ou} \quad dy = \varphi(x,y)\,dx,$$

lesquelles étant successivement intégrées suivant les méthodes enseignées précédemment, donneront un nombre $m$ d'équations primitives, qui toutes satisferont à la proposée, soit séparément, soit combinées entre elles.

Prenons pour exemple l'équation différentielle du troisième degré suivante, que nous avons tout de suite mis sous la forme de celle (384)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (xy + x^2 + y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ (x^3y + y^3x + x^2y^2)\frac{dy}{dx} - x^3y^3 = 0 \ldots (a).$$

Cette équation étant résolue, donne les trois équations suivantes du premier degré

$$\frac{dy}{dx}=xy,\ \frac{dy}{dx}=x^2 \text{ et } \frac{dy}{dx}=y^2, \text{ ou } \frac{dy}{y}=xdx\ldots(b);$$

$$(c)\ldots\ldots dy=x^2dx \text{ et } \frac{dy}{y^2}=dx\ldots\ldots(d$$

dont les intégrales sont respectivement

$$(b')\ldots\ldots y=e^{\frac{xx}{2}+c},\quad y=\frac{x^3}{3}+c'\ldots\ldots(c'$$

et $$y=-\frac{1}{x+c''}\ldots\ldots(d'),$$

en représentant par $c$, $c'$, et $c''$ des constantes arbitraires. Or, chacune de ces trois équations primitives $(b')$, $(c')$ et $(d')$ satisfait à la proposée $(a)$; de même leur produit

$$\left(y-e^{\frac{xx}{2}-c}\right)\left(y-\frac{x^3}{3}-c'\right)\left(y+\frac{1}{x+c''}\right)=0\ldots(e)$$

satisfait à la proposée, car différentiant cette équation $(e)$, il vient

$$dy\left[\left(y-e^{\frac{xx}{2}-c}\right)\left(y-\frac{x^3}{3}-c'\right)+\left(y-\frac{x^3}{3}-c'\right)\right.$$
$$\left.\times\left(y+\frac{1}{x+c''}\right)+\left(y-e^{\frac{xx}{2}-c}\right)\left(y+\frac{1}{x+c''}\right)\right]$$
$$=dx\left[\frac{\left(y-e^{\frac{xx}{2}-c}\right)\left(y-\frac{x^3}{3}-c'\right)}{(x+c'')^2}\right.$$
$$+xe^{\frac{xx}{2}-c}\left(y-\frac{x^3}{3}-c'\right)\left(y+\frac{1}{x+c''}\right)$$
$$\left.+x^2\left(y-e^{\frac{xx}{2}-c}\right)\left(y+\frac{1}{x+c''}\right)\right]\ldots\ldots(f);$$

et substituant successivement à la place de $y$ ses valeurs données par les équations $(b')$, $(c')$ et $(d')$, on retrouve respectivement à ces trois substitutions, les trois équations différentielles $(b)$, $(c)$ et $(d)$, qui évidemment satisfont elles-mêmes à l'équation proposée $(a)$, puisqu'elles en sont les racines.

394. Mais à cause de l'extrême difficulté attachée à la résolution des équations littérales des degrés supérieurs, les Géomètres cherchent par le moyen de certains artifices analytiques, qui bien souvent réussissent, à trouver le rapport des deux variables $x$ et $y$, en ne résolvant algébriquement que des équations d'un degré inférieur à celui $m$ de la proposée. Voici quelques-uns des cas où l'on réussit.

*Premier cas.* Soit l'équation générale

$$dy^m + f'y dy^{m-1} dx + f''y dy^{m-2} dx^2 \ldots f^{m'} y dx^m = 0 \ldots (385),$$

dans laquelle je suppose que $f'y$, $f''y \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $y$, et que cette variable n'y est élevée qu'à des puissances inférieures au degré $m$ de la proposée (385).

Faisant

$$dx = zdy \ldots\ldots (a);$$

substituant cette valeur dans l'équation (385), et divisant cette dernière équation par $dy^m$, on a celle algébrique

$$1 + f'yz + f''yz^2 + f'''yz^3 \ldots + f^{m'} yz^m = 0 \ldots\ldots (b),$$

qui étant résolue par rapport à $y$, donne un nombre plus petit que $m$ de racines, telles que

$$(c) \ldots\ldots y = \varphi z, \quad \text{d'où} \quad dy = \varphi' z dz \ldots\ldots (d).$$

Substituant cette valeur de $dy$ dans l'équation $(a)$, il vient

$$dx = z\varphi' z dz,$$

d'où

$$x = \int z\varphi' z dz \ldots\ldots (e).$$

Ainsi par le moyen des équations $(c)$ et $(e)$, on aura pour une valeur quelconque de $z$, celles qui se correspondent de $x$ et $y$; on aura donc résolu le problème qui a donné lieu à l'équation différentielle (385). On remarquera qu'on ne pourrait avoir l'équation directe de relation des deux variables $x$ et $y$, qu'en résolvant l'équation $(b)$ par rapport à $z$, et substituant cette valeur de $z$ dans l'équation $(e)$; mais la difficulté de résoudre l'équation $(b)$ étant la même que celle attachée à la résolution de la proposée (385) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, puisqu'elles sont toutes les deux du degré $m$, on ne remplirait plus l'objet de simplification qu'on s'est proposé.

Exemple. *Déduire de l'équation différentielle du quatrième degré*

$$dy^4 + ydy^3dx - dx^4 = 0 \ldots\ldots (f),$$

*les relations des deux variables* y *et* x *qui satisfont à la question qu'on suppose avoir donné lieu à l'équation* $(f)$.

Faisant

$$dx = zdy \ldots\ldots (g),$$

la proposée $(f)$ se transforme en celle

$$1 + yz - z^4 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{z^4 - 1}{z} \ldots\ldots\ldots (h);$$

et

$$dy = 3z^2dz + \frac{dz}{z^2};$$

Substituant cette valeur de $dy$ dans l'équation $(g)$, on a celle

$$dx = 3z^4dz + \frac{dz}{z},$$

laquelle étant intégrée donne

$$x = \frac{3}{5}z^5 + lz + \text{const.} \ldots\ldots (i).$$

Supposons pour déterminer la constante, que $y = 0$ lorsque $x = 0$; ce qui donne, par le moyen de l'équation $(h)$, $z = 1$; et substituant cette valeur de $z$ ainsi que celle de $x = 0$ dans l'équation $(i)$, on a

$$\text{const.} = -\frac{3}{5}:$$

donc substituant cette valeur de const. dans la même équation $(i)$, on aura complètement

$$x = \frac{3}{5}(z^5 - 1) + lz.$$

Cette dernière équation, concurremment avec celle $(h)$, résout complètement le problème qui est censé exprimé analytiquement par l'équation $(f)$.

395. *Second cas.* Mais si supposant toujours que dans l'équation (385), $f'y$, $f''y$..... sont des fonctions rationnelles de $y$, nous considérons actuellement que parmi ces fonctions il y en a qui renferment $y$ élevée à une puissance $> m$, il est évident qu'alors l'équation $(b)$ de l'article précédent étant d'un plus haut degré par rapport à $y$ que ne l'est la proposée (385) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, l'artifice indiqué précédemment ne fera que compliquer le calcul, au lieu de le simplifier; il faudra donc avoir recours à quelque

autre artifice : celui dont on se sert en pareilles circonstances, est de faire $\frac{dy}{dx} = yz$; ou, suivant les circonstances, $\frac{dx}{dy} = yz$; de cette manière, l'on parvient à une équation algébrique dont tous les termes sont multipliés par un même facteur variable, et qui, conséquemment, s'abaisse à un degré quelquefois inférieur à celui $m$ de la proposée par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et alors résolvant l'équation résultante par rapport à la variable $y$ qui reste élevée à une puissance moindre que $m$; et substituant les valeurs de cette variable dans celle des deux équations

$$\frac{dy}{dx} = yz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = yz$$

qu'on a d'abord posée, on aura une équation différentielle du premier degré entre l'ancienne variable $x$ et l'introduite $z$; d'où, par l'intégration, on aura une équation primitive entre $x$ et $z$ qui résoudra, conjointement avec celle qu'on a déjà eue entre $y$ et $z$, le problème proposé.

EXEMPLE I. *Trouver les valeurs correspondantes de* x *et de* y *qui satisfont au problème dont l'équation finale est*

$$dy^4 + y^4 dy dx^3 + y^6 dx^4 = 0 \ldots (a).$$

Divisant la proposée $(a)$ par $dx^4$, et faisant

$$\frac{dy}{dx} = yz \ldots\ldots (b),$$

il vient

$$y^4 z^4 + y^5 z + y^6 = 0;$$

et divisant par $y^4$, on a l'équation

$$z^4 + yz + y^2 = 0,$$

qui, résolue par rapport à $y$, donne

$$y = \frac{z[1 \pm \sqrt{(1-4z^2)}]}{2} \ldots\ldots (c),$$

d'où

$$dy = -\frac{dz[\sqrt{1-4z^2} \mp 1]}{2\sqrt{1-4z^2}}.$$

Substituant ces valeurs de $y$ et de $dy$ dans l'équation ($b$), il vient celle

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1-4z^2}},$$

qui, intégrée, donne l'équation

$$x = l\left[\frac{z \times \text{const.}}{1 \pm \sqrt{1-4z^2}}\right];$$

laquelle, conjointement avec l'équation ($c$), résout le problème exprimé analytiquement par l'équation ($a$).

Exemple II. *Trouver les valeurs correspondantes de* x *et de* y *qui satisfont au problème qui dépend de l'équation*

$$y^5dy^5 + y^2dy^3dx^2 + dx^5 = 0 \ldots\ldots (d).$$

Divisant la proposée par $dy^5$, et faisant

$$\frac{dx}{dy} = yz, \quad \text{d'où} \quad dx = zydy \ldots\ldots (e),$$

il vient

$$y^5 + y^4z^2 + y^5z^5 = 0, \quad \text{ou} \quad y + z^2 + yz^5 = 0,$$

d'où

$$y = \frac{-z^2}{1+z^5} \ldots\ldots (f),$$

et $$ydy = \frac{z^3dz\,(2 - 3z^5)}{(1+z^5)^3}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ($e$), il vient celle

$$dx = \frac{2z^4dz - 3z^9dz}{(1+z^5)^3},$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{3}{5\,(1+z^5)} - \frac{1}{2\,(1+z^5)^2} + \text{const.}$$

Cette dernière équation et celle ($f$) sont celles qui satisfont à la question.

396. *Troisième cas.* Si l'équation (385) étant telle que nous l'avons supposée dans l'article précédent, l'artifice indiqué dans le même article ne réussit pas, c'est-à-dire, s'il conduit à une équation en $y$ d'un degré pour le moins aussi élevé que la proposée par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on fera

$$y = \frac{1}{u} \ldots\ldots\ldots (a),$$

d'où résultera une équation différentielle du $m^{ième}$ degré entre les variables $x$ et $u$ qui, traitée comme celles que nous avons examinées dans les deux articles précédens, pourra donner sans peine le rapport des deux variables $x$ et $u$; et par conséquent, à cause de l'équation de relation ($a$), donnera aussi le rapport demandé des deux variables $x$ et $y$ au moyen, comme précédemment, d'une troisième variable intermédiaire $z$.

EXEMPLE. *Etant donnée l'équation*

$$dy^5 + y^9dydx^4 + y^7dy^2dx^3 + y^{11}dx^5 = 0 \ldots\ldots (b),$$

*on demande d'en conclure des équations qui donnent les valeurs correspondantes de* x *et de* y.

Soit qu'on pose l'une ou l'autre équation

$$dx = zdy, \qquad \frac{dy}{dx} = yz,$$

on ne peut transformer la proposée en une équation plus aisée à résoudre par rapport à $y$ que l'équation ($b$) par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Essayons donc de faire

$$y = \frac{1}{u}, \quad \text{d'où} \quad dy = -\frac{du}{u^2},$$

et substituons ces valeurs dans la proposée ($b$), ce qui nous donnera, après avoir multiplié toute la transformée par $u^{11}$, l'équation

$$-udu^5 - dudx^4 + du^2dx^3 + dx^5 = 0 \ldots\ldots (c).$$

Faisant $dx = zdu$, et divisant par $du^5$, l'équation ($c$) se transforme en celle

$$-u - z^4 + z^3 + z^5 = 0, \quad \text{d'où} \quad u = z^5 + z^3 - z^4;$$

donc

$$y\left(=\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{z^3(z^2 - z + 1)} \ldots\ldots (d),$$

et

$$du = (5z^4 + 3z^2 - 4z^3)\,dz.$$

Mais $dx = zdu$; donc

$$dx = (5z^5 + 3z^3 - 4z^4)\,dz;$$

d'où l'on tire par l'intégration, l'équation

$$x = z^4\left[\frac{5}{6}z^2 + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}z\right] + \text{const.};$$

qui résout, conjointement avec l'équation ($d$), la question proposée.

397. *Quatrième cas.* L'équation proposée étant homogène, et le degré d'homogénéité des variables primitives étant plus petit que celui de leurs différentielles, on n'aura à résoudre qu'une équation du même degré que celui d'homogénéité des deux variables primitives, et à intégrer des fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable, pour obtenir deux équations qui donneront les valeurs correspondantes des deux variables qui entrent dans la proposée. En effet, soit généralement l'équation différentielle homogène

$$y^{a-e}x^e dy^m \ldots + y^a dy^{m-n} dx^n + y^{a-b} x^b dy^{m-p} dx^p$$
$$\ldots\ldots + x^a dy^{m-q} dx^q \ldots\ldots + y^{a-c} x^c dx^m = 0 \ldots\ldots (386),$$

dans laquelle nous supposons que le degré $a$ d'homogénéité des deux variables $x$ et $y$ est plus petit que celui $m$ de leurs différentielles. Soit fait

$$dy = z dx \ldots\ldots (a),$$

substitué cette valeur dans l'équation proposée (386), et divisé par $dx^m$, ce qui donnera l'équation

$$y^{a-e}x^e z^m \ldots + y^a z^{m-n} + y^{a-b} x^b z^{m-p} \ldots + x^a z^{m-q} \ldots$$
$$\ldots + y^{a-c} x^c = 0 \ldots\ldots\ldots (b),$$

qui, faisant

$$y = xu \ldots\ldots\ldots (c)$$

et divisant par $x^a$, se transforme en l'équation

$$u^{a-e} z^m \ldots\ldots + u^a z^{m-n} + u^{a-b} z^{m-p} \ldots\ldots + z^{m-q} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + u^{a-e} = 0 \ldots\ldots\ldots (d),$$

qui n'est que du degré $a$ par rapport à la variable $u$; ainsi en résolvant cette équation ($d$), on aura un nombre $a$ de racines, telles que celle

$$(e) \ldots\ldots u = fz, \quad \text{d'où} \quad du = f'z dz \ldots\ldots (f).$$

Mais de l'équation ($c$), on tire celle

$$dy = xdu + udx;$$

donc par substitution dans cette dernière équation des valeurs de $u$ et de $du$ [équat. ($e$) et ($f$)], on aura celle

$$dy = xf'zdz + fzdx.$$

Egalant cette valeur de $dy$ avec celle de l'équation hypothétique ($a$), et prenant dans la résultante la valeur de $\frac{dx}{x}$, on aura

$$\frac{dx}{x} = \frac{-f'zdz}{fz-z};$$

d'où faisant pour abréger,

$$\varphi z = -\frac{f'z}{fz-z} \ldots\ldots\ldots (g),$$

on tire

$$x = e^{\int \varphi z dz + \text{const.}} \ldots\ldots (h).$$

Enfin mettant dans la seconde équation hypothétique ($c$) les valeurs de $u$ et de $x$ [ équat ($e$) et ($h$)], on aura celle

$$y = fz\left[e^{\int \varphi z dz + \text{const.}}\right] \ldots\ldots (i).$$

qui, conjointement avec celle ($h$), résoudra la question proposée.

De cette suite d'opérations, on peut conclure la règle générale suivante qui abrégera considérablement les calculs à faire.

*Effacez* x *et* dx *dans la proposée, substituez-y* u *et* z *à la place des quantités respectives* y *et* dy *; résolvez l'équation résultante par rapport à* u, *et ayant les valeurs de* u *en fonctions de* z, *vous aurez les quantités telles que* $\varphi$z *par le moyen de l'équation* ($g$), *d'où*

*d'où, par les règles du seul calcul intégral des fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable, vous conclurez les valeurs de* x, *et par conséquent les correspondantes de* y *en fonctions de* z [équat. ($h$) et ($i$)].

On remarquera, 1°. que dans la règle que nous venons de prescrire, on peut, lorsque c'est convenable pour la facilité du calcul, faire changer réciproquement de places aux deux variables $y$ et $x$.

2°. Que cette méthode donnera autant de solutions qui satisferont à la proposée, qu'il y a d'unités dans le degré d'homogénéité des deux variables, puisque l'équation ($d$) donne ce nombre de valeurs de $u$ en fonctions de $z$.

EXEMPLE. *Déduire de l'équation différentielle du sixième degré*

$$y^2dx^6 - yxdxdy^5 - 2yxdydx^5 + x^2dy^6 + x^2dy^2dx^4 = 0 \ldots (k),$$

*les deux équations servant à déterminer les valeurs correspondantes de* x *et de* y *qui satisfont à la question dont l'équation* (k) *est supposée la traduction analytique.*

Effaçant dans l'équation proposée la variable $x$ et sa différentielle $dx$; ensuite substituant respectivement aux quantités $y$ et $dy$ celles $u$ et $z$, on a l'équation

$$u^2 - uz^5 - 2uz + z^6 + z^2 = 0 \ldots\ldots (l),$$

qui, étant résolue par rapport à la variable $u$, donne successivement

$$\{u = z \quad \text{et} \quad u = z(z^4 + 1)\} \ldots\ldots (m).$$

Ainsi l'on a pour la première de ces valeurs de $u$,

$$\{fz = z, \quad f'z = 1\} \ldots (n),$$

et pour la seconde, on a

$$\{fz = z(z^4+1), \quad f'z = 5z^4+1\} \ldots\ldots (p).$$

Les valeurs en $(n)$ substituées dans l'équation $(g)$, donnent $\varphi z = -\frac{1}{0}$, et substituant cette valeur dans celles de $x$ et de $y$ [équat. $(h)$ et $(i)$], l'on n'aurait pour ces deux variables que des valeurs infinies; ainsi rejetant la première valeur de $u$ donnée par l'équation $(l)$, nous nous en tiendrons à la seconde en $(m)$, et substituant les valeurs de $fz$, $f'z$ [équat. $(p)$] dans l'équation $(g)$, il viendra

$$\varphi z = -\frac{(5z^4+1)}{z^5}, \quad \text{d'où} \quad \int \varphi z dz = 5l\frac{1}{z} + \frac{1}{4z^4},$$

et substituant ces valeurs dans les équations $(h)$ et $(i)$, on aura les deux suivantes

$$x = \frac{1}{z^6} e^{\frac{1}{4z^4}} + \text{const.},$$

et $$y = [z^5+z]\left[\frac{1}{z^5} e^{\frac{1}{4z^4}} + \text{const.}\right]$$

qui sont les équations demandées.

Avant de continuer nos recherches sur quelques-autres cas, où l'on résout assez aisément les problèmes indéterminés entre deux variables, qui conduisent finalement à une équation différentielle d'un degré supérieur, nous ferons une application de ce qui précède à la solution d'un problème qui, comme nous le verrons dans la suite, est utile dans la haute Géométrie.

398. Problème. *Etant donnée une équation primitive*

$$F(x, y, u) = 0 \ldots\ldots (a)$$

*entre trois variables, et ayant entre ces mêmes variables, l'équation différentielle du second degré*

$$du^2 = dy^2 + dx^2 \ldots\ldots (b),$$

*on demande l'équation de relation entre deux quelconques de ces variables.*

SOLUTION GÉNÉRALE. Soient $y$ et $x$ les deux variables dont on cherche le rapport. Cela posé, il n'y a qu'à prendre dans la proposée ($a$) la valeur de $u$ (*), différentier l'équation résultante, élever l'équation différentielle au quarré, égaler la valeur de $du^2$ qu'on en déduit, avec celle donnée par l'équation ($b$); alors on aura une équation différentielle du second degré qui, étant résolue, conduira à une équation différentielle du premier degré entre les variables $x$ et $y$; ainsi il n'y aura qu'à intégrer cette équation pour avoir celle de relation demandée.

On voit que, théoriquement parlant, la solution du problème proposé n'offre aucune difficulté; mais elle peut, non-compris celles qui tiennent seulement à la simple analyse algébrique, présenter encore beaucoup de difficultés pour l'intégration de l'équation différentielle du premier degré, à laquelle on a été conduit.

Cependant cette difficulté diminue beaucoup si la proposée ($a$) est homogène par rapport aux trois variables, puisque opérant comme nous l'avons dit précédemment, il est clair que l'équation différentielle du premier degré à laquelle on parviendra, sera homogène, et par conséquent séparable (art. 339).

---

(*) Nous continuons, pour abréger, à ne considérer qu'une seule des racines des équations d'un degré supérieur, que nous supposons décomposée en toutes ses racines.

EXEMPLE. *Etant données les deux équations*

$(b)\ldots du^2 = dy^2 + dx^2$, et $u^2 = y^2 + nx^2 \ldots (c)$,

*trouver l'équation qui exprime la relation entre les deux variables* x *et* y.

Différentiant l'équation $(c)$, il vient

$$du = \frac{ydy + nxdx}{\sqrt{y^2 + nx^2}},$$

donc $du^2$, ou

$$dy^2 + dx^2 = \frac{y^2dy^2 + 2nxydydx + n^2x^2dx^2}{y^2 + nx^2} \ldots\ldots (d).$$

Chassant le dénominateur, réduisant, divisant par $dx^2$, prenant la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ensuite multipliant par $dx$, on a l'équation homogène et seulement du premier degré

$$xdy - ydx = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\, dx\, \sqrt{y^2 + nx^2}.$$

Donc faisant $y = zx$, ce qui donne la transformée

$$\frac{dx}{x} = \pm\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z^2 + n}},$$

et intégrant, il vient

$$lx = l\,\text{const} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)}\, l\left[z + \sqrt{n + z^2}\right]$$

[*voyez* l'art. 339 et l'équat. (138)]; substituant à la place de $z$ sa valeur $\frac{y}{x}$, ensuite passant des logarithmes aux quantités algébriques, on a

$$\frac{x}{\text{const.}} = \left\{\frac{y + \sqrt{nx^2 + y^2}}{x}\right\}^{\pm\sqrt{\frac{n}{n-1}}} \ldots (e),$$

ce qui est l'équation demandée, tant que $n$ est différent de zéro et de l'unité. Le cas de $n = 0$ ne peut être considéré, puisqu'il réduit la proposée ($c$) aux deux variables $u$ et $y$. Quant au cas où l'on aurait $n = 1$, alors remontant à l'équation ($d$), on voit qu'elle se réduirait à celle

$$y^2dx^2 + x^2dy^2 - 2xydxdy = 0, \quad \text{ou} \quad ydx - xdy = 0,$$

et intégrant, on aurait

$$y = x \times \text{const.}$$

599. La solution que nous venons de donner est celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit; mais en s'y prenant comme l'ont fait quelques Géomètres, pour résoudre ce problème, on parvient à une formule finale qui donne la solution générale demandée. Cette dernière solution étant plus élégante que celle indiquée dans l'article précédent, nous croyons utile de la faire connaître à nos lecteurs.

Soit fait

$$y = zx \ldots (a), \quad u = vx \ldots (b), \quad dy = tdx \ldots (c),$$

d'où $dy$ ou

$$tdx\,[\text{équat. } (c)] = zdx + xdz \ldots (d),$$

et

$$du = vdx + xdv \ldots\ldots (e).$$

Mais par hypothèse,

$$du = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{t^2 + 1}\,[\text{équat. } (c)];$$

donc égalant cette valeur de $du$ avec celle donnée par l'équation ($e$), on aura celle

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{(t^2+1)} - v} \ldots\ldots (f).$$

Or, nous remarquerons que l'équation primitive

$$F(x,y,u)=0$$

donnée par l'énoncé du problème, étant supposée homogène, il est clair qu'en y substituant les valeurs hypothétiques de $y$ et de $u$ [équat. $(a)$ et $(b)$], on aura une équation qui ne contiendra plus que les deux variables $v$ et $z$, d'où l'on tirera

$$(g)\ldots\ldots v=fz\,,\quad dv=f'zdz\ldots\ldots(h)\,;$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation $(f)$, il viendra

$$\frac{dx}{x}=\frac{f'zdz}{\sqrt{(t^2+1)}-fz}\ldots\ldots\ldots(i).$$

Mais de l'équation $(d)$ on tire

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{t-z}\ldots\ldots\ldots(k)\,;$$

donc égalant cette valeur de $\frac{dx}{x}$ avec celle donnée par l'équation $(i)$, on aura

$$(t-z)f'z=\sqrt{t^2+1}-fz\,,$$

d'où l'on tirera

$$t-z=\frac{z-fzf'z\pm\sqrt{(f'z)^2+[fz-zf'z]^2-1}}{(f'z)^2-1}\,,$$

ou, multipliant le numérateur pris avec le signe $+$ devant le radical et le dénominateur du second membre par le numérateur pris avec le signe négatif devant le radical, il viendra

$$t-z=\frac{1+z^2-(fz)^2}{f'zfz-z-\sqrt{\{(f'z)^2+[fz-zf'z]^2-1\}}}\,;$$

et substituant cette valeur de $t-z$ dans l'équation

$(k)$, on aura

$$\frac{dx}{x} = \frac{f'zfzdz - zdz}{1 + z^2 - (fz)^2}$$

$$- \frac{dz\sqrt{(f'z)^2 + [fz - zf'z]^2 - 1}}{1 + z^2 - (fz)^2} \ldots (l).$$

Mais le premier terme du second membre de cette équation est égale à la quantité $-\frac{[fzdfz - zdz]}{(fz)^2 - z^2 - 1}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{2}\, l\,[(fz)^2 - z^2 - 1]$; donc l'intégrale de l'équation $(l)$ est

$$lx = l.\text{const.} - \tfrac{1}{2}\, l\,[(fz)^2 - z^2 - 1]$$

$$- \int \frac{dz\sqrt{(f'z)^2 + [fz - zf'z]^2 - 1}}{1 + z^2 - (fz)^2} \ldots\ldots (m).$$

Si nous voulons faire l'application de cette formule $(m)$ au même exemple que celui de l'article précédent, nous substituerons dans l'équation proposée

$$u^2 = y^2 + nx^2,$$

les valeurs respectives $zx$, $vx$ de $y$ et de $u$ [équat. $(a)$ et $(b)$]; ce qui nous donnera la transformée

$$v^2 = z^2 + n,$$

d'où $v$ ou

$$fz = \sqrt{z^2 + n} \quad \text{et} \quad f'z = \frac{z}{\sqrt{(z^2 + n)}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(m)$, et comprenant dans la constante arbitraire, la quantité constante $-\frac{1}{2}\, l\,(n - 1)$, nous aurons

$$lx = l.\text{const.} \pm \sqrt{\frac{n}{n-1}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + n}}$$

$$= l\,\text{const} + l\,[z + \sqrt{z^2 + n}]^{\pm\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)}};$$

donc passant des logarithmes aux quantités algébriques, et substituant à $z$ sa valeur $\frac{y}{x}$ [équat. $(a)$]; il viendra

$$\frac{x}{\text{const.}} = \left\{\frac{y + \sqrt{y^2 + nx^2}}{x}\right\}^{\pm\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)}},$$

même résultat que celui trouvé à l'article 398.

400. Parmi les équations différentielles des degrés supérieurs entre deux variables qui ne sont pas homogènes, et qui renferment les deux variables primitives; nous allons en considérer quelques-unes dont on déduit assez aisément les formules donnant les valeurs correspondantes des deux variables qui satisfont au problème.

Soit d'abord l'équation

$$ydx - qxdy =$$

$$\sqrt[m]{ady^m + bdy^{m-1}dx + cdy^{m-2}dx^2 \ldots + ndx^m} \ldots (387),$$

qui divisée par $dx$, et faisant

$$z = \frac{dy}{dx} \ldots\ldots (a),$$

devient

$$y - qxz = \sqrt[m]{az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} \ldots + n} \ldots (388).$$

Représentant, pour abréger, le second membre de cette dernière équation par $fz$, on aura

$$y - qxz = fz,$$

et différentiant en faisant toujours $dfz = f'zdz$, on aura

$$dy - qxdz - qzdx = f'zdz \ldots (b).$$

Mais $dy = zdx$ [équat. $(a)$]; donc changeant les signes de l'équation $(b)$, on aura celle

$$(q-1)\,zdx + qxdz = -f'zdz,$$

qui, comparée identiquement avec l'équation (296) [art. 341], donnera

$$A = q-1,\ B = q,\ F(y) = z,\ F(x) = x,\ f(y) = -f'z.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (297), on aura celle

$$(q-1)\,z^{\frac{q}{q-1}}x + \int f'z\,z^{\frac{1}{q-1}}dz = \text{const.}\ldots\ldots(389),$$

qui, faisant pour abréger

$$Fz = \int f'z\,z^{\frac{1}{q-1}}dz\ldots\ldots(390),$$

donnera

$$x = \frac{[\text{const.} - Fz]\,z^{\frac{q}{1-q}}}{q-1}\ldots.(391);$$

et substituant cette valeur de $x$ dans l'équation (388), on aura

$$y = \frac{q}{q-1}\,[\text{const.} - Fz]\,z^{\frac{1}{1-q}}$$
$$+ \sqrt[m]{az^m + bz^{m-1}\ldots\ldots + n}\ldots.(392).$$

Ces deux dernières équations (391) et (392) résolvent la question qui a donné lieu à l'équation proposée (387).

EXEMPLE. *Déduire de l'équation*

$$ydx - \tfrac{3}{2}xdy = a\sqrt{(dy^2 + dx^2)}\ldots\ldots(c),$$

*les valeurs correspondantes de* y *et de* x.

Comparant l'équation ($c$) avec la générale (387), on a

$$q=\tfrac{3}{2},\ m=2,\ a=\sqrt{a},\ b=0,\ c=0,\ n=\sqrt{a},$$

donc

$$fz=a\sqrt{z^2+1},\quad \text{d'où}\quad f'z=\frac{az}{\sqrt{z^2+1}},$$

et substituant cette dernière valeur, ainsi que celle de $q$ dans l'équation (390), on aura

$$\mathrm{F}z=\int\frac{az^3dz}{\sqrt{(z^2+1)}}=\frac{a}{3}(z^2-2)\sqrt{z^2+1}\ (\text{art. } 213);$$

substituant cette valeur de Fz, ainsi que celles de $q, m, a, b, n$ dans les formules (391) et (392), on aura les deux équations demandées.

401. Si $q=1$, c'est-à-dire, si nous avons à déduire de l'équation

$$ydx-xdy=\sqrt[m]{ady^m+bdy^{m-1}dx\ldots+ndx^m}\ldots(393),$$

les deux formules qui donnent les valeurs correspondantes de $x$ et de $y$, alors les équations (391) et (392) ne peuvent plus servir; mais nous obtiendrons directement l'équation de relation des deux variables. En effet, divisant comme précédemment par $dx$, et faisant toujours

$$z=\frac{dy}{dx}\ldots\ldots(a),$$

nous aurons

$$y-zx=\sqrt[m]{[az^m+bz^{m-1}\ldots+n]}\ldots(b),$$

ou

$$y-zx=fz\ldots\ldots(c),$$

en représentant toujours le second membre de l'équa-

tion ($b$) par $fz$. Différentiant l'équation ($c$), il vient $dy$ ou

$$zdx - zdx - xdz = f'zdz\,,$$

d'où $$-xdz = f'zdz \ldots\ldots\ldots (d)\,,$$

équation qui ne peut avoir généralement lieu, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de $x$, qu'en faisant

$$dz = 0\,, \quad \text{d'où} \quad z = \mathrm{C}\,,$$

en représentant par C une constante. Substituant cette valeur de $z$ dans l'équation ($a$), il vient

$$dy = \mathrm{C}dx\,, \quad \text{d'où} \quad y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}' \ldots\ldots (e)\,,$$

en représentant par C′ une autre constance que C dont elle est une fonction ; de manière que l'une de ces deux constantes ayant été prise d'une grandeur déterminée, l'autre ne peut rester indéterminée. En effet, substituant la valeur C de $z$ dans l'équation ($c$), il vient celle

$$y = \mathrm{C}x + f\mathrm{C} \ldots\ldots\ldots (394)\,,$$

et retranchant cette dernière équation de celle ($e$), on a $\mathrm{C}' = f\mathrm{C}$.

L'équation (394) est la seule intégrale complète de la proposée (393) ; mais cette dernière équation a une solution particulière qu'on aperçoit bien vîte en faisant attention que l'équation ($d$) peut encore être satisfaite dans le cas particulier de $x = -f'z$ ; et alors prenant la valeur de $z$ ou $\frac{dy}{dx}$, ensuite substituant cette valeur dans l'équation ($b$), on aura une solution particulière de la proposée.

Eclaircissons davantage cette théorie par un exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation

$$ydx - xdy = a\sqrt{dy^2 + dx^2} \ldots\ldots (f);$$

divisant par $dx$ et faisant $z = \frac{dy}{dx}$, il vient l'équation

$$y - xz = a\sqrt{z^2+1} \ldots\ldots (g),$$

qui, étant différentiée, donne, toutes réductions faites,

$$\left(x + \frac{az}{\sqrt{z^2+1}}\right) dz = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$dz = 0 \quad \text{ou} \quad z = C \ldots\ldots\ldots (h),$$

et

$$x = -\frac{az}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \text{d'où} \quad z = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \ldots (i).$$

la première valeur de $z$ [équat. ($h$)] substituée dans l'équation ($g$), donne

$$y - Cx = a\sqrt{(C^2+1)} \ldots\ldots (k),$$

ce qui est l'intégrale complète de la proposée.

La seconde valeur de $z$ [ équat. ($i$)], prise avec le signe négatif et substituée dans l'équation ($g$), donne

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a-x^2}};$$

d'où

$$y = \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2},$$

et par conséquent,

$$y^2 + x^2 = a^2 \ldots\ldots\ldots (l),$$

ce qui est une solution particulière de la proposée ($f$).

En effet, il est aisé de voir que cette équation satisfait à la proposée, mais qu'elle ne peut rien avoir de commun avec l'intégrale ($k$), car quelle que soit la valeur qu'on donne à la constante C dans l'équation ($k$), on ne pourra jamais reproduire l'équation ($l$).

La simplicité de l'exemple que nous venons de nous proposer, nous met à même de comparer les résultats que nous avons obtenus par cette méthode, et ceux que nous obtiendrons par les méthodes d'intégration des équations différentielles du premier degré entre deux variables.

Quarrant l'équation ($f$), il vient celle

$$y^2dx^2 - 2xydydx + x^2dy^2 = a^2dy^2 + a^2dx^2 \ldots\ldots (m),$$

qui, résolue par rapport à $dy$, et chassant le dénominateur, donne

$$(a^2 - x^2)dy = -xydx + adx\sqrt{(y^2 + x^2 - a^2)} \ldots\ldots (n).$$

Faisant

$$y = z\sqrt{a^2 - x^2} \ldots\ldots (o),$$

d'où $$dy = \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dz - \frac{zxdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et substituant ces valeurs dans l'équation ($n$), on a, toutes réductions faites, l'équation

$$(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dz = adx\sqrt{(a^2 - x^2)(z^2 - 1)},$$

qui, étant divisée par $(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{z^2 - 1}$, donne l'équation séparée

$$\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)}} = \frac{adx}{a^2 - x^2},$$

dont l'intégrale est, en passant des logarithmes aux quantités algébriques, et représentant par $q$ une constante arbitraire

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = q \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}.$$

Substituant dans cette équation la valeur de

$$z = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ [équat. (o)]},$$

et multipliant par $\sqrt{a^2 - x^2}$, on a

$$y + \sqrt{(y^2 + x^2 - a^2)} = q\,(a + x),$$

d'où on tire

$$y = \frac{q}{2}\,(a + x) + \frac{a - x}{2q},$$

ou $$y = \frac{q^2 - 1}{2q}\,x + \frac{q^2 + 1}{2q}\,a \ldots\ldots (p),$$

ce qui est l'intégrale complète de la proposée; mais si pour simplifier cette équation, nous faisons

$$\frac{q^2 - 1}{2q} = C,$$

d'où

$$q = C + \sqrt{C^2 + 1} \quad \text{et} \quad \frac{q^2 + 1}{2q} = \sqrt{1 + C^2};$$

alors C représentant une constante arbitraire, l'intégrale complète ($p$) de la proposée ($f$) se réduira à l'équation

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2},$$

qui est identique avec celle ($k$). Actuellement pour trouver par la règle générale prescrite à l'article 381, les solutions particulières de la proposée ($f$), éli-

minons le radical de l'équation ($k$), et différentions l'équation résultante seulement par rapport à C, sans écrire $dC$, ce qui donnera l'équation

$$-2yx+2Cx^2=2a^2C,$$

d'où
$$C=-\frac{yx}{a^2-x^2},$$

et substituant cette valeur de C dans l'intégrale complète ($k$), il viendra

$$y=-\frac{yx^2-a\sqrt{[(a^2-x^2)^2+y^2x^2]}}{a^2-x^2}.$$

Chassant le dénominateur, réduisant et quarrant afin d'éliminer le radical, nous aurons

$$a^2y^2=(a^2-x^2)^2+y^2x^2;$$

transposant $y^2x^2$ dans le premier membre, et divisant toute l'équation par $a^2-x^2$, il vient définitivement

$$y^2=a^2-x^2 \quad \text{ou} \quad y^2+x^2=a^2;$$

ce qui est une solution particulière de la proposée, et est le même résultat que celui ($l$) donné par la méthode précédente.

402. Toute équation de la forme

$$dy^p=(ax^m+by^n)\,dx^p\ldots\ldots(a),$$

dans laquelle le degré $p$ sera égal au produit des exposans $m$ et $n$ des deux variables, divisé par la différence de ces mêmes exposans, se séparera aisément. En effet, soit l'équation

$$dy^{\frac{mn}{m-n}}=(ax^m+by^n)\,dx^{\frac{mn}{m-n}}\ldots.(395);$$

d'où l'on tire

$$dy=\sqrt[mn]{(ax^m+by^n)^{m-n}}dx\ldots\ldots(b);$$

et faisant $$y = x^{\frac{m}{n}} z \ldots\ldots (c),$$

d'où $$dy = x^{\frac{m}{n}} dz + \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} z dx,$$

on a, par la substitution de ces valeurs dans l'équation ($b$), la transformée

$$x^{\frac{m}{n}} dz + \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} z dx = x^{\frac{m-n}{n}} (a + bz^n)^{\frac{m-n}{mn}} dx,$$

et divisant toute cette équation par $\frac{x^{\frac{m-n}{n}}}{n}$, il vient

$$nxdz + mzdx = n(a + bz^n)^{\frac{m-n}{mn}} dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x} = \frac{ndz}{n(a + bz^n)^{\frac{m-n}{mn}} - mz};$$

et intégrant, on a

$$l \frac{x}{\text{const.}} = n \int \frac{dz}{(a + bz^n)^{\frac{m-n}{mn}} - mz} \ldots (396);$$

qui est l'intégrale demandée, en y mettant après l'intégration, la valeur de $z$ déduite de l'équation ($c$).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$dy^2 = (2x^2 + 6y)\, dx^2 \ldots\ldots (d).$$

Compararant identiquement cette équation avec celle ($a$), il vient

$$p = 2, \quad a = 2, \quad m = 2, \quad b = 6, \quad n = 1;$$

or,

or, $$p(=2)=\frac{mn}{m-n}\left(=\frac{2\times 1}{2-1}\right);$$

nous aurons donc l'intégrale demandée en substituant les valeurs numériques de $p$, $a$.... dans l'équat. (396), ce qui donnera

$$l\frac{x}{\text{const.}}=\int\frac{dz}{(2+6z)^{\frac{1}{2}}-2z}\ldots\ldots\ldots(e).$$

Pour effectuer cette intégration, soit fait

$$u=\sqrt{2+6z}\ldots\ldots(e),$$

d'où

$$z=\frac{u^2-2}{6},\quad\text{et}\quad dz=\frac{udu}{3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ($c$), il vient

$$l\frac{x}{\text{const.}}=-\int\frac{udu}{u^2-3u+2}=-\int\frac{udu}{(u-2)(u-1)}$$
$$=-l\frac{(u-2)^2}{u-1}=l\frac{u-1}{(u-2)^2}.$$

Passant des logarithmes aux quantités algébriques, on a

$$\frac{x}{\text{const.}}=\frac{u-1}{(u-2)^2}\ldots\ldots\ldots(f);$$

mais

$$u=\sqrt{2+6z}=\sqrt{\left[2+\frac{6y}{x^2}\right]}\,[\text{éq.}(c)]=\frac{\sqrt{2(x^2+3y)}}{x}.$$

Donc substituant cette valeur de $u$ dans l'équation ($f$), on aura une équation entre les deux variables $x$ et $y$, qui sera l'intégrale complète de la proposée ($d$).

403. Remarque. Puisque l'analyse enseignée dans l'article précédent, a lieu quelles que soient les valeurs des exposans $m$ et $n$, pourvu qu'elles diffèrent entre

elles, il nous sera fort aisé de séparer les équations différentielles du premier degré de la forme

$$dy = (ax^m + by^{\frac{m}{m+1}})\,dx \ldots\ldots (397),$$

dans laquelle $p = 1$ et $\dfrac{m \times \frac{m}{m+1}}{m - \frac{m}{m+1}} = 1 = p$; car cette équation (397) satisfaisant aux conditions prescrites à l'article 402, nous trouverons tout de suite, par une simple substitution dans l'équation (396), que son intégrale est de la forme

$$l\frac{x}{\text{const.}} = \frac{m}{m+1}\int \frac{dz}{a + bz^{\frac{m}{m+1}} - mz} \ldots\ldots (398),$$

dans laquelle $z = yx^{-(m+1)}$

# SECTION III.

## *De l'intégration des Formules et équations différentielles des ordres supérieurs.*

## CHAPITRE Ier.

### *Intégration des formules différentielles de tous les ordres à une seule variable.*

404. ETANT donnée une formule différentielle de l'ordre $n$, telle que

$$Pd^n x + Qd^{n-1}xdx + Rd^{n-2}xdx^2 \ldots + Vdx^n \ldots (399),$$

dans laquelle P, Q, R.... V représentent des fonctions de la variable $x$, et dans laquelle aucune différentielle de $x$ d'un ordre inférieur à $n$ n'est considérée comme constante, proposons-nous de trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens P, Q...V pour que l'intégration de la formule (399) puisse se ramener à celle d'une formule différentielle du premier ordre à une seule variable.

Nous nous contenterons d'examiner successivement les cas de $n=2$ et $n=3$, ce qui fera suffisamment connaître la manière dont on devra s'y prendre pour des valeurs supérieures de $n$; mais ayant d'entrer en

matière, observons que si nous considérons la formule (399) comme provenant des différentiations successives d'une fonction $X$ de $x$ jusqu'à l'ordre $n$, nous pourrons représenter toute la formule (399) par $d^nX$. Ainsi nous poserons l'équation

$$d^nX = Pd^nx + Qd^{n-1}xdx + Rd^{n-2}xdx^2 + \ldots \ldots + Vdx^n \ldots\ldots\ldots (400).$$

405. Considérons d'abord le cas particulier de $n=2$, c'est-à-dire, cherchons la relation qui doit exister entre P et Q, pour que l'intégration de la formule

$$d^2X = Pd^2x + Qdx^2 \ldots (a)$$

puisse se ramener à celle d'une formule différentielle du premier ordre, et représentons cette dernière formule par

$$dX = Adx \ldots\ldots (b),$$

A étant une fonction de la variable $x$. Différentiant l'équation $(b)$, on a celle

$$ddX = Addx + dAdx,$$

qui devant être identique avec celle $(a)$, donne

$$A = P \ldots\ldots\ldots (c)$$

et $$dA = Qdx, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{dA}{dx};$$

mais $dA = dP$ [équat. $(c)$] ; donc

$$Q = \frac{dP}{dx} \ldots\ldots\ldots (d),$$

ce qui est l'équation de condition pour que l'intégration de la formule $(a)$ puisse se ramener à celle de la formule différentielle du premier ordre $(b)$, ou plutôt à celle

$$dX = Pdx \ldots\ldots (e) \text{ à cause de } A = P.$$

L'équation ($e$) qui se déduit immédiatement de la proposée ($a$), en effaçant dans celle-ci son dernier terme, et substituant dans ce qui reste les différentielles premières $dX$, $dx$ à la place des différentielles respectives du second ordre $d^2X$, $d^2x$, est une première intégrale de la proposée; et l'opération extrêmement simple qui a conduit de l'équation ($a$) à celle ($e$), peut être considérée comme une première intégration.

EXEMPLE. *Ramener, si c'est possible, l'intégration complète de la formule*

$$ddX = \left[\frac{b}{2\sqrt{x}} + 5ax^4\right)ddx + \left(20ax^3 - \frac{b}{4\sqrt{x^3}}\right)dx^2 \ldots (f),$$

*à celle d'une formule différentielle du premier ordre.*

Comparant la proposée ($f$) avec la formule ($a$), il vient

$$P = \frac{b}{2\sqrt{x}} + 5ax^4 \quad \text{et} \quad Q = 20ax^3 - \frac{b}{4\sqrt{x^3}}.$$

Différentiant la première de ces deux équations, on a

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{b}{4\sqrt{x^3}} + 20ax^3,$$

valeur qui est identique avec celle de Q, donc la proposée ($f$) a pour première intégrale

$$dX = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + 5ax^4\right)dx;$$

et comme l'intégrale de cette dernière formule est

$$X = b\sqrt{x} + ax^5,$$

nous en conclurons que cette dernière quantité est la formule primitive de la proposée ($f$).

406. Examinons maintenant le cas de $n = 3$, c'est-

à-dire, celui où l'on cherche les relations qui doivent exister entre les coefficiens P, Q et R pour que l'intégration de la formule différentielle du troisième ordre

$$d^3X = \mathrm{P}d^3x + \mathrm{Q}d^2xdx + \mathrm{R}dx^3 \ldots (a)$$

puisse se ramener à l'intégration d'une formule différentielle du premier ordre, que nous représenterons comme dans l'article précédent, par

$$dX = \mathrm{A}dx \ldots\ldots (b).$$

Mais avant de parvenir à ce dernier but de notre recherche actuelle, voyons quelles doivent être les conditions nécessaires pour que la proposée puisse éprouver une première intégration, c'est-à-dire, être ramenée à la forme d'une quantité différentielle du second ordre, telle que celle

$$d^2X = \mathrm{A}'ddx + \mathrm{B}dx^2 \ldots\ldots (c),$$

dans laquelle A′ et B sont des fonctions de $x$.

La formule ($c$) étant considérée comme une première intégrale de la proposée ($a$), il est clair que la différentielle

$$d^3X = \mathrm{A}'d^3x + \left.\begin{matrix} d\mathrm{A}' \\ + 2\mathrm{B}dx \end{matrix}\right\} d^2x + d\mathrm{B}dx^2 \ldots\ldots (d)$$

de la formule ($c$) doit être identique avec la proposée ($a$), ce qui donne

$$(e) \ldots\ldots \mathrm{A}' = \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{A}'}{dx} + 2\mathrm{B} \ldots (f),$$

$$d\mathrm{B} = \mathrm{R}dx \quad \text{ou} \quad \mathrm{B} = \int \mathrm{R}dx \ldots\ldots (g).$$

Substituant dans l'équation ($f$) les valeurs respectives de A′ et de B données par les équations ($e$)

et $(g)$, il vient

$$Q = \frac{dP}{dx} + 2\int R dx \ldots\ldots (h),$$

ce qui est la seule équation de condition nécessaire pour que la proposée $(a)$ soit susceptible d'une première intégration, et puisse être réduite à la formule différentielle du second ordre

$$d^2X = Pd^2x + (\int R dx)\, dx^2 \ldots\ldots (i).$$

Mais d'après ce qui a été démontré dans l'article précédent, la formule différentielle du second ordre $(i)$ n'est susceptible de se réduire à celle différentielle du premier ordre $(b)$, que si $\int R dx = \frac{dP}{dx}$, et substituant cette valeur dans l'équation $(h)$, on aura

$$Q = \frac{3dP}{dx} \ldots\ldots\ldots (k),$$

ce qui est la seconde équation de condition nécessaire pour ramener la formule $(a)$ à celle $(b)$, ou plutôt à la formule

$$dX = Pdx \ldots\ldots (l),$$

en faisant attention que $A = A' = P$.

Exemple. I. *Ramener, si c'est possible, l'intégration de la fonction différentielle du troisième ordre*

$$d^3X = \frac{(a^2-x^2)^2 d^3x + 3(a^2-x^2)x dx ddx + [a^2+2x^2] dx^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}} \ldots (m),$$

*à celle de l'intégration d'une fonction différentielle du premier ordre.*

Comparant identiquement la proposée $(m)$ avec la

fonction $(a)$, il vient

$$(n)\ldots\ldots \mathrm{P}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}},\quad \mathrm{Q}=\frac{3x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ldots(o);$$

$$\text{et } \mathrm{R}=\frac{a^2+2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}\ldots\ldots\ldots(p).$$

Différentiant l'équation $(n)$ et divisant par $dx$, on a

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ldots\ldots\ldots\ldots(q).$$

Actuellement multipliant l'équation $(p)$ par $dx$, intégrant et doublant l'intégrale, il vient

$$2\int \mathrm{R}dx=\frac{2x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ldots\ldots(r).$$

Or, ajoutant les équations $(q)$ et $(r)$, on retrouve la valeur de Q [équat. $(o)$]; donc la proposée $(m)$ a pour première intégrale

$$d^2X=\frac{d^2x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{xdx^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ldots\ldots(s)\ [\text{éq. } (i)].$$

De plus, comparant les équations $(o)$ et $(q)$, on voit tout de suite que la seconde équation de condition $(k)$ est satisfaite; donc l'intégrale seconde de la proposée est

$$dX=\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\ldots\ldots(t)\quad [\text{équat. } (l)]$$

Il est aisé de voir d'après cette dernière équation, que la fonction primitive de la proposée est

$$X=\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)+\text{const. [équat. (134)]},$$

EXEMPLE II. *S'occuper de la même recherche que dans l'exemple précédent, en considérant maintenant la fonction différentielle du troisième ordre*

$$d^3X=\frac{x^5d^3x+(3x^4+2x)\,dxd^2x-dx^3}{x^2}\ldots\ldots\ldots(u).$$

Nous avons dans ce cas-ci,

$$P = x^3, \quad Q = \frac{3x^3+2}{x} \quad \text{et} \quad R = -\frac{1}{x^2},$$

donc

$$\frac{dP}{dx} = 3x^2, \quad 2\int R dx = -2\int \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{x};$$

d'où

$$\frac{dP}{dx} + 2\int R dx = 3x^2 + \frac{2}{x};$$

valeur identique avec celle de Q ; donc la proposée est susceptible d'une première intégration, et sa première intégrale est

$$d^2X = x^3 d^2x + \frac{dx^2}{x}.$$

Mais en comparant les valeurs que nous venons de trouver à Q et à $\frac{dP}{dx}$, il est aisé de voir que la seconde équation de condition ($k$) n'est pas satisfaite ; donc la proposée n'est pas susceptible d'une seconde intégration, et, à plus forte raison, d'une intégration complète.

407. Remarque. L'équation de condition ($h$) [*] exigeant l'intégration de $Rdx$ qui peut quelquefois présenter beaucoup de difficultés, et les calculs de la seconde équation de condition ($k$), ainsi que de l'équation ($l$), étant des plus aisés, il sera très-souvent plus simple de commencer par voir si l'équation de condition ($k$) a lieu ; et si elle est satisfaite, de poser

[*] Cette équation et toutes celles dont nous parlerons dans cet article, sont relatives à l'article précédent.

l'équation finale ( $l$ ) qu'on différentiera deux fois de suite, ce qui donnera une formule différentielle du troisième ordre, laquelle sera identique avec la proposée, si cette dernière est réellement susceptible d'une intégration du second ordre.

Mais si la proposée ne pouvant se ramener à une fonction différentielle du premier ordre, on veut avoir du moins une première intégrale; alors la méthode dont nous venons de parler ne peut plus servir, puisque dans la première intégrale cherchée, il entre la quantité $\int R dx$. Ainsi la méthode exposée dans cette remarque, ne peut être utile que si la solution du problème qui a donné lieu à ces calculs, dépend absolument de la double intégration de la fonction différentielle du troisième ordre.

408. On appelle *intégrales double*, *triple*, *quadruple*....les quantités telles que

$$\int\int F(x, y \ldots dx, dy \ldots); \quad \int\int\int F(x, y \ldots dx, dy \ldots);$$
$$\int\int\int\int F(x, y \ldots dx, dy \ldots) \ldots\ldots,$$

dans lesquelles $F(x, y \ldots dx, dy \ldots)$ est une fonction différentielle d'un ordre ou degré au moins égal au nombre de signes d'intégration $\int$ qui la précède. Mais pour éviter d'écrire dans ces indications d'intégrations *répétées*, un trop grand nombre d'$\int$ à la suite les unes des autres, nous n'en écrirons qu'une ayant comme exposant le nombre qui fera connaître combien de fois elle doit être répétée. Ainsi pour indiquer l'intégrale $n^{uple}$ d'une fonction différentielle

$$F(x, y \ldots dx, dy \ldots),$$

qui est au moins de l'ordre ou degré $n$, nous écrirons

$$\int^n F(x, y \ldots dx, dy \ldots).$$

409. Lorsque la différentielle première $dx$ de la seule variable $x$ dont $X$ est fonction, est considérée comme constante, il est clair que la différentielle de l'ordre $n$ de $X$ ne pourra se présenter que sous la forme

$$d^n X = \varphi x dx^n \ldots\ldots (401).$$

Or, je dis que représentant par $c$, $c'$, $c''$..... des constantes arbitraires, l'intégrale finale ou fonction primitive de la proposée (401), sera de la forme

$$X = fx + cx^{n-1} + c'x^{n-2} + c''x^{n-3} \ldots\ldots$$
$$\ldots + c^{(n-2)'}x + c^{(n-1)'} \ldots\ldots (402).$$

En effet, $dx$ étant considérée comme constante, il est clair que

$$\int \varphi x dx^2 = dx \int \varphi x dx,$$

donc $$\int^2 \varphi x dx^2 = \int dx \int \varphi x dx;$$

de même $$\int \varphi x dx^3 = dx^2 \int \varphi x dx;$$

donc $$\int^2 \varphi x dx^3 = \int dx^2 \int \varphi x dx = dx \int dx \int \varphi x dx,$$

et par conséquent

$$\int^3 \varphi x dx^3 = \int dx \int dx \int \varphi x dx.$$

Enfin généralement, on trouvera par une suite de calculs semblables, que

$$\int^n \varphi x dx^n = \int dx \int dx \int dx \ldots \int \varphi x dx \ldots (403),$$

en mettant dans le second membre de cette équation, autant de fois le signe $\int$ qu'il y a d'unités dans le le degré $n$ de la différentielle de la variable $x$.

Mais en representant respectivement par $\varphi' x$, $\varphi'' x$, $\varphi''' x$.... les fonctions variables des intégrales effectuées de $\varphi x dx$, $\varphi' x dx$, $\varphi'' x dx$....., on aura

$$\int \varphi x dx = \varphi' x + c,$$

donc $\int dx \int \varphi x dx$, ou

$$\int^2 \varphi x dx^2 = \int [\varphi' x dx + c dx] = \varphi'' x + cx + c';$$

d'où il s'ensuit $\int dx \int dx \int \varphi dx$, ou

$$\int^3 \varphi x dx^3 = \int [\varphi'' x dx + cx dx + c' dx]$$
$$= \varphi''' x + \frac{c}{2} x^2 + c' x + c'';$$

donc $\int dx \int dx \int dx \int \varphi x dx$, ou

$$\int^4 \varphi x dx^4 = \int [\varphi''' x dx + \frac{c}{2} x^2 dx + c' x dx + c'' dx]$$
$$= \varphi^{\text{IV}} x + \frac{c}{2.3} x^3 + \frac{c'}{2} x^2 + c'' x + c'''.$$

On trouvera de même

$$\int^5 \varphi x dx^5 = \varphi^{\text{V}} x + \frac{c}{2.3.4} x^4 + \frac{c'}{2.3} x^3 + \frac{c''}{2} x^2 + c''' x + c^{\text{IV}},$$

et enfin généralement

$$\int^n \varphi x dx^n = \varphi^{n'} x + \frac{c}{2.3 \ldots n-1} x^{n-1} + \frac{c'}{2.3 \ldots n-2} x^{n-2} \ldots$$
$$\ldots + c^{(n-2)'} x + c^{(n-1)'} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Mais de l'équation (401), on tire

$$X = \int^n \varphi x dx^n;$$

donc si l'on représente par $fx$ la fonction de $x$ indiquée précédemment par $\varphi^{n'} x$, et enfin si l'on comprend dans les constantes arbitraires $c$, $c'$..... les dénominateurs numériques qu'elles ont dans l'équation ($a$), cette dernière équation se réduira à celle (402), ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLE. *Trouver l'intégrale finale ou fonction variable primitive de la fonction différentielle*

$$(2x^3 + 1)\, dx^3.$$

nO a $$\varphi x = 2x^3 + 1,$$

d'où $$\varphi' x = \int 2x^3 dx + \int dx = \frac{x^4}{2} + x,$$

$$\varphi'' x = \int \frac{x^4 dx}{2} + \int x dx = \frac{x^5}{10} + \frac{x^2}{2},$$

et $\varphi''' x$ ou $$fx = \int \frac{x^5 dx}{10} + \int \frac{x^2 dx}{2} = \frac{x^6}{60} + \frac{x^3}{6},$$

et substituant cette valeur de $fx$ dans la formule (402), on aura pour l'intégrale finale demandée

$$\frac{x^6}{60} + \frac{x^3}{6} + cx^2 + c'x + c''.$$

410. Proposons-nous maintenant de développer l'intégrale $n^{uple}$ $\int^n \varphi x dx^n$ en une suite de $n$ intégrales simples.

On a

$$d[x\int \varphi x dx] = dx \int \varphi x dx + x \varphi x dx,$$

d'où

$$\int dx \int \varphi x dx \quad \text{ou} \quad \int^2 \varphi x dx^2 = x \int \varphi x dx - \int x \varphi x dx,$$

et ajoutant aux intégrales de $\varphi x dx$ et de $x \varphi x dx$ les constantes arbitraires respectives $c$ et $c'$, il vient complètement

$$\int^2 \varphi x dx^2 = x \int \varphi x dx - \int x \varphi x dx + cx + c' \ldots\ldots (a).$$

La différentiation du premier membre multiplié par $x$, donne

$$d[x \int^2 \varphi x dx^2] = dx \int^2 \varphi x dx^2 + x dx \int \varphi x dx;$$

donc $\int dx \int^2 \varphi x dx^2$, ou

$$\int^3 \varphi x dx^3 = x \int^2 \varphi x dx^2 - \int x dx \int \varphi x dx,$$

et substituant la valeur de $\int^2 \varphi x dx^2$ donnée par l'équa-

tion $(a)$, il vient

$$\int^3 \varphi x dx^3 = x^2 \int \varphi x dx - x \int x \varphi x dx + cx^2 + c'x$$
$$- \int x dx \int \varphi x dx \ldots\ldots (b).$$

Or,

$$d\,(x^2 \int \varphi x dx) = 2x dx \int \varphi x dx + x^2 \varphi x dx,$$

donc

$$\int x dx \int \varphi x dx = \tfrac{1}{2}\, x^2 \int \varphi x dx - \tfrac{1}{2} \int x^2 \varphi x dx.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(b)$, réduisant et ajoutant une nouvelle constante arbitraire $c''$ à cause de la troisième intégrale $\int x^2 \varphi x dx$ qu'on y introduit, on a

$$\int^3 \varphi x dx^3 = \tfrac{1}{2} [x^2 \int \varphi x dx - 2x \int x \varphi x dx + \int x^2 \varphi x dx]$$
$$+ cx^2 + c'x + c'' \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

On trouvera par des calculs et des raisonnemens semblables,

$$\int^4 \varphi x dx^4 = \frac{1}{2.3} [x^3 \int \varphi x dx - 3x^2 \int x \varphi x dx$$
$$+ 3x \int x^2 \varphi x dx - \int x^3 \varphi x dx] + cx^3 + c'x^2 + c''x + c''' \ldots (d).$$

En observant attentivement la loi qui règne entre les termes des trois formules $(a)$, $(c)$ et $(d)$, on voit que généralement

$$\int^n \varphi x dx^n = \frac{1}{1.2.3\ldots n-1} [x^{n-1} \int \varphi x dx - (n-1) x^{n-2} \int x \varphi x dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^{n-3} \int x^2 \varphi x dx$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} x^{n-4} \int x^3 \varphi x dx$$
$$\ldots \pm \int x^{n-1} \varphi x dx] + cx^{n-1} + c'x^{n-2}$$
$$+ c''x^{n-3} + c'''x^{n-4} \ldots + c^{(n-1)'} \ldots\ldots (404).$$

Des deux signes qui précèdent le dernier terme intégral, le positif est pour le cas de $n$ impair, et le négatif pour le cas de $n$ pair.

Appliquant cette méthode d'intégration répétée à celle de la formule $(x^3+1)\,dx^5$ prise pour exemple, on a $\phi x = x^3+1$, donc

$$\int \phi x dx = \frac{x^4}{4} + x\ , \quad \int x\phi x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2},$$

$$\int x^2 \phi x dx = \frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3}, \quad \int x^3 \phi x dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4};$$

enfin $$\int x^4 \phi x dx = \frac{x^8}{8} + \frac{x^5}{5}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (404), on a, toutes réductions faites,

$$\int^5 (x^3+1)\,dx^5 = \frac{1}{24}\left[\frac{x^9}{5} - \frac{69x^8}{280} - \frac{3x^6}{2} + \frac{6x^5}{5}\right] + cx^4 + c'x^3 + c''x^2 + c'''x + c^{\text{IV}}.$$

---

# CHAPITRE II.

*De quelques fonctions et équations différentielles des ordres supérieurs entre deux ou un plus grand nombre de variables, auxquelles on peut appliquer des règles générales pour les intégrer.*

411. Il est aisé de voir d'après la formule (48) [art. 44], que la forme la plus générale que puisse avoir la différentielle seconde et complète d'une fonction $F(x, y)$ de deux variables, en ne considérant

aucune différentielle première de variables comme constante, est

$$ddF(x,y) = Addx + Bddy + Edx^2 + Hdy^2 + Kdxdy \ldots\ldots (405),$$

en représentant par A, B, E, H, K des fonctions de $x$ et de $y$. Cela posé, proposons-nous de trouver les équations de condition qui doivent exister entre les coefficiens A, B, E, H, K pour que la fonction différentielle du second ordre (405) soit la différentielle première d'une autre fonction différentielle du premier ordre qui, conséquemment, est l'intégrale première de la proposée, et cherchons quelle est la forme de cette intégrale.

Différentiant la formule différentielle du premier ordre

$$dF(x,y) = Pdx + Qdy \ldots\ldots (a),$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions de $x$ et de $y$, on aura

$$ddF(x,y) = Pddx + Qddy + dPdx + dQdy.$$

Or,

$$dP = d^xP + d^yP \quad \text{et} \quad dQ = d^xQ + d^yQ,$$

donc

$$ddF(x,y) = Pd^2x + Qd^2y + \frac{d^xP}{dx}dx^2 + \frac{d^yQ}{dy}dy^2 + \left(\frac{d^yP}{dy} + \frac{d^xQ}{dx}\right)dxdy \ldots (b).$$

Comparant identiquement cette dernière équation avec celle (405), on a

$$\left\{\begin{array}{l} P = A, \quad Q = B, \quad E = \dfrac{d^xP}{dx}, \quad H = \dfrac{d^yQ}{dy}, \\ \qquad\qquad K = \dfrac{d^yP}{dy} + \dfrac{d^xQ}{dx} \end{array}\right\} \ldots (c).$$

Substituant

Substituant les valeurs respectives A et B de P et de Q données par les deux premières équations du groupe (*c*) dans les trois dernières équations du même groupe, il vient

$$\left\{E=\frac{d^xA}{dx},\ H=\frac{d^yB}{dy}\ \text{et}\ K=\frac{d^yA}{dy}+\frac{d^xB}{dx}\right\}\ldots(406),$$

qui sont les trois équations de condition nécessaires pour que la proposée (405) soit susceptible d'une première intégration exacte, et lorsque ces trois équations (406) auront lieu, on trouvera tout de suite, en substituant les valeurs respectives A et B de P et de Q dans l'équation (*a*), que la première intégrale de la proposée (405) est

$$dF(x,y)=Adx+Bdy\ldots(407).$$

EXEMPLE. *Trouver, si c'est possible, la première intégrale de la formule différentielle du second ordre*

$$d^2F(x,y)=2x^3y^2ddx+\frac{3yddy}{x}+6x^2y^2dx^2$$
$$+\frac{3dy^2}{x}+4x^3ydxdy-\frac{3ydxdy}{x^2}\ldots\ldots(d),$$

*dans laquelle aucune différentielle du premier ordre des variables n'est considérée comme constante.*

Comparant identiquement la proposée (*d*) avec l'équation (405), on a

$$A=2x^3y^2,\quad B=\frac{3y}{x},\quad E=6x^2y^2,\quad H=\frac{3}{x}$$
$$\text{et}\quad K=4x^3y-\frac{3y}{x^2}:$$

or, $\frac{d^xA}{dx}=6x^2y^2$, valeur identique avec celle de E. De plus, $\frac{d^yB}{dy}=\frac{3}{x}$, valeur identique avec celle de H.

Enfin $\frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx} = 4x^3y - \frac{3y}{x^2}$, valeur identique avec celle de K. Donc les trois équations de condition (406) étant satisfaites, nous conclurons tout de suite que l'intégrale première de la proposée ($d$) est

$$2x^3y^2dx + \frac{3y}{x}dy.$$

412. Remarque I. Nous avons fait voir à l'art. 55, comment on doit opérer pour déterminer si une formule différentielle de l'ordre $m$ est la différentielle exacte d'une autre formule différentielle de l'ordre $m - 1$; mais cette méthode appliquée à l'équation (405) exigerait $\frac{4.3}{2} = 6$ équations de condition; au lieu que la méthode de l'article précédent n'exige que trois de ces équations. Il est vrai qu'au renvoi de l'article 359, nous avons démontré que $n$ représentant le nombre des variables, les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition exigées par la méthode de l'article 55, pouvaient être réduites à $\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{}$, ce qui ne donnerait dans le cas présent que trois équations de condition, comme par la méthode de l'article précédent. Mais malgré cela, les trois équations (406) sont plus commodes que celles qu'il faudrait employer suivant ce qui a été dit au renvoi de l'article 359.

413. Remarque II. Le principe démontré à l'article 57 étant appliqué au cas particulier que nous avons examiné à l'article 411, donne tout de suite le résultat (407), et généralement ce même principe donne subitement la $(n-1)^{ième}$ intégrale de toute fonction différentielle exacte d'un ordre $n$ entre un

nombre quelconque de variables, dans laquelle aucune différentielle de variable d'un ordre $< n$, n'a été considérée comme constante. C'est ainsi que par le principe de l'article 57, nous avons trouvé dans le même article, que la formule différentielle du premier ordre dont la formule différentielle du troisième ordre formant le premier membre de l'équation $(f)$ de l'article 49 était la différentielle seconde exacte, est $6ydy - \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Cette dernière formule est ce que nous appelons à présent la seconde intégrale du premier membre de l'équation $(f)$ de l'article 49.

414. Soit actuellement considérée $dx$ comme constante, ce qui réduit respectivement les formules (405) et $(b)$ de l'article (411) à celles

$$ddF(x, y) = Bd^2y + Edx^2 + Hdy^2 + Kdxdy \ldots (408),$$

et

$$ddF(x, y) = Qddy + \frac{d^xP}{dx}\, dx^2 + \frac{d^yQ}{dy}\, dy^2 + \left(\frac{d^yP}{dy} + \frac{d^xQ}{dx}\right) dydx;$$

donc, des cinq équations groupées en $(c)$ à l'art. 411, la première disparaît, et nous ne pouvons conséquemment en déduire la valeur de P; mais nous tirons cette valeur de la troisième équation qui donne

$(a) \ldots d^xP = Edx$, d'où $P = \int^x Edx + fy + c \ldots (409)$,

en représentant par $c$ une constante arbitraire (*).

---

(*) Nous ajoutons à l'intégrale partielle de $Edx$, une fonction de la seule variable $y$ et une constante arbitraire, parce que par la différentiation partielle de l'équation (409) par rapport à la seule variable $x$, la quantité variable $fy$ disparaît, ainsi que la constante $c$, et l'on retrouve l'équation $d^xP = Edx$.

Quant aux seconde, quatrième et cinquième équations du groupe (c) [art. 411], elles restent les mêmes. Actuellement nous observerons que le premier terme $Addx$ de la formule (405) n'ayant disparu dans le cas présent que par l'évanouissement de $ddx$, le coefficient A est toujours $= P$ ; ainsi la première équation de condition du groupe (406) devient actuellement l'équation de détermination ($a$), d'où nous avons déduit celle (409) ; il ne reste donc plus des trois équations de condition (406), que la seconde qui n'éprouve aucun changement, et la troisième dans laquelle il faudra mettre à la place de A la valeur de P [équat. (409)] qui lui est égale. Nous avons donc dans le cas actuel de $dx$ constante, les deux équations de condition

$$\left\{ H = \frac{d^y B}{dy} \text{ et } K = \frac{d^y[\int^x E dx + fy + c]}{dy} + \frac{d^x B}{dx} \right\} (410)$$

qui doivent avoir lieu si la formule (408) a une première intégrale exacte, et alors cette intégrale sera

$$dF(x,y) = (\int^x E dx + fy + c)\, dx + B dy \ldots (411).$$

On trouvera une application de cette méthode dans l'exemple de l'article 420.

415. Considérons à présent les équations différentielles du second ordre, dans lesquelles $dx$ est toujours regardée comme constante, et dont conséquemment la forme la plus générale est

$$B d^2y + E dx^2 + H dy^2 + K dy dx = 0 \ldots\ldots (412) ;$$

en divisant cette équation par $B dx^2$, il vient celle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + L + M \frac{dy^2}{dx^2} + N \frac{dy}{dx} = 0 \ldots (413),$$

dans laquelle L, M et N peuvent être des fonctions de toutes, ou seulement d'une partie des trois quantités $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$. Ainsi, représentant pour abréger les trois derniers termes de l'équation (413) par $\varphi$, ce qui donne

$$\frac{ddy}{dx^2}=\varphi \ldots\ldots (414),$$

nous aurions sept cas à considérer, savoir : les trois où $\varphi$ n'est fonction que d'une seule des trois quantités $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, ensuite les trois où $\varphi$ se composerait de deux de ces quantités; enfin le cas où $\varphi$ serait fonction des trois quantités en question ; mais de ces sept cas, nous n'en considérerons que cinq qui sont les seuls auxquels on puisse appliquer des règles générales d'intégration. Quant aux deux autres cas, savoir, celui où $\varphi$ est fonction de $x$ et de $y$, et celui où $\varphi$ est fonction des trois quantités $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, nous ne pourrons parler des intégrations de plusieurs espèces d'équations qui sont dans l'un de ces deux derniers cas, que dans les chapitres suivans.

## PREMIER CAS.

$$\Phi=f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{ddy}{dx^2}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)\ldots\ldots (415).$$

La différentielle $dx$ étant regardée comme constante, on peut écrire l'équation (415) sous la forme

$$(a)\ldots\ldots \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=f\left(\frac{dy}{dx}\right), \text{ d'où } dx=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{f\left(\frac{dy}{dx}\right)}\ldots(b),$$

et intégrant, il vient

$$x = \int \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{f\left(\frac{dy}{dx}\right)} + c \ldots\ldots (c),$$

en représentant par $c$ une constante arbitraire; ainsi l'équation $(c)$ est une intégrale première de la proposée (415).

Mais $$dy = dx \cdot \frac{dy}{dx},$$

et substituant à la place de $dx$ facteur sa valeur donnée par l'équation $(b)$, on a

$$dy = \frac{\frac{dy}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{f\left(\frac{dy}{dx}\right)};$$

enfin intégrant, il vient

$$y = \int \frac{\frac{dy}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{f\left(\frac{dy}{dx}\right)} + c' \ldots\ldots (d),$$

qui est une autre intégrale première de la proposée (415). Ainsi l'equation (415) a deux intégrales premières qui, en effectuant les intégrations indiquées dans les équations $(c)$ et $(d)$, donneront celles

$$x = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right) + c \quad \text{et} \quad y = \Phi'\left(\frac{dy}{dx}\right) + c';$$

d'où éliminant $\frac{dy}{dx}$, il résultera l'équation primitive entre $x$ et $y$ de l'équation différentielle du second ordre (415).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$\mathrm{ddy} = \mathrm{dx}\sqrt{\mathrm{dy}^2 + \mathrm{dx}^2} \ldots\ldots (c).$$

Divisant par $dx^2$, nous avons $\varphi$ ou

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]};$$

donc l'équation ($c$) nous donnera

$$x = l\left\{\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]}\right\} + c \ldots\ldots (f),$$

et l'équation ($d$) nous donnera celle

$$y = \sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]} + c';$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y - c')^2 - 1},$$

et substituant cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation ($f$), il viendra celle

$$x = l\left\{\sqrt{(y - c')^2 - 1} + y - c'\right\} + c,$$

qui est l'équation primitive de la proposée ($e$).

## SECOND CAS.

$$\varphi = fy, \quad \text{d'où} \quad \frac{ddy}{dx^2} = fy \ldots\ldots\ldots (416).$$

Soit fait

$$dx = zdy \ldots\ldots (g),$$

d'où l'on tire, à cause de $dx$ constante,

$$ddx = 0 = zddy + dzdy,$$

et par conséquent

$$ddy = -\frac{dzdy}{z}.$$

Substituant cette dernière valeur de $ddy$, ainsi que celle de $dx$ [équat. $(g)$] dans l'équation (416), réduisant et multipliant par $dy$, il vient

$$-\frac{dz}{z^3} = fydy.$$

Cette dernière équation étant intégrée, donne

$$\frac{1}{2z^2} = \int fydy + c,$$

d'où représentant toujours par $c$ la constante arbitraire $2c$, on tire

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2\int fydy + c}}:$$

mais $z = \frac{dx}{dy}$, on a donc l'équation

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy + c}} \ldots\ldots\ldots (h),$$

qui est l'intégrale première de la proposée (416), et intégrant cette équation $(h)$, il vient

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy + c}} + c',$$

qui est l'intégrale finale de l'équation (416).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$\mathrm{ddy}\sqrt{(\mathrm{ay})} = \mathrm{dx}^2 \ldots\ldots\ldots (i).$$

Nous avons dans cet exemple,

$$fy = \frac{1}{\sqrt{ay}};$$

donc $$2\int fydy = 2\int \frac{dy}{\sqrt{(ay)}} = +4\sqrt{\frac{y}{a}},$$

et substituant cette valeur dans l'équation ($h$), il vien celle

$$dx = \frac{dy\sqrt[4]{a}}{\sqrt{c+4\sqrt{y}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (k),$$

ce qui est l'intégrale première de l'équation ($i$).

Actuellement pour intégrer l'équation ($k$), faisons

$$\sqrt{y} = z^2, \text{ d'où } y = z^4 \text{ et } dy = 4z^3dz,$$

ce qui transforme l'équation ($k$) en celle

$$dx = 2\sqrt[4]{a}\,\frac{z^3dz}{\sqrt{(c+z^2)}},$$

et intégrant par le moyen de la formule (153) [art. 222], on a

$$x = c' + \frac{2\sqrt[4]{a}}{3}\sqrt{(c+z^2)}\,(z^2-2c);$$

enfin, mettant à la place de $z^2$ sa valeur $\sqrt{y}$, il vient

$$x = c' + \frac{2\sqrt[4]{a}}{3}(\sqrt{y}-2c)\sqrt{[c+\sqrt{y}]},$$

ce qui est l'intégrale finale de l'équation ($i$).

## TROISIÉME CAS.

$$\varphi = fx, \text{ d'où } \frac{ddy}{dx^2} = fx \ldots (417).$$

Ce cas-là ne présente aucune cifficulté, d'après ce qui a été dit à l'article 409, puisqu'il n'est qu'un ca

particulier du général que nous avons traité dans cet article. Au reste, on pourrait aisément trouver l'intégrale finale de l'équation (417), en suivant la même marche que pour les cas précédens. En effet, la proposée (417) peut être écrite de la manière suivante :

$$d\frac{dy}{dx} = fxdx\,;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \int fxdx + c,$$

ce qui est l'intégrale première de l'équation (417) ; mais $dy = \frac{dy}{dx}dx$, donc

$$dy = dx\int fxdx + cdx,$$

et intégrant, il vient

$$y = \int dx\int fxdx + cx + c' = x\int fxdx - \int xfxdx + cx + c'$$

[form. (404)], ce qui est l'intégrale finale de la proposée (417).

QUATRIÈME CAS.

$$\varphi = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right), \text{ d'où } \frac{ddy}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \ldots\ldots (418).$$

Faisant

$$z = \frac{dy}{dx} \ldots\ldots (l), \quad \text{d'où} \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx};$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (418), il vient

$$dz = dxf(x, z)\,;$$

intégrant cette dernière équation, et prenant dans

l'intégrale la valeur de $z$, on a

$$z = F(x, c), \quad \text{ou} \quad dy = dx F(x, c) \ldots\ldots (m),$$

ce qui est l'intégrale première de la proposée ; et intégrant l'équation $(m)$, il vient

$$y = \int dx F(x, c) + c' \ldots\ldots (n),$$

qui est l'intégrale finale de l'équation (418).

EXEMPLE. *Trouver l'équation d'une courbe plane rapportée à ses coordonnées rectangulaires* x, y, *qui jouisse de la propriété d'avoir chacune de ses abscisses moyenne proportionnelle géométrique entre le rayon osculateur correspondant et une constante donnée que, pour plus de simplicité, nous supposerons être l'unité.*

D'après l'énoncé de la question, nous aurons, abstraction faite du double signe qui précède l'expression générale du rayon osculateur [équat. (104), art. 172], et qui n'est relatif qu'à la situation convexe ou concave de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ; nous aurons, dis-je, l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy} = x^2, \text{ ou } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2}. \quad \ldots (o),$$

qui est dans le quatrième cas que nous avons examiné.

Faisant

$$z = \frac{dy}{dx} \text{ [équat. } (l)],$$

l'équation $(a)$ se transforme en celle

$$dz = \frac{dx(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

et intégrant cette dernière équation, il vient

$$c-\frac{1}{x}=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}},\quad \text{d'où}\quad z=\frac{cx-1}{\sqrt{[x^2-(cx-1)^2]}};$$

mettant à la place de $z$ sa valeur $\frac{dy}{dx}$, et faisant le développement sous le radical, on a

$$dy=\frac{(cx-1)\,dx}{\sqrt{(1-c^2)}\sqrt{\left[x^2+\frac{2cx}{1-c^2}-\frac{1}{1-c^2}\right]}}\ldots(p),$$

ce qui est la première intégrale de la proposée.

Pour intégrer cette équation $p$, soit fait

$$x+\frac{c}{1-c^2}=\xi\ldots\ldots(q);$$

d'où

$$dx=d\xi\quad\text{et}\quad x^2+\frac{2cx}{1-c^2}+\frac{c^2}{(1-c^2)^2}=\xi^2;$$

donc $$x^2+\frac{2cx}{1-c^2}=\xi^2-\frac{c^2}{(1-c^2)^2};$$

et substituant ces valeurs dans l'équation $(p)$, il vient

$$dy=\frac{c\xi d\xi-\frac{d\xi}{1-c^2}}{\sqrt{(1-c^2)}\sqrt{\left[\xi^2-\frac{1}{(1-c^2)^2}\right]}},$$

enfin intégrant et substituant dans l'intégrale la valeur de $\xi$ [équat. $(q)$], on a

$$y=c\sqrt{x^2-(cx-1)^2}-\frac{1}{(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$l\left[\frac{x(1-c^2)+c}{\sqrt{1-c^2}}+\sqrt{x^2-(cx-1)^2}\right]+c'\ldots\ldots(r);$$

ce qui est l'équation indéterminément complète de la courbe cherchée.

Pour déterminer les constantes $c$ et $c'$, et d'abord la première $c$, nous remonterons à l'intégrale première ($p$) qui nous fait voir que l'angle formé par le rayon osculateur avec l'axe des abscisses, ne peut être droit, c'est-à-dire que la tangente trigonométrique $\frac{dx}{dy}$, de cet angle ne peut être $=\infty$, qu'en tant qu'on aura $cx-1=0$, d'où $x=\frac{1}{c}$. Or si nous supposons que le point de la courbe où le rayon de courbure est perpendiculaire à l'axe des $x$, se trouve à une distance infinie de l'origine de ces abscisses, l'équation précédente se réduira à celle

$$\frac{1}{0}=\frac{1}{c}, \quad \text{d'où} \quad c=0,$$

ce qui réduit l'équation ($r$) à celle

$$y=c'-l[x+\sqrt{x^2-1}].$$

Actuellement si l'on fait $y=0$ lorsque $x=1$, on aura $c'=0$; ainsi l'équation précédente se réduira à celle

$$y=l\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right]=l[x-\sqrt{x^2-1}],$$

qui est l'équation de la courbe demandée.

## CINQUIÈME CAS.

$$\varphi=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{ddy}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)\ldots\ldots\ldots(419).$$

Faisant

$$(r)\ldots\ldots dx=zdy, \quad \text{d'où} \quad dx^2=z^2dy^2\ldots\ldots(s),$$

on aura $ddx = 0 = zd^2y + dzdy$,

et par conséquent

$$ddy = -\frac{dzdy}{z} \ldots\ldots (t):$$

mais

$$ddy = dx^2 f\left(y, \frac{1}{z}\right) [\text{éq.}(419) \text{ et } (r)] = z^2 dy^2 f\left(y, \frac{1}{z}\right) [\text{éq. } (s)];$$

donc égalant cette valeur de $ddy$ avec celle donnée par l'équation $(t)$, il viendra

$$\frac{dz}{z^3} = -dyf\left(y, \frac{1}{z}\right);$$

intégrant cette dernière équation, et prenant dans l'intégrale la valeur de $z$, on parviendra à une équation de la forme $z = F(y, c)$, et remettant la valeur de $z$ [équat. $(r)$], on aura

$$dx = dy\, F(y, c),$$

ce qui est la première intégrale de la proposée, et cette équation différentielle du premier ordre étant séparée, on en déduira aisément l'intégrale finale de la proposée (419).

Nous allons maintenant parler de deux espèces d'équations différentielles qui, quoique d'un ordre quelconque $m$, s'intègrent si aisément d'après ce qui a été dit dans ce chapitre, que nous croyons ne pas devoir différer de nous en occuper.

416. Soit en premier lieu proposé d'intégrer l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) \ldots\ldots (420).$$

Faisons

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = z \ldots\ldots (a),$$

ce qui transforme l'équation (420) en celle

$$dz = fzdx,$$

laquelle étant intégrée, et prenant dans l'intégrale la valeur de $z$ en $x$, donnera une équation de la forme $z = F(x, c)$, et substituant cette valeur de $z$ dans l'équation $(a)$, on aura celle

$$d^{m-1}y = F(x, c)\, dx^{m-1},$$

dont l'intégration se réduira à une suite $m-1$ d'intégrations simples par le moyen de la formule (404) [art. 410], ce qui donnera

$$y = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-2)}\Big[x^{m-2}\int F(x, c)\, dx - (m-2)\, x^{m-3} \times \int x F(x, c)\, dx + \frac{(m-2)(m-3)}{2}\, x^{m-4}\int x^2 F(x, c)\, dx \ldots \pm \int x^{m-2} F(x, c)\, dx\Big] + c' x^{m-2} + c'' x^{m-3} + c''' x^{m-4} \ldots + c^{(m-1)'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (421).$$

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$d^4y = adx^2 \sqrt{d^3ydx} \ldots\ldots (b).$$

Divisant cette équation par $dx^4$, elle devient

$$\frac{d^4y}{dx^4} = a\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} \ldots\ldots\ldots (c),$$

et faisant $\frac{d^3y}{dx^3} = z$ [équat. $(a)$], la proposée $(b)$, ou plutôt l'équation $(c)$, se transforme en celle

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = adx,$$

dont l'intégrale est

$$2\sqrt{z} = ax + c, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{(ax + c)^2}{4};$$

ainsi puisque nous avons

$$m=4 \quad \text{et} \quad F(x, c)=\frac{(ax+c)^2}{4},$$

la formule (421) nous donnera

$$y=\frac{1}{1.2}\left[\frac{x^2}{4}\int(ax+c)^2dx-\frac{x}{2}\int x\,(ax+c)^2\,dx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\int x^2\,(ax+c)^2\,dx\right]+c'x^2+c''x+c''';$$

effectuant les intégrations simples (art. 211), et faisant toutes les réductions nécessaires, il vient

$$y=\frac{x^3}{24}\left[\frac{a^2x^2}{10}+\frac{acx}{2}+c^2\right]+c'x^2+c''x+c''',$$

qui est l'intégrale demandée.

417. Proposons-nous en second lieu d'intégrer l'équation différentielle de l'ordre $m$

$$\frac{d^my}{dx^m}=f\left(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right)\ldots\ldots\ldots(422).$$

Soit fait $\quad z=\dfrac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\ldots\ldots\ldots(a),$

d'où $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \quad$ et $\quad \dfrac{ddz}{dx^2}=\dfrac{d^my}{dx^m}.$

Substituant ces valeurs de $\dfrac{d^my}{dx^m}$ et de $\dfrac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$ [éq. $(a)$] dans la proposée (422), on a la transformée

$$\frac{ddz}{dx^2}=fz\ldots\ldots\ldots(b),$$

qui, étant dans le second cas examiné à l'article 415, pourra être intégrée : ainsi représentant l'intégrale de l'équation $(b)$ par $z=F(x, c, c')$, et substituant

substituant cette valeur de $z$ dans l'équation $(a)$, on aura celle

$$d^{m-2}y = \mathrm{F}(x, c, c')\, dx^{m-2},$$

dont l'intégrale donnée par la formule (404) [art. 410], sera

$$y = \frac{1}{1.2.3\ldots m-3}\Big[x^{m-3}\int \mathrm{F}(x,c,c')\,dx$$
$$-(m-3)\,x^{m-4}\int x\mathrm{F}(x, c, c')\,dx$$
$$+\frac{(m-3)\,(m-4)}{2}\,x^{m-5}\int x^2\mathrm{F}(x,c,c')\,dx\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\int x^{m-3}\mathrm{F}(x,c,c')\,dx\Big]+c''x^{m-3}+c'''x^{m-4}$$
$$+c^{\text{IV}}x^{m-5}\ldots\ldots+c^{(m-1)'}\ldots\ldots\ldots(423).$$

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -a\left(\frac{dx^2}{d^2y}\right)^3\ldots\ldots\ldots(c).$$

Faisant $z = \frac{d^2y}{dx^2}$ [équat. $(a)$], on a la transformée

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a}{z^3};$$

et à cause que $-a\int\frac{dz}{z^3} = \frac{a}{2z^2}$, l'équation $(h)$ de l'article 415, donnera

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{[a+cz^2]}};$$

et intégrant, il viendra

$$x = \frac{\sqrt{a+cz^2}}{c}+c', \text{ d'où } z = \sqrt{\left[\frac{(cx-c')^2-a}{c}\right]};$$

donc à cause de $m = 4$ et de

$$\mathrm{F}(x, c, c') = \sqrt{\left[\frac{(cx-c')^2-a}{c}\right]},$$

l'équation (423) donnera

$$y = x\int dx\sqrt{\left[\frac{(cx-c')^2-a}{c}\right]} - \int x dx\sqrt{\left[\frac{(cx-c')^2-a}{c}\right]} + c''x + c''' \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

Faisant

$$cx - c' = u, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{du}{c},$$

on trouvera que pour effectuer les intégrations de l'équation ($d$), on n'a qu'à intégrer des fractions telles que

$$\frac{u^3du}{\sqrt{[u^2-a]}}, \quad \frac{u^2du}{\sqrt{[u^2-a]}}, \quad \frac{udu}{\sqrt{[u^2-a]}} \text{ et } \frac{du}{\sqrt{[u^2-a]}}.$$

Or, les première et troisième fractions sont dans le troisième cas d'intégration immédiate (art. 213), la seconde fraction mise sous la forme $\frac{u^2du}{\sqrt{-1}\sqrt{a-u^2}}$, a son intégrale donnée par l'équation (151) [art. 220], et l'intégrale de la quatrième fraction est donnée par la formule (138) [art. 207].

Toutes ces intégrations étant effectuées, mettant pour $u$ sa valeur $cx - c'$, et réduisant, on trouvera

$$y = \sqrt{\left[\frac{(cx-c')^2-a}{c^3}\right]}\left[(cx-c')^2\left(\frac{3-2c}{6c}\right) + \frac{a}{3}\right]$$
$$- \frac{a}{2\sqrt{c^3}}\, l\left[cx-c'+\sqrt{(cx-c')^2-a}\right]^{x-c'} + c''x + c''',$$

ce qui est l'intégrale complète demandée.

# CHAPITRE III.

*De l'intégration des équations différentielles du second ordre entre deux variables, lorsqu'on fait éprouver à ces équations certaines modifications exigées par les conditions des problèmes qui ont donné lieu à de pareils calculs, ou que ces modifications servent à faciliter les intégrations qui conduisent aux solutions des problèmes en question.*

418. Il arrive souvent que, soit par les conditions des problèmes qui ont conduit à des équations différentielles du second ordre entre deux variables, soit pour faciliter les intégrations, on considère comme constantes certaines fonctions des différentielles premières des deux variables, ou d'une seule de ces différentielles combinée avec les variables primitives; alors différentiant ces fonctions, on égale la différentielle à zéro, ce qui établit une équation d'où l'on tire une valeur de $ddy$ ou de $ddx$ qui, substituée dans la proposée, donne l'équation différentielle qu'il faut définitivement tâcher d'intégrer.

Quelques exemples éclairciront ceci.

I°. Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$dx^2\sqrt{dy^2+dx^2}=bdyddy\ldots\ldots(a).$$

En considérant la fonction $\sqrt{dy^2+dx^2}$ comme étant constante, ce qui donne

$$d\sqrt{dy^2+dx^2}=0, \quad \text{d'où} \quad dyddy=-dxddx;$$

donc
$$ddy=-\frac{dxddx}{dy}.$$

Substituant cette valeur dans la proposée $(a)$, et divisant par $dx$, il vient l'équation

$$dx\sqrt{dy^2+dx^2}=-bddx,$$

dont l'intégrale première, vu que le facteur radical est constant, est

$$x\sqrt{dy^2+dx^2}=-bdx+c\sqrt{dy^2+dx^2}\ldots\ldots(b),$$

en représentant par $c$ une constante arbitraire. Chassant les radicaux de l'équation $(b)$, et prenant la valeur de $dy$, il vient

$$dy=\frac{dx\sqrt{b^2-(x-c)^2}}{x-c},$$

dont l'intégrale complète est

$$y=bl\frac{x-c}{b(x-c)+\sqrt{b^2-(x-c)^2}}+\sqrt{[b^2-(x-c)^2]}+c'.$$

II°. Cherchons maintenant l'intégrale de l'équation

$$d\int y=\frac{xydyddx+ydydx^2-xdxdy^2-xydxd^2y}{y^2dy^2}\ldots(c),$$

dans laquelle on considère comme constante la fonction $\frac{xdx}{y}$, ce qui donne

$$d\left(\frac{xdx}{y}\right) = 0, \text{ ou } yxddx + ydx^2 - xdxdy = 0,$$

et réduit l'équation (c) à celle

$$dfy = -\frac{xdxd^2y}{ydy^2} = -\frac{xdx}{y}\frac{d(dy)}{dy^2},$$

dont l'intégrale, d'après la considération de $\frac{xdx}{y}$ égale à une quantité constante, est

$$fy = \frac{xdx}{y} \times \frac{1}{dy} + c \quad \text{ou} \quad yfydy - cydy = xdx.$$

Ainsi l'intégrale finale de la proposée est

$$x^2 = 2fyfydy - cy^2 + c'.$$

419. Avant de continuer nos recherches sur les objets que nous nous sommes proposé de traiter dans ce chapitre, nous croyons devoir entrer dans une petite digression qui nous sera utile pour la parfaite intelligence de ce que nous avons encore à dire sur ces objets, et même sur d'autres sujets traités dans le reste de cet ouvrage.

La traduction analytique de l'énoncé d'un problème indéterminé du premier genre, étant une équation entre deux variables $x$ et $y$, il est indifférent de déterminer les valeurs de $y$ par celles données à $x$, suivant des différences de variations constantes, ou de faire l'inverse en supposant les différences premières de $y$ constantes, et déterminant les valeurs de $x$ d'après cette supposition. En effet, il est évident que chacun de ces deux procédés donne également à l'une quelconque des deux variables, la valeur qui la met dans sa vraie relation avec la valeur donnée arbitrairement à l'autre va-

riable, puisque c'est toujours d'après l'équation qui exprime cette relation, que la valeur trouvée pour la première de ces variables est déduite de celle donnée à l'autre variable. Par exemple, soit proposé de trouver quelles doivent être les valeurs correspondantes de $y$ et de $x$, afin de satisfaire à la condition que la première de ces deux variables soit moyenne proportionnelle entre $x$ et une quantité constante $p$. Ce problème mis en équation, donne

$$y = \sqrt{px} \ldots\ldots (a).$$

Faisant successivement

$$\text{on a} \quad \left.\begin{array}{llll} x=0, & 1, & 2, & 3 \ldots\ldots \infty \\ y=0, & \sqrt{p}, & \sqrt{2p}, & \sqrt{3p} \ldots \sqrt{p\infty} \end{array}\right\} \ldots (b),$$

et les termes correspondans de ces deux séries satisfont toujours à la condition exigée par l'énoncé du problème. Mais de l'équation $(a)$ on tire celle $x = \frac{y^2}{p}$, et faisant successivement dans cette dernière équation,

$$\text{on a} \quad \left.\begin{array}{llll} y=0, & 1, & 2, & 3 \ldots\ldots \infty \\ x=0, & \frac{1}{p}, & \frac{4}{p}, & \frac{9}{p} \ldots\ldots \frac{\infty^2}{p} \end{array}\right\} \ldots\ldots (c),$$

et de même que ci-dessus, les termes correspondans de ces deux séries satisfont toujours à la condition exigée par l'énoncé du problème. Mais dans les deux séries $(b)$, les différences premières de $x$ étaient constantes, et celles de $y$ étaient variables; au lieu que dans les deux suites $(c)$, ce sont les différences premières de $y$ qui sont constantes, et celles de $x$ qui sont variables. Donc il est indifférent pour la solution du probleme proposé, de prendre les $\Delta x$ ou les $\Delta y$ constantes.

Mais suivant la notation du calcul différentiel, les variations de la différence d'une variable étant indiquées par la considération que la différentielle de cette même variable n'est pas constante, et la constance de la différence d'un certain ordre d'une variable étant indiquée par la constance de la différentielle du même ordre de la variable (art. 39 et 40), il est clair que ce que nous venons de dire pour les différences $\Delta x$ et $\Delta y$ des variables $x$ et $y$, a également lieu pour les différentielles $dx$ et $dy$ des mêmes variables.

420. De ce que nous venons de démontrer, il s'ensuit évidemment qu'étant donnée une équation différentielle d'un ordre supérieur entre deux variables $x$ et $y$, dans laquelle la différentielle première de l'une d'elles, par exemple, $dx$, a été considérée comme constante, on pourra transformer l'équation proposée en une autre où ce sera la différentielle $dy$ qu'on considérera comme constante, et la différentielle $dx$ comme variable, sans que cette transformation altère la vraie solution du problème qui a donné lieu à l'équation en question.

Pour opérer une telle transformation, on complettera la proposée par la méthode enseignée à l'article 52; ensuite on la réduira à la transformée demandée, en faisant évanouir les termes où se trouvent les différentielles d'ordres supérieurs de celle des deux variables qui, dans la proposée, avait sa différentielle de même ordre que l'équation qu'on veut transformer.

Rendons ceci plus sensible par le calcul d'une semblable transformation que nous ferons éprouver à une équation différentielle d'ordre supérieur, dans l'intention de rendre plus aisée l'intégration de cette équation.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$(x^2-3x)\,dydx+(6-4x)\,dydx^2-2ydx^3=0\ldots(a),$$

*dans laquelle la différentielle* dy *a été considérée comme constante.*

L'intégration demandée présentant trop de difficultés, nous allons transformer l'équation ($a$) en une autre où $dx$ sera considérée comme constante et $dy$ comme variable, dans l'espoir que nous aurons plus de facilité à intégrer la transformée.

Divisant l'équation proposée ($a$) par $dy^3$, il vient

$$(x^2-3x)\frac{ddx}{dy^2}+(6-4x)\frac{dx^2}{dy^2}-2y\frac{dx^3}{dy^3}=0\ldots\ldots(b).$$

Mais lorsque $dy$ est constante, la seconde équation du groupe (51) [art. 49], dans laquelle il faut mettre $y$ pour $x$, et réciproquement, nous donne $\frac{ddx}{dy^2}=(\varphi_1)$, donc l'équation ($b$) deviendra

$$(x^2-3x)(\varphi_1)+\text{etc.}=0\ldots\ldots(c),$$

et mettant actuellement à la place de $(\varphi_1)$ sa valeur donnée par la seconde équation du groupe (51) en y prenant $dx$ constante, c'est-à-dire, y faisant $ddx=0$, l'équation ($c$) se changera en celle

$$(3x-x^2)\frac{dxddy}{dy^3}+(6-4x)\frac{dx^2}{dy^2}-2y\frac{dx^3}{dy^3}=0,$$

qui, multipliée par $\frac{dy^3}{dx}$, donne l'équation

$$(3x-x^2)\,ddy+(6-4x)\,dxdy-2ydx^2=0,$$

qui est la transformée demandée que nous intégrerons sans peine ; car la comparant identiquement avec l'équation (408) [art. 414], on a

$$B=3x-x^2,\quad E=-2y,\quad H=0\quad\text{et}\quad K=6-4x.$$

Or, $\frac{d^y B}{dy} = 0$, valeur identique avec celle de H ; donc la première équation de condition [groupe (410)] est satisfaite ; et pour qu'aussi la seconde soit satisfaite, il faut que $6 - 4x$ soit $= \frac{d^y [\int^x (-2ydx) + fy + c]}{dy}$ $+ \frac{d^x (3x - x^2)}{dx}$, ou

$$6 - 4x = -2x + \frac{dfy}{dy} + 3 - 2x,$$

d'où $\frac{dfy}{dy} = 3$ ou $dfy = 3dy$ et $fy = 3y$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (411)[art.414], on a

$$0 = -2yxdx + 3ydx + 3xdy - x^2dy + cdx \ldots (d),$$

qui est la première intégrale de la proposée ($a$), et qui, intégrée elle-même, donne pour intégrale finale de la proposée,

$$0 = c' - x^2y + 3xy + cx.$$

421. Si d'une équation différentielle dans laquelle $dx$ ou $dy$ a été supposée constante, on veut passer à une autre équation dans laquelle ce soit une fonction de ces différentielles qui devienne constante, à la place de la simple différentielle $dx$ ou $dy$ de variable qui l'était d'abord, alors on complettera l'équation différentielle proposée par la méthode enseignée à l'art. 52, en considérant les différentielles de variables comme étant variables ; ensuite différentiant la fonction de différentielles qu'on veut considérer comme constante, on égalera sa différentielle à zéro, et prenant dans l'équation résultante la valeur de $ddy$ ou de $ddx$, on la substituera dans l'équation différentielle proposée complettée.

Par exemple, nous savons intégrer l'équation

$$ddy = fydx^2 \text{ [équat. (416), art. 415, 2}^e \text{ cas.]},$$

dans laquelle $dx$ est constante. Mais si par de nouvelles recherches relatives au problème qui a donné lieu à cette équation, on veut avoir son intégrale dans l'hypothèse que $\sqrt{(dy^2+dx^2)}$ est une quantité constante, ce qui donne

$$d\sqrt{(dy^2+dx^2)} = 0 \quad \text{ou} \quad dyddy + dxddx = 0$$

d'où $ddx = -\dfrac{dyddy}{dx}$ ou $ddy = -\dfrac{dxddx}{dy}$;

alors complettant la proposée comme si $dx$ était variable, ce qui change cette équation en celle

$$dxddy - dyddx = fydx^3,$$

il n'y aura plus qu'à substituer dans cette dernière équation la valeur de $ddx$ ou de $ddy$ trouvée précédemment d'après la condition que $\sqrt{dy^2+dx^2}$ est constante, ce qui donnera l'équation

$$(dx^2+dy^2)\,ddy = fydx^4,$$

ou celle $\quad (dx^2+dy^2)\,ddx = -fydx^3dy,$

qui sont également les transformées demandées.

---

# CHAPITRE IV.

## *Intégration des équations linéaires de tous les ordres entre deux ou un plus grand nombre de variables.*

422. On appelle équation *linéaire*, celle dans laquelle la différentielle première de l'une des variables étant considérée comme constante, toutes les autres variables

et leurs différentielles de tous les ordres ne se combinent jamais par voie de multiplication ou de division, et ne sont élevées qu'au premier degré dans tous les termes de l'équation. Ainsi représentant par A, B, C.....X des fonctions où n'entre pas du tout $y$, l'équation

$$Ay dx^n + B dy dx^{n-1} + C d^2y dx^{n-2} \ldots + d^n y = X dx^n \ldots (424)$$

est une équation linéaire de l'ordre $n$ entre deux variables.

M. Lacroix trouve que cette dénomination de *linéaire* est impropre, parce qu'il considère ce mot « comme » relatif à la Géométrie, et qu'en l'appliquant aux » équations, on a en vue la ligne droite, dans l'équa- » tion de laquelle l'ordonnée (et l'abscisse également) » ne se trouvent qu'au premier degré. On ne saurait » donc (ajoute ce Géomètre) regarder comme linéaires » des équations telles que $dy + Pydx = Qdx$ qui » appartiennent le plus souvent à des courbes trans- » cendantes. » (Voyez le renvoi de la page 225 du second volume du *Traité intégral* de Lacroix). Cependant malgré l'opinion de ce savant, il me semble que ce que nous appelons, comme l'ont fait beaucoup de grands Géomètres, *équation linéaire*, peut être considéré abstraitement; et quoique sa dénomination emprunte de la Géométrie un mot relatif aux lignes qui, au reste, peuvent être droites, ou courbes, ou même *transcendantes*, il ne peut résulter aucune équivoque lorsque le calcul ayant pour objet la Géométrie, on dira que telle équation linéaire dérive de tel problème relatif aux surfaces courbes ou aux volumes; car ici le mot *linéaire* indique seulement la forme de l'équation et non celle de l'objet géométrique auquel elle est relative. D'ailleurs pour remplacer ce mot-là, il faudrait, à mon avis, employer une autre dénomination que celle dont il faut se servir suivant l'opinion de

M. Lacroix ; car dire que l'équation (424) *est une équation du premier degré de l'ordre* n, me paraît impropre, puisque cette équation est du degré $n$ par rapport à $dx$, et qu'elle pourrait être d'un degré supérieur par rapport à $x$ ; il faudrait donc ajouter aux mots précédens écrits en lettres italiques, les suivans, *en en exceptant la variable dont la différentielle première est constante*, ce qui serait beaucoup trop long lorsque, comme nous le ferons dans la suite, on a à indiquer plusieurs fois dans le discours de pareilles équations.

Nous allons maintenant nous occuper d'intégrer les équations linéaires de l'ordre $n$ entre deux variables, telles que celle (424), dans laquelle nous n'avons pas donné de coefficient à $d^n y$ ; ce qui peut toujours avoir lieu, ou du moins s'obtenir par la division, et rend les calculs beaucoup plus simples.

423. Soit d'abord considéré le cas où les coefficiens A, B, C, D..... sont des quantités constantes, et X une fonction de $x$.

Faisant $$y = e^{mx} \int fx dx \ldots (a),$$
$m$ représentant une constante indéterminée, et différentiant successivement cette équation jusqu'à l'ordre $n$, on aura les $n$ équations

$$dy = e^{mx} dx \left[ m \int fx dx + fx \right]$$

$$ddy = e^{mx} dx^2 \left[ m^2 \int fx dx + 2mfx + \frac{dfx}{dx} \right]$$

$$d^3y = e^{mx} dx^3 \left[ m^3 \int fx dx + 3m^2 fx + 3m \frac{dfx}{dx} + \frac{d^2fx}{dx^2} \right]$$

.....

$$d^n y = e^{mx} dx^n \left[ m^n \int fx dx + nm^{n-1} fx + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2} \frac{dfx}{dx} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} m^{n-3} \frac{d^2fx}{dx^2} \ldots + \frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}} \right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (424), et divisant par $e^{mn}dx$, il viendra

$$\begin{aligned}&[A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots + m^n]\, dx^{n-1} \int fxdx\\ &\quad + [B + 2Cm + 3Dm^2 \ldots + nm^{n-1}]\, fxdx^{n-1}\\ &\quad + [C + 3Dm \ldots + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2}]\, dfxdx^{n-2}\\ &\quad + \left[D \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} m^{n-3}\right] ddfxdx^{n-3}\\ &\ldots + d^{n-1} fx = \frac{Xdx^{n-1}}{e^{mx}}.\end{aligned}$$

Mais à cause que $m$ est une quantité constante indéterminée, on pourra la prendre de manière que le coefficient de $dx^{n-1} \int fxdx$ soit $= 0$, on aura donc pour déterminer la valeur de $m$, l'équation du $n^{ième}$ degré

$$m^n \ldots + Dm^3 + Cm^2 + Bm + A = 0 \ldots\ldots (425),$$

et pour déterminer $fx$, on aura l'équation linéaire de l'ordre $n - 1$

$$\begin{aligned}&B' fxdx^{n-1} + C' dfxdx^{n-2} + D' d^2fxdx^{n-3} \ldots\ldots + d^{n-1} fx\\ &\qquad = \frac{Xdx^{n-1}}{e^{mx}} \ldots\ldots\ldots\ldots (b),\end{aligned}$$

dans laquelle nous avons fait pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}B' &= B + 2Cm + 3Dm^2 \ldots + nm^{n-1}\\ C' &= C + 3Dm \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2}\\ D' &= D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} m^{n-3}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \ldots (c).$$

Faisant maintenant

$$fx = e^{(m-1)x} \int f'xdx \ldots\ldots\ldots (d),$$

en représentant par $(m1)$ une quantité constante indéterminée, et différentiant successivement l'équation $(d)$ jusqu'à l'ordre $n-1$, on aura

$$df x = e^{(m1)x} dx[(m1)\int f'x dx + f'x]$$

$$d^2 f x = e^{(m1)x} dx^2 \left[ (m1)^2 \int f'x dx + 2(m1) f'x + \frac{df'x}{dx} \right]$$

.....

$$d^{n-1} f x = e^{(m1)x} dx^{n-1} \left[ (m1)^{n-1} \int f'x dx + (n-1)(m1)^{n-2} f'x \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (m1)^{n-3} \frac{df'x}{dx} \ldots + \frac{d^{n-2} f'x}{dx^{n-2}} \right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(b)$, et divisant la résultante par $e^{(m1)x} dx$, il vient

$$[B' + C'(m1) + D'(m1)^2 \ldots + (m1)^{n-1}]\, dx^{n-2} \int f'x dx$$
$$+ [C' + 2D'(m1) \ldots + (n-1)(m1)^{n-2}]\, f'x dx^{n-2}$$
$$+ \left[ D' \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (m1)^{n-3} \right] df'x dx^{n-3} \ldots$$
$$\ldots\ldots + d^{n-2} f'x = \frac{X dx^{n-2}}{e^{[m+(m1)]x}};$$

et à cause de $(m1)$ indéterminé, on peut faire évanouir dans cette dernière équation le coefficient de $dx^{n-2} \int f'x dx$, ce qui donne pour déterminer $(m1)$, l'équation

$$(m1)^{n-1} \ldots + D'(m1)^2 + C'(m1) + B' = 0 \ldots (e),$$

et pour obtenir $f'x$, l'équation linéaire de l'ordre $(n-2)$,

$$C'' f'x dx^{n-2} + D'' df'x dx^{n-3} \ldots + d^{n-2} f'x = \frac{X dx^{n-2}}{e^{[m+(m1)]x}} \ldots (f),$$

dans laquelle nous avons fait, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} C'' = C' + 2D'(m1) \ldots + (n-1(m1)^{n-3} \\ D'' = D' \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}(m1)^{n-3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (g).$$

Faisant encore

$$f'x = e^{(m2)x} \int f''x dx \ldots\ldots\ldots (h),$$

$(m2)$ représentant une constante indéterminée, et différentiant successivement l'équation $(h)$ jusqu'à l'ordre $n-2$, on a

$$df'x = e^{(m2)x} dx \left[(m2) \int f''x dx + f''x\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^{n-2} f'x = e^{(m2)x} dx^{n-2} \left[(m2)^{n-2} \int f''x dx + (n-2)(m2)^{n-3} f''x \ldots\ldots + \frac{d^{n-3} f''x}{dx^{n-3}}\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(f)$, et divisant par $e^{(m2)x} dx$, on a

$$\left[C'' + D''(m2) \ldots + (m2)^{n-2}\right] dx^{n-3} \int f''x dx + \left[D'' \ldots + (n-2)(m2)^{n-3}\right] f''x dx^{n-3} \ldots + d^{n-3} f''x = \frac{X dx^{n-3}}{e^{[m+(m1)+(m2)]x}};$$

et à cause que la quantité constante $(m2)$ est indéterminée, faisant le coefficient de $dx^{n-3} \int f''x dx = 0$, on aura pour déterminer $(m2)$, l'équation

$$(m2)^{n-2} \ldots + D''(m2) + C'' = 0 \ldots\ldots (i),$$

et pour trouver $f''x$, l'équation linéaire du $(n-3)^{ième}$ ordre

$$D'' f''x dx^{n-3} \ldots + d^{n-3} f''x = \frac{X dx^{n-3}}{e^{[m+(m1)+(m2)]x}} \ldots\ldots (k);$$

dans laquelle

$$\left.\begin{array}{l} D''' = D'' \ldots\ldots + (n-2)(m2)^{n-3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (l).$$

Enfin, continuant d'opérer de même, on parviendra à ce que faisant

$$f^{(n-2)'}x = e^{[m(n-1)]x} \int f^{(n-1)'} x dx \ldots\ldots (m),$$

il résultera l'équation

$$f^{(n-1)'}x = \frac{X}{e^{[m+(m1)+(m2)]\ldots+[m(n-1)]x}} \ldots\ldots (n).$$

Nous allons maintenant démontrer que les racines $(m1)$, $(m2)\ldots[m(n-2)]$ des équations $(e)$, $(i)\ldots.$ ne sont que les différences, de deux à deux, de chacune des racines de l'équation (425), en partant de la seconde racine, à celle qui la précède. En effet, multipliant l'équation $(e)$ par $(m1)$, et ajoutant au produit l'équation (425), on a

$$(m1)^n \ldots\ldots + D'(m1)^3 + C'(m1)^2 + B'(m1) + m^n \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + Dm^3 + Cm^2 + Bm + A = 0;$$

et substituant à la place des coefficiens $B'$, $C'$, $D'\ldots\ldots$ leurs valeurs données par les équations du groupe $(c)$, il vient

$$\left[m^n + nm^{n-1}(m1) + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2}(m1)^2 \ldots\ldots + (m1)^n\right]$$
$$\ldots + D[m^3 + 3m^2(m1) + 3m(m1)^2 + (m1)^3]$$
$$+ C[m^2 + 2m(m1) + (m1)^2] + B[m + (m1)] + A = 0.$$

Mais faisant attention que chaque série renfermée entre des crochets, est le développement d'une puissance entière et positive de $m + (m1)$, on en conclur aisément que l'équation précédente se réduit à celle

$$[m + (m1)]^n \ldots\ldots + D[m + (m1)]^3 + C[m + (m1)]^2$$
$$+ B[m + (m1)] + A = 0.$$

Or,

Or, cette dernière équation est du même degré et a les mêmes coefficiens que celle (425); donc si l'une des $n$ racines de l'équation (425) est $m$, l'une de ses $n-1$ autres racines que je représente par $m'$, sera $=m+(m1)$, ce qui donne $(m1)=m'-m$; et généralement représentant par $m, m', m''\ldots m^{(n-1)'}$, les $n$ racines de l'équation (425), et par $(m1), (m1)', (m1)''\ldots(m1)^{(n-2)'}$, les $n-1$ racines de l'équation $(e)$, il est clair, d'après ce que nous venons de démontrer pour la première racine $(m1)$ de l'équation $(e)$, qu'on aura

$$\left.\begin{array}{l}(m1)=m'-m\\(m1)'=m''-m\\(m1)''=m'''-m\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(m1)^{(n-2)'}=m^{(n-1)'}-m\end{array}\right\}\ldots\ldots(o).$$

Maintenant multipliant l'équation $(i)$ par $(m2)$, et ajoutant au produit l'équation $(e)$, il vient

$$\begin{array}{l}(m2)^{n-1}\ldots\ldots+D''(m2)^2+C''(m2)+(m1)^{n-1}\\\qquad\ldots\ldots+D'(m1)^2+C'(m1)+B'=o,\end{array}$$

et substituant les valeurs des coefficiens $C''$, $D''$, ..... groupées en $(g)$, ensuite indiquant les puissances du binome $(m1)+(m2)$ au lieu de mettre les développemens de ces puissances, on aura

$$\begin{array}{l}[(m1)+(m2)]^{n-1}\ldots\ldots+D'[(m1)+(m2)]^2\\\qquad+C'[(m1)+(m2)]+B'=o.\end{array}$$

Or, cette équation est du même degré et a les mêmes coefficiens que celle $(e)$; donc $(m1)'$ étant l'une des $n-1$ autres racines de l'équation $(e)$, nécessairement on aura

$$(m1)'=(m1)+(m2),\quad \text{d'où}\quad (m2)=(m1)'-(m1);$$

et généralement $(m1), (m1)', (m1)''\ldots(m1)^{(n-2)'}$ étant

les $n-1$ racines de l'équation $(e)$, et $(m2)$, $(m2)'$, $(m2)''\ldots$ $(m2)^{(n-3)'}$ étant les $n-2$ racines de l'équation $(i)$, on aura

$$(m2)=(m1)'-(m1),\quad (m2)'=(m1)''-(m1)\ldots\ldots$$
$$(m2)^{(n-3)'}=(m1)^{(n-2)'}-(m1).$$

Enfin substituant dans ces équations les valeurs de $(m1)$, $(m1)'\ldots\ldots$ groupées en $(o)$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}(m2)=m''-m'\\(m2)'=m'''-m'\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(m2)^{(n-3)'}=m^{(n-1)'}-m'\end{array}\right\}\ldots\ldots(p).$$

On démontrerait de même par le moyen de l'équation $(i)$ et de celle analogue du $(n-3)^{ième}$ degré qui la suit, et que nous n'avons pas considérée particulièrement, que représentant par $(m3)$, $(m3)'\ldots(m3)^{(n-4)'}$ les $n-3$ racines de cette dernière équation, on aurait

$$(m3)=(m2)'-(m2),\ldots(m3)^{(n-4)'}=(m2)^{(n-3)'}-(m2),$$

et substituant dans ces dernières égalités les valeurs de $(m2)$, $(m2)'\ldots(m2)^{(n-3)'}$ groupées en $(p)$, on aurait

$$\{(m3)=m'''-m''\ldots(m3)^{(n-4)'}=m^{(n-1)'}-m''\}\ldots(q).$$

Enfin, la continuation d'un pareil calcul conduirait en dernier lieu à l'équation

$$[m(n-1)]=m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}\ldots\ldots(r).$$

Donc généralement, prenant seulement la première équation de chacun des groupes $(o)$, $(p)$, $(q)\ldots$, et enfin l'équation $(r)$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} m = m \\ (m1) = m' - m \\ (m2) = m'' - m' \\ (m3) = m''' - m'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [m(n-1)] = m^{(n-1)'} - m^{(n-2)'} \end{array}\right\} \ldots\ldots(s).$$

Or, si l'on ajoute toutes ces équations et qu'on multiplie les deux membres de la somme par $x$, on aura

$$\{m+(m1)+(m2)+(m3)\ldots+[m(n-1)]\}x = m^{(n-1)'}x,$$

et par conséquent l'équation $(n)$ se réduira à celle

$$f^{(n-1)'}x = \frac{X}{e^{m^{(n-1)'}x}} \ldots\ldots\ldots(t).$$

Rappelant ici l'équation $(a)$, et mettant dans celles $(d)$, $(h)$....les valeurs de $(m1)$, $(m2)$.... groupées en $(s)$, on aura la suite d'équations

$$y = e^{mx}\int fxdx, \quad fx = e^{(m'-m)x}\int f'xdx,$$

$$f'x = e^{(m''-m')x}\int f''xdx, f''x = e^{(m'''-m'')x}\int f'''xdx\ldots$$

$$f^{(n-2)'}x = e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x}\int f^{(n-1)'}xdx$$

$$= e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x}\int\frac{Xdx}{e^{m^{(n-1)'}x}}\,[\text{équat. }(t)].$$

Donc par des substitutions successives dans ces équations ; de plus, ajoutant une constante arbitraire à chaque intégrale, et représentant ces constantes par $c$, $c'$, $c''$....$c^{(n-1)'}$, on aura

$$y = e^{mx}\Big\{\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\ldots\ldots$$

$$\ldots\int e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m^{(n-1)'}x}} + c\int e^{(m'-m)x}dx$$

$$\int e^{(m''-m')x}dx\ldots\int e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x}dx + c'\int e^{(m'-m)x}dx\ldots$$

$$\ldots\int e^{[m^{(n-2)'}-m^{(n-3)'}]x}dx\ldots + c^{(n-2)'}\int e^{(m'-m)x}dx$$

$$+ c^{(n-1)'}\Big\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(426),$$

ou, tant que l'équation (425), que dorénavant nous appellerons l'*auxiliaire*, aura toutes ses racines inégales,

$$y = e^{mx}\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\ldots\ldots$$

$$\ldots\int e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m^{(n-1)'}x}}+c^{(n-1)'}e^{m^{(n-1)'}x}$$

$$+c^{(n-2)'}e^{m^{(n-2)'}x}\ldots+c''e^{m''x}+c'e^{m'x}+ce^{mx}\ldots.(427),$$

en représentant respectivement par $c^{(n-1)'}$, $c^{(n-2)'}\ldots.c'$, $c$ les combinaisons de $c$, $c'\ldots\ldots c^{(n-2)'}$, $c^{(n-1)'}$ dans l'état primitif où se trouvent ces constantes arbitraires avant les développemens des intégrales multiples affectées de constantes arbitraires, avec les racines $m$, $m'$, $m''\ldots$ de l'auxiliaire, après ces développemens qui ne présentent aucune difficulté ; car, par exemple,

$$\frac{c\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx}{m'''-m''}=\frac{c\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\,e^{(m'''-m'')x}}{m'''-m''}=\frac{c}{m'''-m''}$$

$$\times\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx=\frac{c}{(m'''-m'')(m'''-m')}\int e^{(m'''-m)x}dx$$

$$=\frac{c}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)}e^{(m'''-m)x};$$

et effectuant la multiplication par $e^{mx}$ qui n'est qu'indiquée dans la formule (426), on a, relativement à l'intégrale multiple que nous avons prise pour exemple, et qui n'est que triple afin de fixer les idées, la quantité $c'''e^{m'''x}$ en faisant $c'''=\frac{c}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)}$.

Afin d'appliquer la formule (427), proposons-nous premièrement d'intégrer l'équation linéaire du troisième ordre

$$6p^3ydx^3-7p^2dydx^2+d^3y=x^2dx^3\ldots\ldots(u).$$

Comparant identiquement cette équation avec la

générale (424), on a

$$n=3,\ A=6p^3,\ B=-7p^2,\ C=0 \text{ et } X=x^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'auxiliaire générale (425), on a pour l'équation ($u$), celle

$$m^3-7p^2m+6p^3=0,$$

dont les trois racines sont $m=-3p$, $m'=2p$, $m''=p$. Ainsi l'équation (427) donnera

$$y=e^{-3px}\int e^{5px}dx\int e^{-px}dx\int\frac{x^2dx}{e^{px}}+c''e^{px}$$
$$+c'e^{2px}+ce^{-3px}\cdot\ldots\ldots\ldots(v).$$

Or, $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{e^{px}}=-\frac{e^{-px}}{p}\left[x^2+\frac{2x}{p}+\frac{2}{p^2}\right]$ (*);

donc

$$\int e^{-px}dx\int\frac{x^2dx}{e^{px}}=\frac{1}{2p^2e^{2px}}\left[x^2+\frac{3x}{p}+\frac{7}{2p^2}\right]$$

et $\displaystyle\int e^{5px}dx\int e^{-px}dx\int\frac{x^2dx}{e^{px}}=\frac{e^{3px}}{6p^3}\left[x^2+\frac{7x}{3p}+\frac{49}{18p^2}\right]$;

substituant cette valeur dans l'équation ($v$), on a

$$y=\frac{1}{6p^3}\left[x^2+\frac{7x}{3p}+\frac{49}{18p^2}\right]+c''e^{px}+c'e^{2px}+ce^{-3px},$$

ce qui est l'intégrale complète de la proposée ($u$).

Proposons-nous pour second exemple, l'équation du second ordre

$$d^2y+pdydx-6p^3ydx^2=a^xdx^2\ldots\ldots(x);$$

comparant identiquement cette équation avec celle

(*) Voyez pour cette intégration et les suivantes, la formule (214) [art. 266].

(424), on a

$$A = -6p^2, \quad B = p, \quad n = 2 \quad \text{et} \quad X = a^x;$$

donc l'auxiliaire de la proposée $(x)$ est

$$m^2 + pm - 6p^2 = 0 \text{ [form. (425)]},$$

dont les deux racines sont $m = 2p$ et $m' = -3p$; ainsi l'équation (427) donnera

$$y = e^{2px}\int e^{-5px}dx\int\frac{a^x dx}{e^{-3px}} + c'e^{-3px} + ce^{2px} \ldots\ldots (y).$$

Mais $$\int\frac{a^x dx}{e^{-3px}} = \int(ae^{3p})^x dx = \frac{(ae^{3p})^x}{la+3p};$$

donc $$\int e^{-5px}dx\int\frac{a^x dx}{e^{-3px}} = \frac{(ae^{-2p})^x}{(la+3p)(la-2p)},$$

et substituant cette valeur dans l'équation $(y)$, il vient pour intégrale complète de la proposée $(x)$, l'équation

$$y = \frac{a^x}{(la+3p)(la-2p)} + c'e^{-3px} + ce^{2px}.$$

424. Proposons-nous actuellement de développer la formule (426) en une suite de termes qui ne renferment chacun qu'une intégrale simple; et pour fixer les idées, faisons $n = 4$.

On a par les règles ordinaires du calcul différentiel,

$$d\left[\frac{e^{(m'''-m'')x}}{m'''-m''}\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}\right] = e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$
$$+\frac{e^{(m'''-m'')x}}{m'''-m''}\frac{Xdx}{e^{m'''x}} \ldots\ldots\ldots (a);$$

donc faisant attention que le dernier terme de cette équation est $= \frac{1}{m'''-m''}\frac{Xdx}{e^{m''x}}$, il viendra, en prenant

la valeur du premier terme du second membre de l'équation ($a$), et intégrant,

$$\int e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}=\frac{e^{(m'''-m'')x}}{m'''-m''}\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$

$$-\frac{1}{m'''-m''}\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}\ldots\ldots(b);$$

donc $\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$

$$=\frac{1}{m'''-m''}\int e^{(m'''-m')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}-\frac{1}{m'''-m''}$$

$$\times\int e^{(m''-m')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}\ldots\ldots\ldots\ldots(c).$$

Mais les valeurs des doubles intégrales qui sont dans chacun des deux termes du second membre de l'équation ($c$), sont directement données par l'équation ($b$) en accentuant convenablement $m$; donc par les substitutions de ces valeurs dans l'équation ($c$), on aura

$$\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}=$$

$$\frac{e^{(m'''-m')x}}{(m'''-m'')(m'''-m')}\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}-\frac{e^{(m''-m')x}}{(m'''-m'')(m''-m')}\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}$$

$$+\frac{1}{(m'''-m')(m''-m')}\int\frac{Xdx}{e^{m'x}};$$

donc

$$\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$

$$=\frac{1}{(m'''-m'')(m'''-m')}\int e^{(m'''-m)x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$

$$-\frac{1}{(m'''-m'')(m''-m')}\int e^{(m''-m)x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}$$

$$+\frac{1}{(m'''-m')(m''-m')}\int e^{(m'-m)x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'x}}.$$

Développant, par le moyen de la formule $(b)$, en intégrales simples les doubles intégrales qui se trouvent dans chacun des trois termes du second membre de cette équation, substituant et faisant attention que

$$\frac{1}{(m'''-m'')(m''-m')(m''-m)}-\frac{1}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)}$$
$$-\frac{1}{(m'''-m')(m''-m')(m'-m)}=\frac{1}{(m-m''')(m-m'')(m-m')},$$

on aura

$$\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$
$$=\frac{e^{(m'''-m)x}}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)}\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$
$$+\frac{e^{(m''-m)x}}{(m''-m''')(m''-m')(m''-m)}\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}$$
$$+\frac{e^{(m'-m)x}}{(m'-m''')(m'-m'')(m'-m)}\int\frac{Xdx}{e^{m'x}}$$
$$+\frac{1}{(m-m''')(m-m'')(m-m')}\int\frac{Xdx}{e^{mx}}\ldots\ldots(d).$$

Mais cette intégrale est encore incomplète, et nous allons la compléter, en observant que si à l'intégrale $\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}$ on ajoute une constante indéterminée $c'''$, cette constante devra être multipliée par la triple intégrale $\int e^{(m'-m)x}dx\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx$; or,

$$\int e^{(m'''-m'')x}dx=\frac{e^{(m'''-m'')x}}{m'''-m''};$$

donc $\int e^{(m''-m')x}dx\int e^{(m'''-m'')x}dx=\int\frac{e^{(m'''-m')x}dx}{m'''-m''}$

$$=\frac{e^{(m'''-m')x}}{(m'''-m'')(m'''-m')},$$

et par conséquent,

$$c''' \int e^{(m'-m)x}dx \int e^{(m''-m')x}dx \int e^{(m'''-m'')x}dx$$
$$= c''' \int \frac{e^{(m'''-m)x}dx}{(m'''-m'')(m'''-m')}$$
$$= \frac{c''' e^{(m'''-m)x}}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)} \ldots\ldots (e).$$

Mais à l'intégrale de $\int e^{(m''-m'')x}dx \int \frac{Xdx}{e^{m'''x}}$, il faut encore ajouter une constante indéterminée $c''$, qui par conséquent devra être multipliée par

$$\int e^{(m'-m)x}dx \int e^{(m''-m')x}dx = \int e^{(m'-m)x}dx \times \frac{e^{(m''-m')x}}{m''-m'}$$
$$= \int \frac{e^{(m''-m)x}dx}{m''-m'} = \frac{e^{(m''-m)x}}{(m''-m')(m''-m)},$$

ainsi il faudra encore ajouter à l'intégrale ($d$) la quantité

$$\frac{c'' e^{(m''-m)x}}{(m''-m')(m''-m)} \ldots\ldots\ldots (f).$$

De même devant encore ajouter à l'intégrale

$$\int e^{(m''-m')x}dx \int e^{(m'''-m'')x}dx \int \frac{Xdx}{e^{m'''x}}$$

une constante indéterminée $c'$, il faudra ajouter à l'intégrale ($d$), la quantité

$$c' \int e^{(m'-m)x}dx = \frac{c' e^{(m'-m)x}}{m'-m} \ldots\ldots (g).$$

Enfin, on complettera entièrement l'intégrale ($d$), en ajoutant encore la constante indéterminée $c$ qui est relative à l'intégrale finale. Cela posé, ajoutant à l'intégrale ($d$) les quantités ($e$), ($f$), ($g$) et la constante $c$; ensuite faisant attention que tout ce qui en résultera doit être multiplié par $e^{mx}$ pour avoir la

valeur de $y$ [équat. (426)], on aura

$$y=\frac{e^{m'''x}}{(m'''-m'')(m'''-m')(m'''-m)}\left(\int\frac{Xdx}{e^{m'''x}}+c'''\right)$$
$$+\frac{e^{m''x}}{(m''-m''')(m''-m')(m''-m)}\left(\int\frac{Xdx}{e^{m''x}}+c''\right)$$
$$+\frac{e^{m'x}}{(m'-m''')(m'-m'')(m'-m)}\left(\int\frac{Xdx}{e^{m'x}}+c'\right)$$
$$+\frac{e^{mx}}{(m-m''')(m-m'')(m-m')}\left(\int\frac{Xdx}{e^{mx}}+c\right).$$

Donc, généralement, faisant pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l}\beta=(m-m')(m-m'')\ldots.[m-m^{(n-1)'}]\\ \beta'=(m'-m)(m'-m'')\ldots.[m'-m^{(n-1)'}]\\ \beta''=(m''-m)(m''-m')\ldots.[m''-m^{(n-1)'}]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta^{(n-1)'}=[m^{(n-1)'}-m][m^{(n-1)'}-m']\ldots[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]\end{array}\right\}(428),$$

on aura

$$y=\frac{e^{mx}[c+\int e^{-mx}Xdx]}{\beta}+\frac{e^{m'x}[c'+\int e^{-m'x}Xdx]}{\beta'}$$
$$+\frac{e^{m''x}[c''+\int e^{-m''x}Xdx]}{\beta''}\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{e^{m^{(n-1)'}x}[c^{(n-1)'}+\int e^{-m^{(n-1)'}x}Xdx]}{\beta^{(n-1)'}}\ldots\ldots(429).$$

425. Lemme. Des équations (272) et (274) [art. 309], on déduit aisément celles

$$\int q^x dx\left\{\begin{array}{l}\sin bx\\ \cos bx\end{array}\right.=\frac{q^x}{b^2+(lq)^2}\left\{\begin{array}{l}\sin bx\\ \cos bx\end{array}\right.\times lq\left.\begin{array}{l}-\cos bx\\ +\sin bx\end{array}\right.\times b\Big\}(430).$$

Or,

$$d[X\int q^x dx\sin bx]=dX\int q^x dx\sin bx+Xq^x dx\sin bx;$$

d'où

$$\int Xq^x dx\sin bx=X\int q^x dx\sin bx-\int dX\int q^x dx\sin bx,$$

et substituant la valeur de $\int q^x dx \sin bx$ [1re éq. (430)], il vient

$$\int Xq^x dx \sin bx = \frac{q^x}{b^2+(lq)^2}(\sin bx lq - b\cos bx)\,X$$
$$-\frac{lq}{b^2+(lq)^2}\int \frac{dX}{dx} q^x dx \sin bx$$
$$+\frac{b}{b^2+(lq)^2}\int \frac{dX}{dx} q^x dx \cos bx \ldots\ldots (a).$$

On trouvera de même,

$$\int Xq^x dx \cos bx = \frac{q^x}{b^2+(lq)^2}(\cos bx lq + b\sin bx)\,X$$
$$-\frac{lq}{b^2+(lq)^2}\int \frac{dX}{dx} q^x dx \cos bx$$
$$-\frac{b}{b^2+(lq)^2}\int \frac{dX}{dx} q^x dx \sin bx \ldots\ldots (b).$$

Substituant successivement dans ces formules ($a$) et ($b$) les quantités $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{d^2X}{dx^2}$; $\frac{d^2X}{dx^2}$ et $\frac{d^3X}{dx^3}$; $\frac{d^3X}{dx^3}$ et $\frac{d^4X}{dx^4}$, etc., à la place de celles X et $\frac{dX}{dx}$, on aura une suite d'équations qui donneront successivement les valeurs de $\int \frac{dX}{dx} q^x dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases}$; $\int \frac{d^2X}{dx^2} q^x dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases}$, etc.; et par des substitutions successives jusqu'aux valeurs de $\int Xq^x dx \left\{ \begin{matrix} \sin bx \\ \cos bx \end{matrix} \right\}$ données par les équations ($a$) et ($b$), on aura celles

$$\int Xq^x dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases} = \frac{q^x}{m} \begin{bmatrix} \sin bxlq - b\cos bx \\ \cos bxlq + b\sin bx \end{bmatrix} \times$$

$$\left(X - \frac{n}{m}\frac{dX}{dx} + \frac{n^2-b^2}{m^2}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{n(n^2-3b^2)}{m^3}\frac{d^3X}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\pm \frac{bq^x}{m^2}\begin{pmatrix} \cos bxlq + b\sin bx \\ \sin bxlq - b\cos bx \end{pmatrix} \times$$

$$\left(\frac{dX}{dx} - \frac{2n}{m}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{3n^2-b^2}{m^2}\frac{d^3X}{dx^3} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots (431),$$

dans lesquelles nous avons fait pour abréger,

$$\{m = b^2 + (lq)^2 \quad \text{et} \quad n = lq\} \ldots\ldots\ldots (c).$$

Faisant

$$q = e^{-a}, \quad \text{d'où} \quad lq = -a \quad \text{et} \quad (lq)^2 = a^2,$$

les équations ($c$) deviennent

$$m = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad n = -a:$$

substituant ces valeurs dans les équations (431), il vient celles

$$\int Xe^{-ax}dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases} = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\begin{Bmatrix} a\sin bx + b\cos bx \\ a\cos bx - b\sin bx \end{Bmatrix}$$

$$\times\left(X + \frac{a}{a^2+b^2}\frac{dX}{dx} + \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\frac{d^2X}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}\frac{d^3X}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{be^{-ax}}{(a^2+b^2)^2}\begin{Bmatrix} b\sin bx - a\cos bx \\ b\cos bx + a\sin bx \end{Bmatrix}$$

$$\times\left(\frac{dX}{dx} + \frac{2a}{a^2+b^2}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{d^3X}{dx^3} + \text{etc.}\right) \ldots (432),$$

dont nous verrons tout à l'heure l'utilité.

426. Nous n'avons considéré dans ce qui précède,

l'équation linéaire (424), que dans le cas où toutes les racines de son auxiliaire (425) sont réelles; mais cette équation (425) peut avoir des racines imaginaires, et à cause que celles-ci se trouvent toujours de deux à deux, nous ne chercherons à connaître que ce que deviennent deux des termes de la formule (429), qui sont chacun affectés de l'une des deux racines imaginaires conjuguées en question; et afin de présenter d'une manière claire l'ensemble de ce calcul, nous supposerons que l'équation proposée étant d'un ordre quelconque $n$, on a

$$m = a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad m' = a - b\sqrt{-1},$$

et nous représenterons par la seule lettre Q les termes suivans affectés des racines réelles $m''$, $m'''$.....

Substituant les valeurs de $m$ et de $m'$ dans les équations du groupe (428), il est clair que les valeurs de $\beta$ et de $\beta'$, respectivement affectées des facteurs $m - m' = 2b\sqrt{-1}$ et $m' - m = -2b\sqrt{-1}$, pourront être imaginaires, et alors elles seront réductibles aux formes

$$\beta = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \beta' = \mathrm{M} - \mathrm{N}\sqrt{-1} \ldots (a)$$

(*voy.* mon *Algèbre*, pag. 295, et mes *Mélanges mathématiques*, pag. 27 et suivantes). Mais les valeurs de $\beta''$, $\beta'''$..... resteront toujours réelles; car si l'on représente par $q$ celle des racines réelles $m''$, $m'''$....., qui se trouve dans tous les facteurs binomes de la valeur de l'une des quantités $\beta''$, $\beta'''$....., il est clair que cette valeur sera affectée des deux seuls facteurs imaginaires $q - a - b\sqrt{-1}$ et $q - a + b\sqrt{-1}$, dont le produit est la quantité réelle $(q-a)^2 + b^2$; donc Q sera une quantité réelle, et l'équation (429) prendra la forme

$$y = \frac{e^{ax}e^{bx\sqrt{-1}}[c + \int e^{-ax}e^{-bx\sqrt{-1}}Xdx]}{M + N\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{e^{ax}e^{-bx\sqrt{-1}}[c' + \int e^{-ax}e^{bx\sqrt{-1}}Xdx]}{M - N\sqrt{-1}} + Q \ldots\ldots (b),$$

ou, réduisant au même dénominateur les deux premiers termes du second membre de cette équation ($b$), faisant attention que $e^{\pm bx\sqrt{-1}} = \cos bx \pm \sqrt{-1} \sin bx$, et représentant respectivement par $2c$ et $2c'$ les constantes indéterminées $c + c'$ et $(c - c')\sqrt{-1}$, on aura, toutes multiplications et réductions faites,

$$y = \frac{2e^{ax}\left\{\begin{array}{l}(M\cos bx + N\sin bx)(c + \int e^{-ax}X\cos bx dx)\\ +(M\sin bx - N\cos bx)(c' + \int e^{-ax}X\sin bx dx)\end{array}\right\}}{M^2 + N^2}$$
$$+ Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (433).$$

Or, nous avons trouvé dans l'article précédent, les valeurs des termes intégraux de cette formule (433) [équat. (432)]; donc l'intégration de toute équation différentielle linéaire, dont l'auxiliaire a des racines imaginaires, n'offre plus aucune difficulté.

427. Il pourrait se faire que les deux termes de la formule (429) que nous supposions dans l'article précédent être affectée d'exposans imaginaires $m = a + b\sqrt{-1}$ et $m' = a - b\sqrt{-1}$, eussent leurs dénominateurs respectifs $\beta$ et $\beta'$ réels; ce qui, conséquemment, rendrait ces deux dénominateurs égaux : il faudrait, dans ce cas-là, faire M = au dénominateur commun à ces deux termes, et faire $N = 0$, et alors la formule (433) donnerait de même l'intégrale demandée. Par exemple, l'équation

$$d^3y - 3d^2ydx + 7dydx^2 - 5ydx^3 = x^3dx^3$$

a pour auxiliaire

$$m^3 - 3m^2 + 7m - 5 = 0,$$

dont les trois racines sont $m=1+2\sqrt{-1}$, $m'=1-2\sqrt{-1}$ et $m''=1$ ; donc

$$\beta=(m-m')(m-m'')=-8,\quad \beta'=(m'-m)(m'-m'')=-8$$
$$\text{et}\quad \beta''=(m''-m)(m''-m')=4;$$

ainsi, faisant $M=-8$, $N=0$, et divisant haut et bas par $M=-8$, la formule (433) donnera celle

$$y=-\frac{e^{-x}}{4}\left[\cos 2x\left(c+\int e^{-x}x^3dx\cos 2x\right)\right.$$
$$\left.+\sin 2x\left(c'+\int e^{-x}x^3dx\sin 2x\right)\right]$$
$$+\frac{e^x}{4}\left(c''+\int e^{-x}x^3dx\right),$$

dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer les valeurs des deux intégrales $\int e^{-x}x^3dx\begin{cases}\cos 2x\\ \sin 2x\end{cases}$ données par les formules (432), et celle de l'intégrale $\int e^{-x}x^3dx$ donnée par la formule (213) [art. 265].

428. De notre formule (433), nous déduirons aisément l'intégrale de l'équation linéaire du second ordre

$$ddy+Bdydx+Aydx^2=Xdx^2\ldots\ldots(434),$$

lorsque les deux racines $m$, $m'$ de son auxiliaire sont imaginaires. En effet, puisque $m=a+b\sqrt{-1}$ et $m'=a-b\sqrt{-1}$, on aura

$$m-m'=2b\sqrt{-1}\quad\text{et}\quad m'-m=-2b\sqrt{-1},$$

donc $\quad M=0,\quad N=2b\quad$ et $\quad M^2+N^2=4b^2.$

Substituant ces valeurs dans l'équation (433) dont nous supprimerons Q qui est nul lorsque l'ordre de l'équation ne dépasse pas 2, nous aurons

$$y=\frac{e^{ax}}{b}\left[\sin bx\left(c+\int e^{-ax}\cos bxXdx\right)\right.$$
$$\left.+\cos bx\left(c'-\int e^{-ax}\sin bxXdx\right)\right]\ldots\ldots(435),$$

ce qui est l'intégrale complète de l'equation (434).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation linéaire du second ordre*

$$ddy + 2dydx + 2ydx^2 = xdx^2 \ldots\ldots (a).$$

Donc $A = 2$, $B = 2$, $X = x$, ce qui donne l'équation auxiliaire

$$m^2 + 2m + 2 = 0,$$

d'où $m = -1 + \sqrt{-1}$ et $m' = -1 - \sqrt{-1}$;

donc $a = -1$ et $b = 1$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (431) [*], on a

$$\int e^x x dx \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} = \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} x \sin x - x \cos x + \cos x \\ x \cos x + x \sin x - \sin x \end{bmatrix},$$

et enfin substituant dans l'équation (435) ces valeurs intégrales, ainsi que celle de $a$ et de $b$, on a, toutes réductions faites,

$$y = \frac{c \sin x + c' \cos x}{e^x} + \tfrac{1}{2}(x - 1) \ldots (b).$$

ce qui est l'intégrale complète de la proposée ($a$).

429. Nous ne devons pas oublier de mentionner le cas où, dans l'équation (434), on aurait $B = 0$; car le fameux problème *des trois corps*, l'un des plus intéressans de la physique céleste, se réduit à l'intégration d'une équation de la forme

$$ddy + Aydx^2 = Xdx^2 \ldots\ldots (436).$$

Or, il est évident que l'auxiliaire de cette équation étant $m^2 + A = 0$, d'où $m = \sqrt{A}\sqrt{-1}$ et $m' = -\sqrt{A}\sqrt{-1}$,

---

[*] Puisque $a = -1$, on a $e^{-ax} = e^x$ : ainsi les valeurs des termes intégraux de l'équation (435), appartiennent, dans cet exemple, à la formule (431), en y faisant $q = e$, d'où $lq = 1$.

on

on aura $a=0$ et $b=\sqrt{A}$ ; donc l'équation (434) se réduira à celle

$$y=\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin(x\sqrt{A})\left[c+\int Xdx\cos(x\sqrt{A})\right]\\+\cos(x\sqrt{A})\left[c'-\int Xdx\sin(x\sqrt{A})\right]\end{array}\right\}}{\sqrt{A}}\ldots(437),$$

qui est l'intégrale complète de l'équation (436) du problème des trois corps.

430. Si toutes les racines $m$, $m'$, $m''$.... de l'auxiliaire (425) sont égales entre elles, c'est-à-dire, si l'on a à intégrer une équation de la forme

$$p^n ydx^n - np^{n-1}dydx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}d^2ydx^{n-2}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p^{n-3}d^3ydx^{n-3}\ldots+d^ny=Xdx^n\ldots(438),$$

dont l'auxiliaire est $(m-p)^n=0$ ; alors tous les dénominateurs $\beta$, $\beta'$, $\beta''$....$\beta^{(n-1)'}$ de la formule (429) étant nuls, cette dernière formule ne pourra servir pour avoir l'intégrale demandée. Mais en remontant à la formule (426), celle-ci donnera immédiatement pour intégrale de l'équation proposée (438),

$$y=e^{px}\left[\int dx\int dx\int dx\ldots\int\frac{Xdx}{e^{px}}+c\int dx\int dx\ldots\int dx\right.$$
$$\left.+c'\int dx\ldots\int dx\ldots+c^{(n-2)'}\int dx+c^{(n-1)'}\right],$$

qui, évidemment, est le développement par intégrations répétées de

$$y=e^{px}\int^n\frac{Xdx^n}{e^{px}}\ldots\ldots(a)\ [\text{équat. (403), art. 409}],$$

en se réservant d'ajouter les constantes $c$, $c'$...$c^{(n-1)'}$, à mesure qu'on développe le terme intégral de l'équa-

tion ($a$). Mais nous avons dans l'équation (404) [art. 410], le développement complet et général en intégrales séparées, des quantités de la forme de l'intégrale $n^{uple}$ de l'équation ($a$) ; donc mettant dans cette formule (404), $\frac{X}{e^{px}}$ à la place de $\phi x$, nous aurons

$$y=\frac{e^{px}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int\frac{Xdx}{e^{px}}-(n-1)x^{n-2}\int\frac{xXdx}{e^{px}}\right.$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}\int\frac{x^2Xdx}{e^{px}}\ldots\ldots\pm\int\frac{x^{n-1}Xdx}{e^{px}}$$
$$\left.+cx^{n-1}+c'x^{n-2}+c''x^{n-3}\ldots\ldots+c^{(n-1)'}\right]\ldots(439),$$

ce qui est l'intégrale complète de l'équation (438).

Si l'équation linéaire de l'ordre $n$ n'a qu'une partie de ses racines égales, il est clair qu'on devra toujours avoir recours à l'équation (426), qu'on développera ensuite convenablement.

Par exemple, soit proposé d'intégrer l'équation linéaire

$$d^4y-8d^3ydx+23d^2ydx^2-28dydx^3$$
$$+12ydx^4=xdx^4\ldots\ldots(b).$$

On a $A=12$, $B=-28$, $C=23$, $D=-8$ et $X=x$ ; donc l'auxiliaire est

$$m^4-8m^3+23m^2-28m+12=0,$$

qui a pour racines $m=2$, $m'=2$, $m''=1$ et $m'''=3$. Substituant ces valeurs dans l'équation (426), on a

$$y=e^{2x}\left[\int dx\int e^{-x}dx\int e^{2x}dx\int\frac{xdx}{e^{3x}}\right.$$
$$\left.+c\int dx\int e^{-x}dx\int e^{2x}dx+c'\int dx\int e^{-x}dx+c''\int dx+c'''\right],$$

et développant, il vient

$$y = \frac{x}{12} + \frac{7}{36} + ce^{3x} + c'e^{x} + c''xe^{2x} + c'''e^{2x},$$

qui est l'intégrale complète de l'équation ($b$).

431. Considérons maintenant l'équation linéaire de l'ordre $n$

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + Cd^2ydx^{n-2} \ldots + d^ny = Xdx^n$$

[équat. (424)], dans le cas où les coefficiens A, B, C... sont constans et $X = 0$; ce qui réduit l'équation précédente à celle

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + Cd^2ydx^{n-2} \ldots + d^ny = 0 \ldots (440),$$

dont l'intégrale complète se déduit immédiatement de celle (427) qui, à cause de $X = 0$, se réduit tout de suite à l'équation

$$y = ce^{mx} + c'e^{m'x} + c''e^{m''x} \ldots + c^{(n-1)'}e^{m^{(n-1)'}x} \ldots (441).$$

432. Si l'auxiliaire de l'équation (440) a des racines imaginaires; par exemple, si $m = a + b\sqrt{-1}$ et $m' = a - b\sqrt{-1}$, alors l'intégrale (441) devient

$$y = e^{ax}(ce^{bx\sqrt{-1}} + c'e^{-bx\sqrt{-1}}) + c''e^{m''x} + \text{etc.}$$

Mais $\quad e^{\pm bx\sqrt{-1}} = \cos bx \pm \sqrt{-1} \sin bx$;

donc

$$y = e^{ax}[(c + c')\cos bx + (c - c')\sqrt{-1}\sin bx)] + c''e^{m''x} + \text{etc.},$$

ou représentant respectivement par $c$ et $c'$ les constantes arbitraires $c + c'$ et $(c - c')\sqrt{-1}$, on aura

$$y = e^{ax}(c\cos bx + c'\sin bx) + c''e^{m''x} + \text{etc.} \ldots\ldots (a).$$

EXEMPLE. *Intégrer l'équation du cinquième ordre*

$$d^5y - 12d^4ydx + 62d^3ydx^2 - 172d^2ydx^3 + 256dydx^4 - 160ydx^5 = 0 \ldots\ldots (b).$$

L'auxiliaire de cette équation est

$$m^5 - 12m^4 + 62m^3 - 172m^2 + 256m - 160 = 0;$$

dont les racines sont $m = 2 + 2\sqrt{-1}$, $m' = 2 - 2\sqrt{-1}$; $m'' = 3 + \sqrt{-1}$, $m''' = 3 - \sqrt{-1}$ et $m^{\text{IV}} = 2$; donc faisant successivement $a = 2$, $b = 2$ et $a = 3$, $b = 1$, la formule ($a$) donnera l'équation

$$y = e^{2x}[(c\cos 2x + c'\sin 2x) + e^x(c''\cos x + c'''\sin x) + c^{\text{IV}}]$$

qui est l'intégrale complète de l'équation ($b$).

433. Lorsque l'auxiliaire de l'équation qu'on veut intégrer a des racines égales, il est évident qu'on ne peut se servir immédiatement de la formule (429), en y faisant, comme cela doit être, $X = 0$, parce qu'alors les constantes $\frac{c}{\beta}, \frac{c'}{\beta'} \ldots\ldots$ en même nombre que celui des racines égales, et que nous avons respectivement représentées par $c, c' \ldots\ldots$ (art. 431), seraient des quantités infinies; il faut donc alors recourir à la formule (426), en faisant convenablement le développement de chacun des facteurs des constantes $c, c' \ldots\ldots$ Mais si toutes les racines de l'auxiliaire sont égales entre elles, c'est-à-dire, si l'équation proposée est de la forme

$$p^n ydx^n - np^{n-1}dydx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}d^2ydx^{n-2} \ldots\ldots \pm d^ny = 0 \ldots\ldots (442),$$

alors l'équation (426), dans laquelle il faut faire $\int \frac{Xdx}{e^{m(n-1)'x}} = 0$, se réduisant à celle

$$y = e^{px}\left[c\int dx\int dx\int dx \ldots\ldots + c'\int dx\int dx \ldots\ldots \ldots + c^{(n-2)'}\int dx + c^{(n-1)'}\right];$$

on en conclura tout de suite que l'intégrale de l'équation (442) est

$$y = e^{px}\left[cx^{n-1} + c'x^{n-2} + c''x^{n-3} \ldots\ldots \ldots\ldots + c^{(n-2)'}x + c^{(n-1)'}\right] \ldots\ldots (443).$$

EXEMPLE I. *Intégrer l'équation*

$$d^3y - 14d^2ydx + 64dydx^2 - 96ydx^3 = 0.$$

L'auxiliaire de cette équation est

$$m^3 - 14m^2 + 64m - 96 = 0,$$

qui a pour racines $m = 6$, $m' = 4$ et $m'' = 4$; donc ne prenant dans l'équation (426) que les termes affectés des constantes arbitraires, il vient

$$y = e^{6x}\left[c\int e^{-2x}dx\int dx + c'\int e^{-2x}dx + c''\right].$$

Or, le premier terme entre crochets est $= c\int e^{-2x}xdx = -\frac{c}{2}e^{-2x}(x+\frac{1}{2})$ [form. (213), art. 265], et le second terme est $= -\frac{c'}{2}e^{-2x}$; donc représentant respectivement par $c$ et $c'$ les constantes indéterminées $-\frac{c}{2}$ et $-\frac{(c+2c')}{4}$, on aura pour intégrale complète de la proposée

$$y = e^{4x}\left[cx + c' + c''e^{2x}\right].$$

EXEMPLE II. *Intégrer l'équation*

$$d^4y - 8d^3ydx + 26d^2ydx^2 - 48dydx^3 + 45ydx^4 = 0 \ (*).$$

(*) Je n'ai donné ce second exemple, qu'afin de rendre plus sensible l'utilité de notre théorie, pour intégrer très-facilement certaines équations qu'on aurait beaucoup de peine à intégrer suivant l'ancienne théorie.

L'auxiliaire de cette équation est

$$m^4 - 8m^3 + 26m^2 - 48m + 45 = 0,$$

dont les quatre racines sont $m = 3$, $m' = 3$, $m'' = 1 + 2\sqrt{-1}$, $m''' = 1 - 2\sqrt{-1}$ : donc ne prenant dans la formule (426), dans laquelle $X = 0$, que les termes affectés de constantes arbitraires $c$, $c'$....., on aura

$$y = e^{3x}\left[c\int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})x}dx \int e^{-4\sqrt{-1}x}dx \right.$$
$$\left. + c'\int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})x}dx + c''\int dx + c'''\right],$$

et développant, en représentant toujours par $c$ et $c'$ les combinaisons de ces constantes arbitraires dans leur état primitif avec des quantités constantes réelles ou imaginaires, on a

$$y = e^x\left[ce^{-2x\sqrt{-1}} + c'e^{2x\sqrt{-1}}\right] + e^{3x}(c''x + c''').$$

Mais $\quad e^{\mp 2x\sqrt{-1}} = \cos 2x \mp \sin 2x\sqrt{-1}$ ;

donc représentant respectivement par $c$ et $c'$ les quantités $c + c'$ et $(c' - c)\sqrt{-1}$, il viendra définitivement pour intégrale complète de la proposée

$$y = e^x\left[c\cos 2x + c'\sin 2x + e^{2x}(c''x + c''')\right].$$

434. Le troisième cas que nous allons considérer relativement à l'équation linéaire (424), est celui où tous les coefficiens A, B, C...et X sont des quantités constantes, et pour éviter toute équivoque, nous représenterons par M la valeur constante que nous supposons à X ; c'est-à-dire, que nous nous proposerons d'intégrer l'équation linéaire

$$Ay dx^n + Bdy dx^{n-1} + Cd^2y dx^{n-2} \ldots\ldots + d^ny$$
$$= M dx^n \ldots\ldots\ldots\ldots (444).$$

Puisque le symbole X, dans la formule (427) [art. 423],

représente actuellement une quantité constante M, on peut le faire sortir en dehors du signe d'intégration qui l'affecte, et successivement en dehors de tous les signes d'intégration qui précèdent; de manière qu'alors l'équation (427) deviendra

$$y = Me^{mx} \int e^{(m'-m)x} dx \int e^{(m''-m')x} dx \int e^{(m'''-m'')x} dx \ldots\ldots$$

$$\ldots \int e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x} dx \int \frac{dx}{e^{m^{(n-1)'}x}} + c^{(n-1)'} e^{m^{(n-1)'}x}$$

$$+ c^{(n-2)'} x e^{m^{(n-2)'}x} \ldots + c'' e^{m''x} + c' e^{m'x} + c e^{mx} \ldots (a);$$

mais $$\int \frac{dx}{e^{m^{(n-1)'}x}} = \frac{-1}{m^{(n-1)'} e^{m^{(n-1)'}x}};$$

donc

$$\int e^{[m^{(n-1)'}-m^{(n-2)'}]x} dx \int \frac{dx}{e^{m^{(n-1)'}x}} = \frac{-1}{m^{(n-1)'}} \int \frac{dx}{e^{m^{(n-2)'}x}}$$

$$= \frac{1}{m^{(n-1)'} m^{(n-2)'} e^{m^{(n-2)'}x}};$$

continuant ces intégrations successives en remontant jusqu'au premier signe intégral $\int$; effectuant la multiplication de l'intégrale définitive par $e^{mx}$, et faisant attention que le produit $m.m'.m''\ldots m^{(n-1)'}$ de toutes les racines de l'auxiliaire, est égal au dernier terme de cette équation, on aura pour intégrale complète de l'équation (444),

$$y = \frac{M}{A} + ce^{mx} + c' e^{m'x} + c'' e^{m''x} \ldots + c^{(n-1)'} e^{m^{(n-1)'}x} \ldots (445).$$

435. Si l'auxiliaire de la proposée (444) a des racines imaginaires, celles-ci se trouvant toujours de deux en deux, nous n'avons besoin que d'en considérer deux conjuguées. Supposant donc que $m = a + b\sqrt{-1}$ et $m' = a - b\sqrt{-1}$, et représentant par la seule lettre Q, tous les termes de l'équation (445) qui

sont affectés des racines réelles de l'auxiliaire, on aura

$$y = \frac{M}{A} + e^{ax}\left[ce^{bx\sqrt{-1}} + c'e^{-bx\sqrt{-1}}\right] + Q.$$

Mais $e^{\pm bx\sqrt{-1}} = \cos bx \pm \sin bx \sqrt{-1}$, donc

$$y = \frac{M}{A} + e^{ax}\left[(c+c')\cos bx + (c-c')\sqrt{-1}\sin bx\right] + Q,$$

ou représentant respectivement par $c$ et $c'$ les quantités constantes arbitraires $c + c'$ et $(c - c')\sqrt{-1}$, on aura définitivement

$$y = \frac{M}{A} + e^{ax}\left[c\cos bx + c'\sin bx\right] + c''e^{m''x} + c'''e^{m'''x}$$
$$\ldots\ldots + c^{(n-1)'}e^{m^{(n-1)'}x} \ldots\ldots\ldots (446).$$

436. Si toutes les racines de l'auxiliaire de l'équation (444) sont égales, alors passant toujours la constante $X = M$ en avant de tous les signes d'intégration, l'équation (426) donnera

$$y = e^{mx}\left[M\int dx\int dx\int dx \ldots \int\frac{dx}{e^{mx}} + c\int^{n-1}dx^{n-1}\right.$$
$$\left. + c'\int^{n-2}dx^{n-2} + c''\int^{n-3}dx^{n-3} \ldots + c^{(n-1)'}\right] (*).$$

Mais $M\int dx\int dx \ldots \int\frac{dx}{e^{mx}}$ avec un nombre $n$ de signes intégraux, est $= \pm\frac{M}{m^n e^{mx}}$, le signe positif si $n$ est un nombre pair, le signe négatif dans le cas contraire; et puisque toutes les racines de l'auxiliaire sont égales à $m$, on a $A = \pm m^n$, les signes positif et négatif dans les mêmes cas que précédemment; donc lorsque toutes les

(*) Voyez pour les expressions des termes affectés des constantes arbitraires $c$, $c'$, $c''$ ...., l'équation (403), en y faisant $\phi x$ constante.

racines de l'équation proposée (444) sont égales, son intégrale complète est

$$y = \frac{M}{A} + e^{mx}\left[cx^{n-1} + c'x^{n-2} + c''x^{n-3} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + c^{(n-2)'}x + c^{(n-1)'}\right] \ldots\ldots (447).$$

437. Nous allons enfin examiner le cas où tous les coefficiens A, B, C, D....X de l'équation (424) sont fonction de la variable $x$. Mais avant de commencer cet examen, nous observerons que l'intégrale complète d'une équation différentielle de l'ordre $n$ étant, par exemple,

$$y = cFx + c'F'x + c''F''x \ldots + c^{(n-1)'}F^{(n-1)'}x \ldots (a),$$

il est clair que si l'on fait successivement toutes les constantes arbitraires, excepté une, égales à zéro; la constante conservée étant successivement $c$, ensuite $c'$, après cela $c''$, et ainsi de suite pour les autres jusqu'à celle $c^{(n-1)'}$, on aura un nombre $n$ d'intégrales particulières, ou valeurs particulières de $y$ qui seront successivement $cFx$, $c'F'x$, $c''F''x \ldots c^{(n-1)'}F^{(n-1)'}x$; donc si l'on peut parvenir à connaître les $n$ intégrales particulières de l'espèce que nous venons de considérer, d'une équation différentielle de l'ordre $n$, on en conclura subitement l'intégrale entière et complète de cette équation.

438. Afin de simplifier le calcul et de fixer les idées dans nos recherches sur l'intégration de l'équation linéaire de l'ordre $n$ (424), lorsque tous les coefficiens sont des fonctions de la variable $x$, nous ne considérerons d'abord que celles du troisième ordre; c'est-à-dire que nous nous proposerons d'intégrer l'équation

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} = X \ldots (a),$$

dans laquelle A, B, C et X sont des fonctions de $x$. Faisons

$$y = \varphi(x) \int f(x)\,dx \ldots\ldots (b),$$

en représentant par $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux fonctions indéterminées de $x$, que nous chercherons à déterminer d'après la condition que cette valeur de $y$ [équat. $(b)$] satisfasse à l'équation $(a)$.

Différentiant trois fois de suite l'équation $(b)$, on a

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d\varphi(x)}{dx}\int f(x)\,dx + \varphi(x) f(x),\\
\frac{ddy}{dx^2} &= \frac{dd\varphi(x)}{dx^2}\int f(x)\,dx + \frac{2d\varphi(x)}{dx} f(x)\\
&\quad + \varphi(x)\frac{df(x)}{dx},\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}\int f(x)\,dx + \frac{3dd\varphi(x)}{dx^2} f(x)\\
&\quad + \frac{3d\varphi(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx} + \varphi(x)\frac{ddf(x)}{dx^2} (*)
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (c).$$

Substituant ces valeurs et celle de $y$ [équat. $(b)$] dans l'équation $(a)$, on a

$$\left[A\varphi(x) + B\frac{d\varphi(x)}{dx} + C\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + D\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}\right]\int f(x)\,dx$$
$$+ \left[B\varphi(x) + 2C\frac{d\varphi(x)}{dx} + 3D\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right] f(x)$$
$$+ \left[C\varphi(x) + 3D\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]\frac{df(x)}{dx} + D\varphi(x)\frac{ddf(x)}{dx^2}$$
$$= X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

---

(*) On a généralement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\int f(x)dx + \frac{nd^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} f(x) + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}}\frac{df(x)}{dx}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{d^{n-3}\varphi(x)}{dx^{n-3}}\frac{d^2f(x)}{dx^2} \ldots\ldots + \varphi(x)\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}};$$

Or, à cause de la fonction indéterminée $\varphi(x)$ de $x$, on peut prendre le coefficient de $\int f(x)\,dx = 0$, ce qui donne pour déterminer $\varphi(x)$, l'équation

$$A\varphi(x) + B\frac{d\varphi(x)}{dx} + C\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + D\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} = 0 \ldots\ldots (e),$$

et pour déterminer $f(x)$, l'équation

$$A'f(x) + B'\frac{df(x)}{dx} + C'\frac{ddf(x)}{dx^2} = X \ldots (f),$$

dans laquelle nous avons fait, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} A' &= B\varphi(x) + 2C\frac{d\varphi(x)}{dx} + 3D\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \\ B' &= C\varphi(x) + 3D\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ C' &= D\varphi x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (g).$$

Or, l'équation $(e)$ n'est autre chose que celle $(a)$, en faisant dans cette dernière équation $X = 0$, et y mettant $\varphi(x)$ à la place de la lettre $y$ qui représente elle-même une fonction de $x$. Quant à l'équation $(f)$, elle est d'un ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation proposée $(a)$.

Faisant actuellement

$$f(x) = \varphi_1(x) \int f_1(x)\,dx \ldots\ldots (h),$$

en représentant par $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ deux nouvelles fonctions indéterminées de $x$, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \int f_1(x)\,dx + \varphi_1(x) f_1(x) \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} \int f_1(x)\,dx \\ &\quad + \frac{2d\varphi_1(x)}{dx} f_1(x) + \varphi_1(x)\frac{df_1(x)}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (i),$$

Substituant ces valeurs et celle de $f(x)$ [équat. $(h)$] dans l'équation $(f)$, il vient

$$\left[A'\varphi_1(x)+B'\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+C'\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]\int f_1(x)\,dx$$
$$+\left[B'\varphi_1(x)+2C'\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right]f_1(x)$$
$$+C'\varphi_1(x)\frac{df_1(x)}{dx}=X\ldots\ldots\ldots(k).$$

Or, à cause de l'indéterminée $\varphi_1(x)$, on peut faire dans cette dernière équation, le coefficient de $\int f_1(x)dx=0$, ce qui donne pour déterminer $\varphi_1(x)$, l'équation

$$A'\varphi_1(x)+B'\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+C'\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}=0\ \ldots.(l),$$

laquelle est la même que celle $(f)$, en faisant dans cette dernière équation $X=0$, et y substituant $\varphi_1(x)$ à $f(x)$. L'équation $(l)$ réduit celle $(k)$ à l'équation

$$A''f_1(x)+B''\frac{df_1(x)}{dx}=X\ldots\ldots\ldots(m),$$

dans laquelle on a fait

$$\left.\begin{aligned}A''&=B'\varphi_1(x)+2C'\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\\B''&=C'\varphi_1(x)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(n),$$

qui n'est que du premier ordre, et qui sert à déterminer $f_1(x)$.

Faisant enfin

$$f_1(x)=\varphi_2(x)\int f_2(x)\,dx\ldots\ldots(o),$$

en représentant par $\varphi_2(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions indéterminées de $x$, on a

$$\frac{df_1(x)}{dx}=\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\int f_2(x)\,dx+\varphi_2(x)f_2(x);$$

et substituant cette valeur, ainsi que celle de $f_1(x)$ dans l'équation $(m)$, il vient celle

$$\left[A''\varphi_2(x)+B''\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right]\int f_2(x)\,dx+B''\varphi_2(x)f_2x=X;$$

dans laquelle faisant le coefficient de $\int f_2(x)\,dx=0$, à cause de l'indéterminée $\varphi_2(x)$, on aura pour déterminer $\varphi_2(x)$, l'équation

$$A''\varphi_2(x)+B''\frac{d\varphi_2(x)}{dx}=0\ldots\ldots(p);$$

qui est la même que celle $(m)$ en faisant dans cette dernière équation $X=0$, et y substituant à la place de $f_1(x)$ la quantité $\varphi_2(x)$. Enfin on aura pour déterminer $f_2(x)$, l'équation sans facteurs différentiels

$$f_2(x)=\frac{X}{B''\varphi_2(x)}\ldots\ldots(q).$$

Mais $B''=C'\varphi_1(x)$ [2e équat. en $(n)$], et $C'=D\varphi(x)$ [3e équat, en $(g)$], donc $B''=D\varphi(x)\varphi_1(x)$, et par conséquent

$$f_2(x)=\frac{X}{D\varphi(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)}\ldots\ldots(r).$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(o)$, ensuite celle qui en résulte pour $f_1(x)$ dans l'équation $(h)$, et enfin substituant la valeur que l'on obtient de $f(x)$ dans l'équation $(b)$, on aura

$$y=\varphi(x)\int\varphi_1(x)dx\int\varphi_2(x)dx\int\frac{Xdx}{D\varphi(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)}\ldots(s).$$

Donc si l'on peut parvenir à intégrer les équations $(e)$, $(l)$ et $(p)$, on aura l'intégrale de la proposée $(a)$. Mais nous allons simplifier ce calcul en faisant voir que si l'on parvient seulement à intégrer l'équation $(e)$,

on n'aura plus besoin d'intégrer les suivantes ($l$) et ($p$) pour avoir $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.

En effet, multipliant l'équation ($e$) par $\int\varphi_1(x)\,dx$, et ajoutant à ce produit l'équation ($l$) après y avoir substitué les valeurs de A′, B′ et C′ groupées en ($g$), on aura

$$A\varphi(x)\int\varphi_1(x)dx+B\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\int\varphi_1(x)\,dx+\varphi(x)\,\varphi_1(x)\right]$$

$$+C\left[\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\int\varphi_1(x)dx+2\frac{d\varphi(x)}{dx}\varphi_1(x)+\varphi(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right]$$

$$+D\left[\frac{d^3\varphi(x)}{cdx^3}\int\varphi_1(x)dx+3\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\varphi_1(x)+3\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right.$$

$$\left.+\varphi(x)\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]=0.$$

Or, il est aisé de voir que les polynomes que multiplient B, C et D sont respectivement les différentielles des premier, second et troisième ordres de $\varphi(x)\int\varphi_1(x)\,dx$, divisées par $dx$ élevée à une puissance égale à l'ordre de différentiation ; donc l'équation précédente se réduit à celle

$$A\varphi(x)\int\varphi_1(x)\,dx+B\frac{d[\varphi(x)\int\varphi_1(x)\,dx]}{dx}$$

$$+C\frac{d^2[\varphi(x)\int\varphi_1(x)dx]}{dx^2}+D\frac{d^3[\varphi(x)\int\varphi_1(x)dx]}{dx^3}=0\ldots(t),$$

laquelle est exactement la même que l'équation ($e$), en mettant dans cette dernière la fonction de $x$ exprimée par $\varphi(x)\int\varphi_1(x)\,dx$ à la place de celle représentée par $\varphi(x)$. Donc si l'une des intégrales particulières de l'espèce de celles que nous avons considérées à l'article 437 de l'équation ($e$) est $\varphi(x)=c\Phi(x)$, une autre intégrale particulière de même espèce que nous

représenterons par $c'\Phi'(x)$ de l'equation $(e)$, sera égale à $\varphi(x)\int\varphi_1(x)dx$, ou plutôt à $c\Phi(x)\int c_1\Phi_1(x)dx$, en mettant à la place de $\varphi x$ sa première valeur particulière dans l'équation $(e)$, et à la place de $\varphi_1(x)$ sa première valeur particulière $c_1\Phi_1(x)$ dans l'équation $(l)$; on aura donc $cc_1\Phi(x)\int\Phi_1(x)dx = c'\Phi'(x)$, d'où l'on tire l'équation

$$\int\Phi_1(x)dx = \frac{c'}{cc_1}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}$$

qui, différentiée et divisée par $dx$, donne

$$\Phi_1(x) = \frac{c'}{cc_1dx}d\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]\ldots\ldots(u).$$

De même représentant par $c''\Phi''(x)$ la troisième intégrale particulière de l'équation $(e)$, et par $c'_1\Phi'_1(x)$ la seconde intégrale particulière de l'équation $(l)$, on aura, par un raisonnement semblable au précédent,

$$\Phi'_1(x) = \frac{c''}{cc'_1dx}d\left[\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)}\right]\ldots\ldots(v).$$

Si actuellement on considère que l'équation $(p)$ est à l'égard de celle $(l)$, ce qu'est cette dernière équation par rapport à celle $(e)$, on en conclura aisément que l'intégrale de l'équation du premier ordre $(p)$ étant $\varphi_2(x) = c_2\Phi_2(x)$, on a

$$\Phi_2(x) = \frac{c'_1}{c_1c_2dx}d\left[\frac{\Phi'_1(x)}{\Phi_1(x)}\right]\ldots\ldots(w)\,[*].$$

---

[*] D'ailleurs si l'on veut se convaincre, *à priori*, de la vérité de cette équation $(w)$, on n'a qu'à multiplier l'équation $(l)$ par $\int\varphi_2(x)dx$, ajouter au produit l'équation $(p)$, en y substituant les valeurs de A″ et de B″ groupées en $(n)$, et rassembler les termes qui

Substituant dans cette équation les valeurs respectives de $\Phi'_1(x)$ et de $\Phi_1(x)$ [équat. $(v)$ et $(u)$], on a

$$\Phi_2(x) = \frac{c''}{c'c_2dx}\, d\left\{d\left[\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)}\right] : d\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]\right\} \ldots\ldots (x).$$

Ces valeurs étant obtenues, commençons à mettre dans l'équation $(s)$ les symboles $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ qui représentent les premières intégrales particulières des équations $(e)$, $(l)$ et $(p)$ divisées par les constantes arbitraires correspondantes $c$, $c_1$ et $c_2$, à la place des symboles respectifs $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$, et ensuite substituons à la place de $\Phi_1(x)$ et de $\Phi_2(x)$ leurs valeurs respectives [équat. $(u)$ et $(x)$], ce qui donnera, toutes réductions faites,

---

ont le même coefficient, ce qui donnera

$$A'\phi_1(x)\int\phi_2(x)dx + B'\left[\frac{d\phi_1(x)}{dx}\int\phi_2(x)\,dx + \phi_1(x)\,\phi_2(x)\right]$$
$$+C'\left[\frac{d^2\phi_1(x)}{dx^2}\int\phi_2(x)dx + 2\,\frac{d\phi_1(x)}{dx}\phi_2(x) + \phi_1(x)\,\frac{d\phi_2(x)}{dx}\right] = 0.$$

Or les polynomes qui multiplient B′ et C′ sont respectivement les différentielles du premier et du second ordre de $\phi_1(x)\int\phi_2(x)\,dx$ divisées par $dx$ élevée à une puissance du même degré que l'ordre de différentiation ; donc l'équation précédente se réduit à celle

$$A'\phi_1(x)\int\phi_2(x)dx + \frac{B'd[\phi(x)\int\phi_2(x)dx]}{dx} + \frac{C'd^2[\phi_1(x)\int\phi(x)dx]}{dx^2} = 0.$$

Or, cette dernière équation est du même ordre et a les mêmes coefficiens que celle $(l)$; donc si l'une des intégrales particulières de l'équation $(l)$ est $c_1\Phi_1(x)$, l'autre intégrale particulière de la même équation, que je représente par $c'_1\Phi'_1(x)$, sera égale à $\phi_1(x)\int\phi_2(x)dx$, ou plutôt à $c_1c_2\Phi_1(x)\int\Phi_2(x)dx$, en représentant par $\phi_2(x) = c_2\Phi_2(x)$ l'intégrale de l'équation $(p)$ ; donc $\int\Phi_2(x)\,dx = \frac{c'_1}{c_1c_2}\,\frac{\Phi'_1(x)}{\Phi_2(x)}$, d'où par la différentiation et divisant par $dx$, on tire l'équation $(w)$.

$$y = \Phi(x)$$

$$y = \Phi(x)\int d\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]\int d\left[\frac{d\Phi''(x) - \Phi''(x)\,dl\Phi(x)}{d\Phi'(x) - \Phi'(x)dl\Phi(x)}\right]$$

$$\times\int\frac{Xdx^3}{D\Phi(x)\left\{d^2\left[\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)}\right] - d\left[\frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)}\right]dld\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]\right\}}\ldots(y),$$

ce qui est l'intégrale demandée de l'équation ($a$), et dans laquelle il n'entre que les intégrales particulières de l'équation ($e$), que, par analogie avec la théorie développée dans les articles 423 et suivans, nous appellerons *auxiliaire différentielle;* ainsi toute la difficulté pour intégrer les équations de la forme ($a$), se réduit à celle de l'intégration de l'auxiliaire différentielle ($e$); mais malheureusement cette intégration offre la plupart du temps des difficultés presque insurmontables. Cependant nous remarquerons que si l'on peut parvenir à connaître deux seules intégrales particulières $c\Phi(x)$, $c'\Phi'(x)$ de l'auxiliaire différentielle ($e$), on aura l'intégrale de la proposée, en intégrant l'équation différentielle du premier ordre ($m$) dont les coefficiens $A''$ et $B''$ seront connus, puisqu'on connaîtra alors les deux intégrales $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$, ou plutôt $c\Phi(x)$, $c_1\Phi_1(x)$ [équat. ($u$)] qui entrent dans leurs valeurs [équations groupées en ($g$) et ($n$)].

On voit, en suivant attentivement les raisonnemens précédens sur l'intégration des équations linéaires du troisième ordre à coefficiens fonctions de la variable $x$, qu'on pourrait aisément les étendre aux équations de cette espèce d'un ordre quelconque.

Si l'équation proposée n'est que du second ordre, c'est-à-dire de la forme

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} = X\ldots(z),$$

Alors son auxiliaire différentielle étant seulement du second ordre et de la forme

$$A\varphi(x) + \frac{Bd\varphi(x)}{dx} + \frac{cd^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \ldots (a'),$$

n'aurait plus que les deux intégrales particulières $c\Phi(x)$ et $c'\Phi'(x)$ ; ainsi l'équation $(s)$ se réduisant dans ce cas-là à celle

$$y = \Phi(x) \int \Phi_1(x)\, dx \int \frac{Xdx}{c\Phi(x)\,\Phi_1(x)},$$

dans laquelle j'ai mis respectivement $c\Phi(x)$ et $c_1\Phi_1(x)$ à la place de $\varphi(x)$ et de $\varphi_1(x)$, et C à la place de D, on n'aura plus qu'à substituer la valeur de $\Phi_1(x)$ donnée par l'équation $(u)$, ce qui donnera

$$y = \Phi(x) \int d \left[ \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \int \frac{Xdx^2}{C[d\Phi'(x) - \Phi'(x) dl\Phi(x)]} \right] \ldots (b').$$

EXEMPLE I. *Intégrer l'équation*

$$6ydx^3 - 6xdx^2dy + 3x^2dxd^2y - x^3d^3y + xdx^3 = 0 \ldots (c').$$

Comparant identiquement cette équation avec celle $(a)$, il vient

$$A = 6,\ B = -6x,\ C = 3x^2,\ D = -x^3 \text{ et } X = -x.$$

Donc l'auxiliaire différentielle de la proposée est

$$6\varphi(x)dx^3 - 6xdx^2d\varphi(x) + 3x^2dxd^2\varphi(x) - x^3d^3\varphi(x) = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$\varphi(x) = cx + c'x^2 + c''x^3;$$

donc $\quad c\Phi(x) = cx$, ou $\Phi(x) = x$;

de même $\quad \Phi'(x) = x^2$ et $\Phi''(x) = x^3$.

Substituant ces valeurs dans l'équation $(y)$, on a,

toutes réductions faites,

$$y = x \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^3} = x \int \frac{dx^3}{x^3} \text{ [éq. (403), art 409]}$$

$$= \frac{x}{2}\left[x^2 \int \frac{dx}{x^3} - 2x \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x} + cx^2 + c'x + c''\right]$$

[voyez la form. (404), art. 410], et effectuant les intégrations, on aura l'équation

$$y = xl\sqrt{x} + cx^3 + c'x^2 + c''x \ldots\ldots (d'),$$

en comprenant dans la constante arbitraire $c''$ la quantité constante $\frac{3}{2} + c''$.

Supposons qu'on ne connaît que les deux intégrales particulières $\Phi(x) = x$ et $\Phi'(x) = x^2$ de l'auxiliaire différentielle, ce qui donne $\Phi_1(x) = \frac{c'}{cc_1}$ [équat. $(a)$]; on aura donc $A'' = \frac{B'c'}{c}$ et $B'' = \frac{C'c'}{c}$ [équat. $(n)$]; mais les équations $(g)$ donnent $B' = Ccx + 3Dc$ et $C' = Dcx$; donc $B' = 3cx^3 - 3cx^3 = 0$ et $C' = -cx^4$, ce qui donne $A'' = 0$ et $B'' = -c'x^4$. Mettant ces valeurs dans l'équation $(m)$, il vient $c'x^3 \frac{df_1(x)}{dx} = 1$, ou $df_1(x) = \frac{dx}{c'x^3}$, et intégrant on a $f_1(x) = -\frac{1}{2c'x^2} + c''$. Substituant cette valeur dans l'équation $(h)$, il vient $f(x) = -\frac{1}{2c}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{c'c''}{c}x$, et intégrant en ajoutant une constante $c'''$ à l'intégrale de $\frac{dx}{x^2}$, on a $fx = \frac{1}{2cx} + \frac{c'c''}{c}x + \frac{c'''}{2c}$; enfin substituant cette valeur de $fx$ dans l'équation $(b)$, ainsi que celle de $\varphi(x) = cx$, et ajoutant une constante $c^{\text{IV}}$ à l'intégrale

de $f(x)\,dx$, on a $y = \frac{x}{2}\int\frac{dx}{x} + c'c''x\int x dx + \frac{c'''}{2}x\int dx$ $+ c^{\text{IV}}x = xl\sqrt{x} + \frac{c'c''x^3}{2} + \frac{c'''x^2}{2} + c^{\text{IV}}x$; ou, représentant respectivement les quantités constantes arbitraires $\frac{c'c''}{2}$, $\frac{c'''}{2}$ et $c^{\text{IV}}$ par $c$, $c'$ et $c''$, on a

$$y = xl\sqrt{x} + cx^3 + c'x^2 + c''x,$$

résultat identique avec celui de $(d')$ trouvé précédemment.

EXEMPLE II. *Intégrer l'équation*

$$ydx^2 - xdydx + x^2(lx-1)ddy + \frac{xdx^2}{lx} = 0 \ldots\ldots (e').$$

Comparant identiquement cette équation avec celle $(z)$, on a $A = 1$, $B = -x$, $C = x^2(lx-1)$ et $X = -\frac{x}{lx}$; donc l'auxiliaire différentielle de la proposée est l'équation

$$\varphi(x)\,dx^2 - xd\varphi(x)\,dx + x^2(lx-1)\,dd\varphi(x) = 0,$$

qui a pour intégrale complète

$$\varphi(x) = clx + c'x;$$

donc $\Phi(x) = lx$ et $\Phi'(x) = x$. Substituant ces valeurs dans la formule $(b')$, on a

$$y = lx\int\frac{(lx-1)\,dx}{(lx)^2}\int\frac{-dx}{x(lx-1)^2}.$$

Or, $-\int\frac{dx}{x(lx-1)^2} = \frac{1}{lx-1} + c'$, donc

$$\int\frac{(lx-1)\,dx}{(lx)^2}\int\frac{-dx}{x(lx-1)^2} = \int\frac{dx}{(lx)^2} + c'\int\frac{(lx-1)dx}{(lx)^2} + c$$
$$= c + \frac{c'x}{lx} + \int\frac{dx}{(lx)^2},$$

et par conséquent on a pour intégrale complète de la proposée

$$y = clx + c'x + lx \int \frac{dx}{(lx)^2} \ldots\ldots (f').$$

Si l'on veut effectuer l'intégration indiquée dans le dernier terme, il faudra mettre $\frac{dx}{(lx)^2}$ sous la forme de $\frac{xdlx}{(lx)^2}$, et faisant $lx = z$, d'où $x = e^z$, on aura à intégrer $\frac{e^z dz}{z^2}$. Or, la formule (214) [art. 266] donne

$$\int \frac{e^z dz}{z^2} = e^z \left[ \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{2.3}{z^4} + \frac{2.3.4}{z^5} + \text{etc.} \right];$$

donc remettant à la place de $z$ sa valeur $lx$, on aura

$$lx \int \frac{dx}{(lx)^2} = \frac{e^{lx}}{lx} \left[ 1 + \frac{2}{lx} + \frac{2.3}{(lx)^2} + \frac{2.3.4}{(lx)^3} + \text{etc.} \right].$$

il n'y a donc plus qu'à substituer cette valeur dans l'équation $(f')$.

439. L'équation $(c')$ du premier exemple de l'article précédent, et généralement toutes celles d'un ordre quelconque $n$ de la forme de l'équation

$$ayd x^n + bxdx^{n-1}dy + gx^2dx^{n-2}d^2y + hx^3dx^{n-3}d^3y \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x^n d^n y = Xdx^n \ldots (448),$$

dans laquelle $a$, $b$, $g$, $h$..... représentent des quantités constantes déterminées, peut toujours s'intégrer par les méthodes enseignées aux articles 423...430; c'est à-dire qu'on pourra toujours transformer l'équation (448) en une autre dans laquelle il n'y aura de coefficient fonction de $x$ que celui X de $dx^n$, dans le second membre.

Le premier moyen qui semble d'abord devoir opérer

d'une manière très-simple cette transformation, est de faire

$$x = e^z \ldots\ldots (a);$$

car prenant $dx$ constante, d'où $dx^{n-p} = e^{(n-p)z} dz^{n-p}$, tous les termes de la transformée seront multipliés par $e^{nz}$, et divisant par ce facteur commun, il ne restera plus dans le premier membre aucun facteur fonction de la variable primitive $z$. Mais observons que d'après l'équation de relation $(a)$ pour la transformation, on ne peut faire $dx$ constante qu'en prenant $z = \infty$. En effet, différentiant deux fois de suite l'équation $(a)$, en considérant $dx$ comme constante, on a $e^z(ddz + dz^2) = 0$; or $e$ qui est la base du système des logarithmes naturels étant élevée à la puissance $z$, quelle que soit la valeur de cet exposant, ne peut être $= 0$; on ne peut donc satisfaire à l'équation précédente qu'en faisant $ddz + dz^2 = 0$, d'où $\frac{d.dz}{dz}$ ou $dldz = -dz$, équation qui étant intégrée, donne $ldz = -z + c$; mais $ldz = -\frac{1}{0}$; donc $\frac{1}{0} + c = z$ ou $\frac{1}{0} = z$. Ainsi ce moyen de transformation que je n'ai exposé ici qu'afin d'empêcher les commençans de s'en servir, est des plus mauvais; il faut donc en chercher un autre, et voici celui qui nous paraît réunir à l'exactitude le plus de simplicité. Divisant l'équation (448) par $dx^n$, on la complettera sous le rapport différentiel, en considérant toutes les différentielles de $dx$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ comme variables, par le moyen enseigné à l'article 52; ensuite faisant $x = e^z$, et prenant $dz$ constante, ce qui donne $d^p x = e^z dz^p$, on substituera dans l'équation différentielle complète obtenue, les valeurs respectives $e^z dz$, $e^z dz^2$, $e^z dz^3 \ldots$ de $dx$, $d^2x$, $d^3x \ldots\ldots$, ce qui donnera une équation linéaire de l'ordre $n$ entre les deux variables $y$ et $z$, et dans laquelle tous les coefficiens des

termes où se trouve $y$, et les différentielles de cette variable seront constans. Ainsi l'intégration de la transformée de la proposée rentrera dans les cas que nous avons examinés aux art. 423....430.

Pour rendre ceci plus sensible, proposons-nous d'intégrer par cette méthode l'équation ($c'$) de l'article précédent, qui est de la forme de l'équation (448).

Cette équation ($c'$) [art. 438] étant divisée par $dx^3$, donne celle

$$6y - 6x\frac{dy}{dx} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3d^3y}{dx^3} + x = 0 \ldots\ldots (b).$$

Substituant dans cette équation les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et de $\frac{d^3y}{dx^3}$, ou de ($\varphi_1$) et ($\varphi_2$) prises dans la table (51) [art. 49], il vient l'équation différentielle complète du troisième ordre

$$6y - 6x\frac{dy}{dx} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3x^2dyd^2x}{dx^3} - \frac{x^3d^3y}{dx^3}$$
$$+\frac{x^3dyd^3x}{dx^4} + \frac{3x^2d^2yd^2x}{dx^4} - \frac{3x^3dy(d^2x)^2}{dx^5} + x = 0 \ldots (c).$$

Mais faisant $\qquad x = e^z \ldots\ldots (d)$,

et regardant $dz$ comme constante (*), on a $dx = e^z dz$,

---

(*) Il est à propos d'observer que l'équation $x = e^z$ n'est pas incompatible avec $dz =$ const., comme l'était la même équation avec $dx =$ const.; car en différentiant deux fois de suite cette équation, en considérant $dx$ comme variable et $dz$ comme constante, on a $ddx = e^z dz^2$, d'où $dx = dz\int e^z dz = e^z dz + cdz$ et $x = e^z + cz + c'$; mais $x = e^z$, donc $cz + c' = 0$, équation qui ne peut exister tant que $z$ représente une variable, qu'en tant que $c = 0$, et par conséquent $c' = 0$; ainsi l'hypothèse de $dx$ variable et de $dz$ constante nous ramène à l'équation de relation $x = e^z$ ou $z = lx$, pour la transformation, au lieu que l'hypothèse de $dx$ constante et de $dz$ variable, bien loin de ramener à l'équation $z = lx$ mène à $z = \infty$.

$d^2x = e^z dz^2$ et $d^3x = e^z dz^3$; donc par la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente, on a, toutes réductions faites,

$$e^z = \frac{d^3y}{dz^3} - 6\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{11dy}{dz} - 6y \ldots\ldots (e).$$

Or, l'auxiliaire de cette équation est

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0 \text{ [équat. (425)]},$$

qui a pour racines $m = 1$, $m' = 2$ et $m'' = 3$. Donc l'équation (429) donnera pour intégrale de la transformée, l'équation

$$y = e^z\frac{[c + \int dz]}{2} - e^{2z}[c' + \int e^{-z}dz] + \frac{e^{3z}[c'' + \int e^{-2z}dz]}{2},$$

ou, effectuant les intégrations, il viendra l'équation

$$y = \frac{ze^z}{2} + ce^z + c'e^{2z} + c''e^{3z} \ldots\ldots (f),$$

dans laquelle nous avons représenté par $c$ la quantité constante indéterminée $\frac{2c+3}{4}$ : mais $e^z = x$, d'où $z = lx$ ; donc substituant ces valeurs dans l'équation $(f)$, il viendra

$$y = \frac{xlx}{2} + cx + c'x^2 + c''x^3,$$

qui est l'intégrale complète demandée, et est identique avec celle $(d')$ trouvée à l'article 438.

440. L'integration de l'équation (448) nous conduit d'une manière bien simple à celle de toute équation de la forme

$$aydx^n + b(p+qx)dx^{n-1}dy + g(p+qx)^2dx^{n-2}d^2y$$
$$\ldots\ldots + (p+qx)^n d^n y = Xdx^n \ldots\ldots (449),$$

dans laquelle $p$, $q$, $a$, $b$, $g$..... sont des quantités constantes, et X une fonction de $x$. En effet, faisant $p+qx=qz$, d'où

$$(a)\ldots\ldots x=z-\frac{p}{q} \quad \text{et} \quad dx=dz;$$

ensuite substituant ces valeurs dans l'équation (449), et représentant par Z ce que devient X lorsqu'on y a substitué la valeur de $x$ [équat. ($a$)], on aura la transformée

$$aydz^n+bqzdz^{n-1}dy+gq^2z^2dz^{n-2}d^2y\ldots+q^nz^nd^ny=Zdz^n;$$

qui est de la forme de l'équation (448), et que par conséquent nous savons intégrer (art. 439).

441. Etant donnée entre les trois variables $x$, $y$, $z$ l'équation linéaire par rapport à $y$ et $z$, et telle que celle

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}\ldots+Q\frac{d^ny}{dx^n}+A_1z+B_1\frac{dz}{dx}$$
$$+C_1\frac{d^2z}{dx^2}+D_1\frac{d^3z}{dx^3}\ldots\ldots+\frac{d^nz}{dx^n}=X\ldots\ldots\ldots(450),$$

dans laquelle les coefficiens A, B....$A_1$, $B_1$.... sont constans ou fonctions de $x$, et X est une fonction de $x$, il est clair qu'on pourra y satisfaire d'un nombre infini de manières, en faisant le polynome du premier membre qui ne contient que $z$ et $x$, ou celui qui ne contient que $y$ et $x$, égal à une fonction indéterminée de $x$ que je représente par $\xi$, ce qui donne l'autre polynome $=X-\xi$; on a donc deux équations différentielles linéaires de l'ordre $n$, l'une par rapport à $y$ et $x$, l'autre par rapport à $z$ et $x$ qui étant intégrées séparément suivant les méthodes enseignées précédemment, donneront des équations primitives telles que $y=F(x,\xi)$ et $z=F'(x,\xi)$ qui, évidemment, devront satisfaire en même temps à la proposée.

Les problèmes qui donnent lieu à de pareilles équations différentielles (450), sont indéterminés, à cause de l'indéterminée $\xi$ qui entre dans les valeurs de $y$ et de $z$, et qui permet de trouver un nombre infini de valeurs différentes de $y$ et de $z$ qui satisfont en même temps à la proposée (450).

442. Remarque I. Puisque les équations $y = F(x, \xi)$ et $z = F'(x, \xi)$ satisfont à l'équation (450), quelle que soit la fonction de $x$ représentée par $\xi$, et que pour une seule de ces fonctions prise à volonté, les deux équations précédentes sont les projections, l'une sur le plan des $xy$, l'autre sur le plan de $xz$ d'une courbe à double courbure, nous en conclurons qu'il y a un nombre infini de courbes à double courbure qui satisfont à l'équation (450) ; car outre la fonction indéterminée $\xi$ de $x$ qui entre dans les valeurs de $y$ et de $z$, c'est qu'encore il entre dans chacune de ces valeurs un nombre $n$ de constantes indéterminées.

443. Remarque II. Si l'état de la question qui a donné lieu à une équation différentielle de l'ordre $n$, telle que celle (450), indiquait que cette équation appartient à une surface courbe, alors faisant successivement $z$ et $y = 0$, on aurait les deux équations linéaires de l'ordre $n$,

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots + Q\frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

$$A_1z + B_1\frac{dz}{dx} + C_1\frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots + \frac{d^nz}{dx^n} = X,$$

qui étant intégrées, donneraient respectivement les traces de la surface en question sur le plan des $xy$ et sur le plan des $xz$.

444. Pour rendre plus sensible ce que nous avons

dit dans les trois articles précédens, par des exemples, proposons-nous d'abord de trouver les valeurs de $y$ et de $z$ en fonction de $x$ qui satisfont en même temps à l'équation

$$15ydx^2 - 20dydx + 5d^2y - 63zdx^2 + 2dzdx + d^2z = e^{2x}dx^2 \ldots\ldots (a)$$

ou, parlant géométriquement, cherchons les traces sur les plans des $xy$ et des $xz$ des surfaces cylindriques qui, par leurs intersections dans l'espace, engendrent des lignes à double courbure dont tous les points satisfont à l'équation $(a)$.

Faisons pour cela $\xi = e^{\mathcal{C}x}$, $\mathcal{C}$ représentant une constante indéterminée, et par conséquent commençons à poser l'équation

$$-63zdx^2 + 2dzdx + d^2z = e^{\mathcal{C}x}dx^2 \ldots\ldots 2(b),$$

ce qui réduit la proposée à l'équation

$$3ydx^2 - 4dydx + d^2y = \frac{e^{2x} - e^{\mathcal{C}x}}{5}dx^2 \ldots\ldots (c).$$

Or, l'intégrale de l'équation $(b)$ est

$$z = ce^{7x} + c'e^{-9x} + \frac{e^{\mathcal{C}x}}{(\mathcal{C}-7)(\mathcal{C}+9)} \ldots\ldots (d) \text{[art. 424]},$$

et celle de l'équation $(c)$ est

$$y = c_1e^{3x} - c_1'e^{-x} - \frac{e^{\mathcal{C}x}}{5(\mathcal{C}-1)(\mathcal{C}-3)} - \frac{e^{2x}}{5} \ldots\ldots (e).$$

Telles sont les équations des projections des lignes à double courbure dont tous les points satisfont à l'équation $(a)$, et ces projections peuvent varier à l'infini de figure, à cause de la quantité indéterminée $\mathcal{C}$.

Mais si l'équation ($a$) étant considérée comme appartenant à une surface courbe, on voulait déterminer ses traces sur les plans des $xy$ et des $xz$; alors il faudrait faire successivement dans la proposée ($a$), $z = 0$ et $y = 0$, ce qui donnerait les deux équations

$$3ydx^2 - 4dydx + d^2y = \frac{e^{2x}dx^2}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

et $$63zdx^2 - 2dzdx - d^2z + e^{2x}dx^2 = 0 \ldots\ldots (g).$$

Or, l'intégrale de l'équation ($f$) est

$$y = c_1e^{3x} + c'_1e_x - \tfrac{1}{5}e^{2x} \ldots\ldots (h),$$

et celle de l'équation ($g$) est

$$z = ce^{7x} - c'e^{-9x} - \frac{e^{2x}}{55} \ldots\ldots (i).$$

Ainsi ces deux équations sont respectivement celles des traces sur les plans des $xy$ et des $xz$ de la surface courbe ayant pour équation différentielle du second ordre, la proposée ($a$).

Si l'on fait $6 = 2$, alors l'équation ($e$) se réduit à celle

$$y = c_1e^{3x} - c'_1e^{-x} \ldots\ldots (k),$$

et celle ($d$) se réduit à l'équation ($i$); donc cette dernière équation est celle de la projection de la surface cylindrique qui contacte la surface courbe de l'équation différentielle ($a$) dans tous les points de sa trace sur le plan des $xz$.

445. Si l'on proposait de trouver les valeurs d'un plus grand nombre de variables $s$, $u$, $y$, $z$..... en fonctions de $x$ qui doivent satisfaire en même temps à une équation différentielle de l'ordre $n$ et linéaire par rapport à ces variables $s$, $u$, $y$, $z$.....

il faudrait faire chacun des polynomes, moins un, qui ne renferme qu'une seule de ces variables et $x$, égal à une fonction indéterminée de $x$; et alors on aurait autant d'équations différentielles de l'ordre $n$ et linéaire par rapport à une seule variable $s$, $u$, $y$, $z$...., qu'il y a de ces variables, et les intégrant toutes particulièrement, on aurait les valeurs demandées de ces variables. Le problème qui aurait donné lieu à de tels calculs, et qu'on ne peut plus considérer géométriquement lorsque, outre la variable $x$ à différentielles constantes il y a plus de deux variables, renfermerait autant de fonctions indéterminées de $x$ qu'il y aurait de variables, compris celle $x$, moins deux, dans l'équation proposée.

446. Mais si entre un nombre $m$ de variables, on a $m-1$ équations différentielles linéaires de l'ordre $n$, alors il n'entrera plus de fonctions indéterminées de la variable à différentielle première constante, dans les valeurs des $m-1$ autres variables qui satisfont en même temps aux $m-1$ équations proposées; car l'on parviendra par l'élimination à une équation linéaire de l'ordre $n+m-1$, dans laquelle il n'y aura plus que la variable à différentielle première constante et l'une des $m-1$ autres variables. Par exemple, soit proposé de déduire des deux équations

$$\left.\begin{aligned} Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+A_1z+B_1\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}&=X \\ Dy+E\frac{dy}{dx}+F\frac{d^2y}{dx^2}+D_1z+E_1\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}&=X_1 \end{aligned}\right\}\ldots(451),$$

dans lesquelles les coefficiens A, B...$B_1$, X, D...$E_1$, $X_1$ representent des fonctions déterminées de $x$, les valeurs de $y$ et de $z$ en fonctions de $x$ qui satisfont en même temps à ces deux équations.

Prenant dans la première des deux équations (451) la valeur de $\frac{d^2z}{dx^2}$, et la substituant dans la seconde équation (451), on aura une équation de la forme

$$A_2y+B_2\frac{dy}{dx}+C_2\frac{d^2y}{dx^2}+D_2z+E_2\frac{dz}{dx}=X_2\ldots\ldots(a);$$

différentiant cette dernière équation, et divisant par $dx$, il viendra une équation de la forme

$$B_3\frac{dy}{dx}+C_3\frac{d^2y}{dx^2}+H\frac{d^3y}{dx^3}+E_3\frac{dz}{dx}+F\frac{d^2z}{dx^2}=X_3\ldots(b).$$

Substituant encore dans cette équation ($b$) la valeur de $\frac{d^2z}{dx^2}$ tirée de la première des deux équations (451), on aura une équation de la forme

$$A_3y+B_4\frac{dy}{dx}+C_4\frac{d^2y}{dx^2}+H\frac{d^3y}{dx^3}+D_3z+E_4\frac{dz}{dx}=X_4\ldots(c).$$

Différentiant cette dernière équation et divisant par $dx$, on a une équation de la forme

$$B_5\frac{dy}{dx}+C_5\frac{d^2y}{dx^2}+H_1\frac{d^3y}{dx^3}+K\frac{d^4y}{dx^4}+E_5\frac{dz}{dx}$$
$$+F_1\frac{d^2z}{dx^2}=X_5\ldots\ldots(d).$$

Substituant enfin dans cette dernière équation la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, toujours tirée de la première des deux équations (451), on aura celle

$$A_4y+B_6\frac{dy}{dx}+C_6\frac{d^2y}{dx^2}+H_1\frac{d^3y}{dx^3}+K\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+D_4z+E_6\frac{dz}{dx}=X_6\ldots\ldots(e).$$

Par le moyen des trois équations $(a)$, $(c)$ et $(e)$, éliminant $z$ et $\frac{dz}{dx}$, on aura une équation différentielle linéaire du quatrième ordre par rapport à la seule variable à différentielles variables $y$, et intégrant cette équation, si du moins on peut parvenir à intégrer son auxiliaire différentielle (art. 438), on aura l'équation primitive

$$y = f(x, c, c', c'', c''') \ldots\ldots (f),$$

et substituant cette valeur de $y$, ainsi que celles de $dy$ et de $ddy$ que l'on en déduit dans l'une des deux équations (451), on aura une équation linéaire du second ordre par rapport à la seule variable à différentielles variables $z$, d'où l'on tirera par l'intégration l'équation primitive

$$z = f'(x, c, c', c'', c''', c_{\text{I}}, c'_{\text{I}}) \ldots\ldots (g),$$

et ces deux équations satisferont en même temps aux deux équations (451).

Il est évident que chacune des deux équations (451) étant considérée comme appartenant à une surface courbe, les équations $(f)$ et $(g)$ seront respectivement les projections sur le plan des $xy$ et des $xz$ de la ligne à double courbure formée dans l'espace par l'intersection des deux surfaces courbes.

447. Le calcul indiqué dans l'article précédent se simplifie beaucoup lorsque les coefficiens $A, \ldots. B_{\text{I}}$, $D, \ldots. E_{\text{I}}$ des deux équations (451) sont constans; car alors l'équation finale à laquelle on parvient étant de l'espèce de celles que l'on sait intégrer par les méthodes enseignées aux articles 423....430, on pourra toujours obtenir les valeurs demandées de $y$

et de $z$ en fonctions déterminées de $x$, qui satisfont en même temps aux deux équations proposées.

448. Enfin lorsque les coefficiens $A, \ldots B_1, D, \ldots E_1$ étant constans, on aura, outre cela, $X = 0$ et $X_1 = 0$, on parviendra à trouver les valeurs demandées de $y$ et de $z$ par un moyen encore plus simple que nous allons faire connaître.

Soit fait

$$(a) \ldots\ldots y = ce^{mx} \quad \text{et} \quad z = cqe^{mx} \ldots\ldots (b),$$

$c$ étant une constante indéterminée arbitraire, $m$ et $q$ deux constantes indéterminées, mais non arbitraires, et que nous allons déterminer.

Substituant ces valeurs de $y$ et de $z$ dans les équations (451) et divisant par $ce^{mx}$, on aura, pour déterminer $m$ et $q$, les deux équations

$$A + Bm + Cm^2 + (A_1 + B_1 m + m^2)\, q = 0 \ldots\ldots (c),$$
$$D + Em + Fm^2 + (D_1 + E_1 m + m^2)\, q = 0 \ldots\ldots (d).$$

Eliminant $q$ entre ces deux équations, il vient l'équation du quatrième degré

$$(A + Bm + Cm^2)(D_1 + E_1 m + m^2)$$
$$= (A_1 + B_1 m + m^2)(D + Em + Fm^2) \ldots\ldots (e),$$

qui étant résolue, donne quatre racines que je représente par $m$, $m'$, $m''$ et $m'''$. Substituant successivement ces quatre racines dans l'une des deux équations $(c)$ et $(d)$, on aura quatre valeurs de $q$ que je représente par $q$, $q'$, $q''$ et $q'''$. Donc les valeurs de $y$ et de $z$ qui satisferont en même temps aux deux équations proposées, seront

$$\left\{\begin{matrix} y = ce^{mx}, & y = c'e^{m'x}, & y = c''e^{m''x}, & y = c'''e^{m'''x} \\ z = cqe^{mx}, & z = c'q'e^{m'x}, & z = c''q''e^{m''x}, & z = c'''q'''e^{m'''x} \end{matrix}\right\} (f),$$

dans

dans lesquelles $m$, $m'$, $m''$, $m'''$; $q$, $q'$, $q''$, $q'''$, sont actuellement des constantes déterminées. Or, nous observerons que si ces quatre systèmes différens de valeurs de $y$ et de $z$, pris séparément, satisfont en même temps aux deux équations proposées, les quatre pris ensemble y satisferont de même ; car par la nature des différentielles de tous les ordres des quantités exponentielles, lorsque la différentielle première de l'exposant variable $x$ est constante, la différentielle d'un ordre quelconque de la quantité exponentielle étant toujours affectée de cette dernière quantité dans son état primitif, il s'ensuit que par la substitution des quatre systèmes des valeurs de $y$ et de $z$ pris ensemble, on aura quatre polynomes respectivement multipliés par $e^{mx}$, $e^{m'x}$, $e^{m''x}$, $e^{m'''x}$ qui seront chacun ce qu'on auroit en employant séparément chaque système de valeurs de $y$ et de $z$, et qui par conséquent s'évanouiront tous en même temps; ainsi en employant les quatre systèmes ensemble, c'est-à-dire, faisant

$$y = ce^{mx} + c'e^{m'x} + c''e^{m''x} + c'''e^{m'''x} \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$
$$z = cqe^{mx} + c'q'e^{m'x} + c''q''e^{m''x} + c'''q'''e^{m'''x} \ldots\ldots (h),$$

ces valeurs de $y$ et de $z$ satisferont en même temps aux deux équations proposées, et je dis de plus, que ce sont ces dernières valeurs de $y$ et de $z$ dont on doit se servir, et non pas celles monomes groupées en $(f)$ ; car tant que les coefficiens de la première des deux équations proposées diffèrent de ceux qui leur correspondent dans la seconde, il est évident que par la méthode d'élimination enseignée à l'article (446), et que l'on pourroit également employer dans le cas de simplification que nous examinons actuellement, on parviendrait à une équation différentielle du quatrième ordre entre $x$ et $y$ linéaire par rapport à cette dernière

variable et de la forme de l'équation (440) [Art. 431); donc son intégrale (441) aurait quatre constantes $c$, $c'$, $c''$ et $c'''$ indéterminées et arbitraires, et seroit conséquemment identique à l'équation ($g$).

Etant démontré que la valeur de $y$ doit être celle donnée par l'équation ($g$), celle de $z$ doit évidemment être celle donnée par l'équation ($h$). D'ailleurs les quatre valeurs de $y$ et les quatre de $z$ groupées en ($f$) sont les intégrales particulières dont les réunions respectives doivent donner les intégrales totales ($g$) et ($h$) [Art. 437].

EXEMPLE. *Trouver les valeurs de* y *et de* z *en fonctions de* x *qui satisfont en même temps aux deux équations.*

$$y+\frac{dy}{dx}+\frac{2d^2y}{dx^2}+z+\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$-9y+96\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}+15z+50\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}=0\ldots(k).$$

Comparant identiquement les équations ($i$) et ($k$) avec les respectives première et seconde équations (451), on a $A=1$, $B=1$, $C=2$, $A_1=1$, $B_1=1$, $X=0$, $D=-9$, $E=96$, $F=1$, $D_1=15$, $E_1=50$, $X_1=0$, et substituant ces valeurs dans les deux équations ($c$) et ($e$) il vient

$$q=-\frac{1+m+2m^2}{1+m+m^2},$$

et, toutes réductions faites, l'équation

$$m^4+4m^3-7m^2-22m+24=0,$$

dont les quatre racines sont $m=1$, $m'=2$, $m''=-3$, et $m'''=-4$. Substituant successivement ces valeurs dans celle de $q$, on a $q=-\frac{4}{3}$, $q=-\frac{11}{17}$, $q=-\frac{16}{7}$

et $q = -\frac{29}{13}$. Enfin mettant ces valeurs de $m$ et de $q$ dans les équations ($g$) et ($h$), il viendra

$$y = ce^x + c'e^{2x} + c''e^{-3x} + c'''e^{-4x}$$

$$z = -\frac{4}{3}ce^x - \frac{11}{7}c'e^{2x} - \frac{16}{7}c''e^{-3x} - \frac{27}{13}c'''e^{-4x},$$

qui sont les deux équations demandées.

449. Il est évident d'après le calcul indiqué à l'article 446, pour éliminer $z$ et ses différentielles entre les deux équations (451), que si les troisiemes termes de ces équations étaient identiques, c'est-à-dire, si l'on avait l'équation de condition

$$C = F \ldots\ldots (a),$$

l'équation linéaire finale ne serait que du troisième ordre, puisqu'alors l'équation ($a$) de l'article 446 étant privée du terme $C_2 \frac{ddy}{dx^2}$, le terme $H \frac{d^3y}{dx^3}$ manquerait dans les équations ($b$) et ($c$) du même article, et que conséquemment le terme $K \frac{d^4y}{dx^4}$ manquerait dans les équations ($d$) et ($e$) de l'article 446. Il peut même arriver que l'équation finale ne soit que du second ordre, ce qui aura lieu si, outre l'équation de condition ($a$), on a encore celle

$$B - E = C(B_1 - E_1) \ldots\ldots (b).$$

Ainsi, dans le cas où les coefficiens $A \ldots B_1$, $D \ldots E_1$, sont constans et $X = X_1 = 0$, les valeurs de $y$ et de $z$ données par les équations ($g$) et ($h$) de l'article précédent, se réduiront à trois termes, lorsque la seule équation de condition ($a$) aura lieu, et elles se réduiront à deux termes, si les équations de condition ($a$) et ($b$) ont lieu en même temps.

450. Remarque. Ce que nous avons dit dans les articles précédens, relativement à l'intégration de deux équations linéaires du second ordre entre trois variables, pouvant aisément se généraliser pour un nombre quelconque $m - 1$ d'équations linéaires d'un ordre quelconque entre $m$ variables, nous ne nous arrêterons pas davantage sur cet objet, pour passer à d'autres objets d'un plus grand intérêt.

---

# CHAPITRE V.

*Quelques observations essentielles sur les équations différentielles de tous les ordres et méthodes que nous déduirons de ces observations, pour obtenir plus facilement l'intégrale finale de certaines équations différentielles.*

451. Une équation primitive entre deux variables étant écrite sous différentes formes, et différentiée sous ces différentes formes, donnera autant d'équations différentielles qui seront distinctes, non-seulement dans l'arrangement de leurs parties, mais encore dans le fait; car on ne pourra jamais, quels que soient les changemens qu'on fera éprouver à leurs formes respectives, les ramener à être identiques; enfin ces équations différentielles seront les traductions analytiques d'énoncés de problèmes absolument différens entre eux, mais qui cependant auront la même solution, c'est-à-dire,

que l'intégration de ces équations différentielles donnant une même intégrale primitive, celle-ci sera la solution de chacun des problèmes dont l'énoncé est la traduction en discours des équations différentielles en question, ce qui est précisément l'inverse de ce qu'on rencontre souvent, même dans l'analyse algébrique, où un seul problème qui a conduit à une équation à une seule inconnue d'un degré supérieur, a autant de solutions réelles et prises dans le sens de l'énoncé de la question, qu'il y a de racines réelles et positives dans cette équation.

Pour donner un exemple de ces problèmes différens qui ont une même solution, proposons-nous de trouver, 1°. la courbe dont la sous-normale est égale à une quantité constante $\frac{1}{2}p$.

2°. La courbe qui a chacune de ses ordonnées moyenne proportionnelle entre l'interceptée correspondante et une quantité constante donnée $p$.

3°. La courbe qui a chacune de ses sous-tangentes double de l'abscisse correspondante.

Ces trois problèmes essentiellement différens, mis en équations, donnent respectivement

$$\frac{ydy}{dx}=\frac{p}{2}\ldots\ldots\ (a)\ [\text{équat. (94), art. 116}]$$

$$\frac{y^2}{p}=\frac{ydx-xdy}{dy}\ (b)\ [\text{équat. (97), art. 122}]$$

$$\frac{ydx}{dy}=2x\ldots\ldots\ (e)\ [\text{équat. (90), art. 101}].$$

Ecrivant ces trois équations sous les formes

$$2ydy=pdx\ldots\ldots\ (d),\ dy=p\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)\ldots\ (e)$$

$$2xdy-ydx=0\ldots\ (f),$$

et prenant l'origine des coordonnées $z$ et $x$ à un même point, ce qui donne $y = 0$ lorsque $x = 0$, on a complètement par l'intégration ;

1°. Pour l'équation $(d)$, $y^2 = px$ ;

2°. Pour l'équation $(e)$, $y = p\int\frac{ydx - xdy}{y^2} = p\int d\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \frac{px}{y}$, d'où $y^2 = px$ ;

3°. Pour l'équation $(f)$, $2\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$, d'où $2ly = lx + lc$, et passant des logarithmes aux quantités algébriques, on a $y^2 = cx$, ou prenant la constante arbitraire $c$, qui, évidemment, ne peut être nulle dans ce cas ci, $= p$ on a $y^2 = px$.

Ainsi les trois problèmes proposés donnent tous pour solution la parabole vulgaire qui, conséquemment, satisfait à toutes les conditions exigées par les énoncés des trois problèmes. Or, remarquons que si l'on écrit l'équation de cette courbe sous les trois formes différentes,

$$y^2 = px \ldots (g),\ y = \frac{px}{y} \ldots (h) \text{ et } \frac{y^2}{x} = p \ldots (i),$$

on aura, en différentiant successivement ces trois équations, pour $d(g)$ l'équation $(d)$ ou $(a)$ ; pour $d(h)$ l'équation $(e)$ ou $(b)$, enfin pour $d(i)$ l'équation $(f)$ ou $(c)$ ; donc l'équation de la parabole écrite sous trois formes différentes, et différentiée successivement sous ces trois formes, donne trois équations différentielles $(a)$, $(b)$, $(c)$ essentiellement différentes entre elles, et qui sont les traductions analytiques des énoncés de trois problèmes absolument différens entre eux.

452. Toute équation différentielle entre deux variables et d'un ordre quelconque $n$, dans laquelle la différen-

tielle première de l'une des variables est constante, a pour le moins autant de premières intégrales qu'il y a d'unités dans $n$, c'est-à-dire, qu'étant multipliée par un facteur convenable (art. 360), elle est la différentielle première et exacte d'autant d'équations différentielles de l'ordre $n-1$, qu'il y a d'unités dans $n$. En effet, si par des intégrations successives, on veut parvenir à l'intégrale finale, qui est une équation primitive, on aura d'abord, par une première intégration, une équation différentielle de l'ordre $n-1$, qui sera affectée du terme $cdx^{n-1}$, $c$ étant une constante arbitraire; on aura de plus un nombre $n-1$ d'autres intégrales d'ordres inférieurs, et diminuant suivant la progression $\div n-2 \,.\, n-3 \ldots . 2.1.0$, qui formeront la cascade depuis la seconde intégrale, qui est une équation différentielle de l'ordre $n-2$, jusqu'à l'intégrale finale. Or, ces $n-1$ équations ont toutes un terme affecté de la constante arbitraire $c$; donc prenant dans chacune d'elles la valeur de $c$, et substituant successivement ces $n-1$ valeurs dans la première intégrale déjà trouvée, on aura, compris cette première intégrale, un nombre $n$ d'équations différentielles de l'ordre $n-1$, qu'on pourra aisément soumettre par les règles ordinaires de l'élimination, à n'avoir que la seule constante arbitraire $c$, et qui, conséquemment, satisferont toutes à la proposée. Par exemple, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(1-x)\,d^3y - 3d^2ydx = 0 \ldots . (a),$$

a pour première intégrale, l'équation

$$(1-x)\,d^2y - 2dydx + cdx^2 = 0 \ldots . (b);$$

pour seconde intégrale, l'équation

$$dy - xdy - ydx + cxdx + c'dx = 0 \ldots . (c),$$

enfin pour l'intégrale finale, l'équation

$$y - xy + cx^2 + c'x + c'' = 0 \ldots\ldots (d)$$

Prenant dans chacune des équations $(c)$ et $(d)$ la valeur de $c$, et substituant successivement ces deux valeurs dans l'intégrale première $(b)$, il vient les deux équations

$$x(1-x)\,ddy - (x+1)\,dydx + (y-c')dx^2 = 0 \ldots (e),$$

et

$$x^2(1-x)\,d^2y - 2x^2dydx - 2ydx^2 + 2xydx^2 - 2c'xdx^2 - 2c''dx^2 = 0 \ldots\ldots (f);$$

éliminant entre ces deux dernières équations la constante arbitraire $c'$, il vient celle

$$x^2(x-1)ddy + 2xdydx - 2(y+c'')dx^2 = 0 \ldots\ldots (g).$$

Or, il est aisé de voir que les trois équations différentielles $(b)$, $(e)$, $(g)$ qui ne renferment chacune qu'une constante arbitraire, étant différentiées, reproduisent l'équation différentielle du troisième ordre $(a)$; donc cette dernière équation a au moins trois premières intégrales. Nous verrons tout-à-l'heure qu'elle en a davantage.

453. De même qu'on vient de trouver qu'une équation différentielle de l'ordre $n$, a au moins un nombre $n$ de premières intégrales, on prouvera aussi que chacune de ces intégrales a au moins $n-1$ premières intégrales, et que par conséquent l'équation différentielle de l'ordre $n$ a au moins $n(n-1)$ secondes intégrales, et par un raisonnement semblable, que l'équation en question a au moins $n(n-1)(n-2)$ troisièmes intégrales; et continuant ainsi de suite, on finira par prouver que l'équation différentielle de l'ordre $n$ a au moins

un nombre $1.2.3\ldots n$ de $(n-1)^{mes}$ intégrales, lesquelles sont des équations différentielles du premier ordre.

Mais toutes ces équations différentielles du premier ordre ne peuvent avoir que la même intégrale, donc l'équation différentielle proposée de l'ordre $n$, et toutes ces intégrales différentielles de différens ordres, depuis celui $n-1$ jusqu'au premier ordre, n'ont qu'une intégrale finale, laquelle résout toutes les questions dont les équations différentielles mentionnées ci-dessus, peuvent être considérées, conformément à ce qui a été démontré à l'article 451, comme étant les traductions en langage analytique des énoncés de ces questions.

454. Nous remarquerons ici, que c'est à tort que plusieurs auteurs ont insinué dans leurs ouvrages, que les équations différentielles de l'ordre $n$ n'ont que $n$ premières intégrales; car, indépendamment de ces $n$ premières intégrales qu'on peut toujours obtenir par l'élimination des constantes, comme nous l'avons fait précédemment, on peut encore très-souvent intégrer l'équation différentielle de l'ordre $n$ proposée de plusieurs manières différentes, ce qui donne autant de premières intégrales, ou équations différentielles de l'ordre $n-1$, qui diffèrent essentiellement entre elles, et de celles trouvées par le calcul indiqué dans l'article 452. Par exemple, prenant encore la même équation différentielle du troisième ordre

$$(1-x)d^3y-3d^2ydx=0\ldots\ldots(a),$$

qu'à l'article 452, soit fait $d^2y=zdx^2$, d'où $d^3y=dzdx^2$, ce qui transforme l'équation $(a)$ en celle du premier ordre,

$$(1-x)dz-3zdx=0,\ \text{ou}\ \frac{dz}{z}=\frac{3dx}{1-x},$$

dont l'intégrale est $z\ (1-x)^3=c'''$, et substituant

à la place de $z$ sa valeur $\frac{d^2y}{dx^2}$; il vient l'équation différentielle du second ordre

$$(1-x)^3 d^2y = c^{\text{IV}} dx^2 \ldots\ldots (b),$$

qui est encore une première intégrale de la proposée $(a)$, et est essentiellement différente de celles $(b)$, $(e)$, $(g)$ de l'article 452.

Si actuellement on multiplie l'équation $(a)$ par $1-x$, et qu'on ajoute au produit l'équation identique

$$dydx^2 - dydx^2 = 0,$$

on aura celle

$$(1-x)^2 d^3y - 3(1-x) d^2ydx + dydx^2 - dydx^2 = 0,$$

ou $$[(1-x)^2 d^3y - 2(1-x) d^2ydx] - d^2ydx$$
$$+ [xd^2ydx + dydx^2] - dydx^2 = 0,$$

dont il est aisé de voir que la première intégrale est

$$(1-x)^2 d^2y - dydx + xdydx - ydx^2 + c^{\text{IV}} dx^2 = 0 \ldots (c)',$$

équation différentielle du second ordre qui est encore absolument différente de celles $(b)$, $(e)$, $(g)$ de l'article 452 et de celle $(b)$ de cet article ; donc, sans approfondir si l'équation $(a)$ peut encore être intégrée une première fois de quelqu'autre manière, nous voyons d'abord que cette équation a cinq premières intégrales $(b)$, $(e)$, $(g)$, (art. 452), et $(b)$, $(c)$ de cet article qui sont absolument différentes. Or si, suivant la méthode de l'article 452, on cherche deux autres intégrales premières par le moyen de celle $(b)$, qu'on en fasse autant par rapport à la première intégrale $(c)$, on aura quatre autres intégrales différentes entre elles, ce qui fera en tout neuf premières intégrales de l'équation $(a)$ essentiellement différentes entre elles.

455. Il suit évidemment de ce que nous avons démontré précédemment, que si l'on peut intégrer une

première fois de $n$ manières différentes une équation différentielle de l'ordre $n$ entre deux variables, on pourra parvenir à trouver l'intégrale finale de la proposée, sans intégrer les équations différentielles d'ordres inférieurs $n-1$, $n-2 \ldots 2, 1$ : car par le moyen des $n$ premières intégrales, on pourra aisément éliminer les $n-1$ quantités $d^{n-1}y$, $d^{n-2}y \ldots d^2y$, $dy$, ce qui conduira à une équation délivrée de tout facteur différentiel, qui sera l'intégrale finale de l'équation proposée. Par exemple, intégrant une première fois de trois manières différentes l'équation

$$(1-x)\,d^3y - 3d^2y\,dx = 0 \ldots\ldots (a),$$

nous avons trouvé les trois premières intégrales

$(1-x)d^2y - 2dydx + cdx^2 = 0$ [éq. ($b$) art. 452] (*),

$(1-x)^3d^2y - c'''dx^2 = 0$ [éq. ($b$) art. 454]

$(1-x)^2d^2y - (1-x)dydx - ydx^2 + c^{\text{IV}}dx^2 = 0$ [éq($c$), art. 454],

éliminant $d^2y$ entre la première et la seconde de ces équations, ensuite entre la seconde et la troisième, et divisant par $dx$, il vient

$$2(1-x)^2dy - (c''' + c)dx + 2cxdx - cx^2dx = 0$$

$$(1-x)^2dy + y(1-x)dx - (c''' + c^{\text{IV}})dx + c^{\text{IV}}xdx = 0.$$

Enfin éliminant $dy$ entre ces deux dernières équations,

---

(*) Cette intégrale nous a été donnée par la méthode des intégrations réciproques. En effet,

$$d[(1-x)\,d^2y] = (1-x)d^3y - dxd^2y,$$

et retranchant des deux membres de cette équation $2dxd^2y$, on a $d\,[(1-x)\,d^2y] - 2dxd^2y = (1-x)\,d^3y - 3dxd^2y$, d'où $\int[(1-x)\,d^3y - 3dxd^2y] = (1-x)\,d^2y - 2\int dxd^2y + cdx^2$. Mais $dx$ étant constante, on a $\int dxd^2y = dx\int d\,(dy) = dxdy$, donc

$$\int[(1-x)\,d^3y - 3dxd^2y = 0] = [(1-x)\,d^2y - 2dydx + cdx^2 = 0].$$

divisant par $dx$, et représentant respectivement par $c$, $c'$, $c''$ les quantités constantes indéterminées et arbitraires $\frac{c}{2}$, $c^{\text{IV}}-c$, $-\left(\frac{c'''-c}{2}+c^{\text{IV}}\right)$, on a l'équation primitive

$$y(1-x)+cx^2+c'x+c''=0,$$

qui est l'intégrale finale de l'équation ($a$), et est identique avec celle ($d$) de l'article 452.

456. Nous avons vu au chap. IV de la seconde section, que toute équation différentielle du premier ordre à deux variables est susceptible d'être intégrée exactement par la multiplication d'un facteur (art. 360), et même d'un nombre infini de facteurs qui sont formés des produits du premier facteur par une fonction quelconque de l'intégrale cherchée [art. 368]; mais ces facteurs étant la plupart du temps extrêmement difficiles à trouver, on pourroit, dans certains cas, tenter le moyen suivant pour intégrer l'équation proposée, et qui dispenserait de chercher le facteur propre à rendre exacte l'équation différentielle proposée.

Différentiant l'équation différentielle du premier ordre qu'on veut intégrer, on aura une équation différentielle du second ordre, qu'on cherchera à intégrer une première fois de quelque manière qui produise une équation différentielle du premier ordre essentiellement différente de la première, et éliminant entre ces deux dernières équations la différentielle de la variable qu'on a considérée comme ne variant pas uniformément; enfin divisant l'équation résultante par la différentielle de la variable considérée comme variant uniformément, on aura une équation primitive qui est l'intégrale de la proposée.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$xdy - ydx - x^2dx - adx = 0 \ldots\ldots (a).$$

Différentiant cette équation en considérant $dy$ comme variable, et $dx$ comme constante, on a, toutes réduction faites, l'équation différentielle du second ordre.

$$ddy - 2dx^2 = 0,$$

et intégrant une première fois, il vient

$$\int d(dy) = 2dx \int dx + cdx,$$

ou $$dy = 2xdx + cdx;$$

substituant cette valeur de $dy$ dans la proposée $(a)$, et divisant par $dx$, on a l'équation primitive

$$x^2 - y + cx - a = 0,$$

dans laquelle $c$ est la constante arbitraire et qui est l'intégrale complète de l'équation proposée $(a)$.

---

# CHAPITRE VI.

*De la résolution par approximation des équations différentielles entre deux variables et du second ordre qu'on ne peut résoudre exactement, lorsqu'on éprouve des difficultés insurmontables pour trouver les facteurs propres à rendre ces équations exactement intégrables.*

457. EULER a donné dans les *Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ*, tomes IX et XVII, ainsi que dans son grand et superbe ouvrage ayant pour titre

*Institutionum Calculi integralis*, tome II, section I, chapitres VII, VIII et IX des méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles et linéaires du second ordre généralement représentées par

$$d^2y + X\,dydx + y\xi dx^2 = 0 \ldots\ldots (452);$$

X et $\xi$ étant des fonctions quelconques de $x$. Mais ces méthodes qui tendent toutes à réduire les résolutions par approximation des équations du second ordre à celles du premier, et qui changent suivant les modifications que l'on fait éprouver à l'équation générale (452), peuvent, ce me semble, se réduire à une seule méthode qui, satisfaisant à l'équation (452), prise dans toute sa généralité, satisfait de même aux cas particuliers qui dépendent des différentes valeurs qu'on peut supposer à X et $\xi$. En effet, soit fait

$$y = e^{\int zdx} \ldots\ldots (453),$$

d'où $dy = e^{\int zdx}\,zdx$ et $ddy = e^{\int zdx}[z^2dx + dz]\,dx$: substituant ces valeurs dans l'équation (452), on a l'équation différentielle du premier ordre,

$$dz + z^2dx + zXdx + \xi dx = 0 \ldots\ldots (454);$$

laquelle étant intégrée par approximation, (chap. VII, sect. II), donne $z$ en une suite indéfinie de termes fonctions de $x$; d'où l'on conclura par des simples intégrations de fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable, la valeur de $\int zdx$ en une suite indéfinie de termes fonctions de $x$, et par conséquent on aura la valeur cherchée de $y$.

458. Faisons l'application de cette méthode générale à la résolution de l'équation

$$ddy + ax^ny dx^2 = 0 \ldots\ldots (455),$$

dont Euler s'occupe uniquement au chapitre VII de la première section du tome second de l'ouvrage cité plus haut.

Comparant la proposée (455) à l'équation générale (452), on a $X = 0$ et $\xi = ax^n$, ce qui réduit la transformée générale (454) à celle

$$dz + z^2dx + ax^ndx = 0 \ldots\ldots (a),$$

qui est précisément de la forme de l'équation du comte Riccati [équat. (312), art. 351]. Ainsi, tant que l'exposant $n$ de $x$ sera égal à un des termes de la suite indéfinie, qui a pour terme général la formule (317), [art. 351], il sera possible que la valeur de $z$ soit donnée par une suite finie de termes, et que si tous ces termes multipliés par $dx$ sont de même exactement intégrables, la valeur de $y$ [équat. (453)] soit exacte, et alors l'équation proposée (455) se résoudra exactement (*).

---

(*) Soit par exemple $n = 0$, ce qui donnera à intégrer l'équation,

$$ddy + aydx^2 = 0 \ldots\ldots (A),$$

dont la transformée est

$$dz + z^2dx + adx = 0 \ldots\ldots (B),$$

d'où $$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{c\sqrt{a-z}}{\sqrt{a+cz}}\right) \ldots\ldots (C),$$

en représentant par $c$ une première constante indéterminée et arbitraire; mais de la transformée (B) on tire

$$\int zdx = -\int \frac{zdz}{a+z^2} = l\,\frac{c'}{\sqrt{a+z^2}},$$

en représentant par $c'$ une autre constante indéterminée et arbitraire; donc substituant cette valeur de $\int zdx$ dans l'equation (453), il viendra $y = \frac{c'}{\sqrt{a+z^2}}$; d'où $z = \frac{\sqrt{c'-ay^2}}{y}$, et substituant

Mais supposons que l'exposant $n$ est un nombre entier et positif, ce qui rend l'équation $(a)$ inséparable, et cherchons dans ce cas-là à résoudre par approximation l'équation proposée (455). Soit fait

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots + Mx^{n-1} + Px^n + Qx^{n+1} \ldots (b),$$

en représentant par A, B, ... P, Q des quantités constantes indéterminées, et nous arrêtant au terme où $x$ est élevé à la puissance $n+1$, parce que, comme nous le verrons tout-à-l'heure, ces $n+2$ termes sont suffisans pour faire connaître tous les autres termes de la série. Différentiant l'équation $(b)$, il vient celle

$$dz = [B + 2Cx + 3Dx^2 \ldots + (n+1)Qx^n]\,dx \ldots (c),$$

et substituant les valeurs de $z$ et de $dz$ [éq. $(b)$ et $(c)$] dans l'équation $(a)$, on a celle

$$\left.\begin{array}{r} A^2 + 2AB \\ \\ +B + 2C \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 2AC \\ + B^2 \\ + 3D \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x^2 \ldots\ldots + 2AP \\ + 2BM \\ + a \\ +(n+1)Q \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^n \\ \\ \\ \\ \end{array} = 0,$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $x$, donne les équations

$$B = -A^2,\ C = A^3,\ D = -A^4 \ldots Q = \pm A^{n+2} - \frac{a}{n+1};$$

---

cette valeur de $z$ dans l'équation $(c)$, il viendra celle $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ arc $\left(\text{tang} = \frac{c\sqrt{ay} - \sqrt{c' - ay^2}}{y\sqrt{a} + c\sqrt{c' - ay^2}}\right) \ldots$ (D), qui est l'intégrale complète de l'équation (A). On aurait pu intégrer directement la proposée (A); car étant de la forme de celle (440), [art. 431], on a son auxiliaire qui est $m^2 + a = 0$, donc $m = \sqrt{-a}$ et $m' = -\sqrt{-a}$, d'où il résulte, d'après l'équation $(a)$ de l'article 432, que

$$y = c\cos(\sqrt{a}x) + c'\sin(\sqrt{a}x).$$

Substituant

substituant ces valeurs dans l'équation ($b$), on a

$$z = A - A^2x + A^3x^2 - A^4x^3 \ldots \pm \left(A^{n+2} \mp \frac{a}{n+1}\right)x^{n+1} \ldots (c);$$

les signes supérieurs lorsque $n$ est un nombre impair, les inférieurs dans le cas contraire ; donc

$$\int zdx = Ax - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{3} - \frac{A^4x^4}{4} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{n+2}\left(A^{n+2} \pm \frac{a}{n+1}\right)x^{n+2} \ldots (d).$$

Or l'équation (453) qu'on peut écrire ainsi qu'il suit,

$$ly = \int zdx,$$

étant complétée en y ajoutant le logarithme d'une constante arbitraire $c$, donne $ly = \int zdx + lc$, ou $\frac{y}{c} = e^{\int zdx}$, d'où $y = ce^{\int zdx}$ : développant en série le facteur exponentiel, on a

$$y = c\left[1 + \frac{\int zdx}{1} + \frac{(\int zdx)^2}{1.2} + \text{etc.}\right],$$

et substituant la valeur de $\int zdx$ donnée par l'équation ($d$), en ne poussant le calcul que jusqu'au terme où $x$ est élevée à la puissance $n+2$, on aura, toutes reductions faites,

$$y = c + cAx - \frac{cax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} :$$

ou, à cause de l'arbitraire de la constante $c$ et de celle A, qui est la seconde constante arbitraire qui doit entrer dans l'équation primitive de l'équation différentielle du second ordre (455), faisant $c' = cA$, on aura

$$y = c + c'x - \frac{cax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \ldots\ldots (e).$$

Ayant les trois premiers termes de la valeur de $y$ en série indéfinie, il nous sera aisé de prolonger cette série aussi loin que nous le voudrons. En effet, soit fait

$$y = c + c'x - \frac{acx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \alpha x^{\beta} + \gamma x^{\omega} + \delta x^{\lambda}$$
$$+ \varepsilon x^{\theta} + \pi x^{\varpi} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (f),$$

toutes les lettres grecques représentant des quantités constantes indéterminées. Différentiant deux fois de suite l'équation $(f)$, on a $ddy = -[acx^n - \alpha\beta(\beta-1)x^{\beta-2}$ $-\gamma\omega(\omega-1) - \delta\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - \varepsilon\theta(\theta-1)x^{\theta-2} - \pi\varpi(\varpi-1)x^{\varpi-2}]dx^2$. Substituant cette valeur de $ddy$, ainsi que celle de $y$, [ équat. $(f)$ ], dans la proposée (455), et divisant par $dx^2$, il vient, toutes réductions faites, l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \gamma\omega(\omega-1)x^{\omega-2} + \delta\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \\ \quad + \varepsilon\theta(\theta-1)x^{\theta-2} + \pi\varpi(\varpi-1)x^{\varpi-2} + \text{etc.} = \\ -c'ax^{n+1} + \dfrac{ca^2}{(n+1)(n+2)}x^{2n+2} - a\alpha x^{\beta+n} \\ \quad - a\gamma x^{\omega+n} - a\delta x^{\lambda+n} - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0 \ldots (g)$$

dont le nombre convenable des indéterminées exprimées par les lettres grecques, permet de faire chaque terme du premier membre égal à celui qui lui correspond dans le second, et par conséquent de satisfaire à l'équation $(g)$, indépendamment des valeurs de $x$, ce qui donne la suite d'équations

$$\beta - 2 = n + 1,\ \alpha\beta(\beta - 1) = -ac',\ \omega - 2 = 2n + 2,$$
$$\gamma\omega(\omega - 1) = \frac{ca^2}{(n+1)(n+2)},\ \lambda - 2 = \beta + n,$$
$$\delta\lambda(\lambda - 1) = -a\alpha,\ \theta - 2 = \omega + n,\ \varepsilon\theta(\theta - 1) = -a\gamma,$$
$$\varpi - 2 = \lambda + n,\ \pi\varpi(\varpi - 1) = -a\delta,$$

d'où l'on tire

$$\beta = n+3, \alpha = \frac{-ac'}{(n+3)(n+2)}, \quad \omega = 2(n+2),$$

$$\gamma = \frac{a^2c}{2(n+1)(2n+3)(n+2)^2}, \quad \lambda = 2n+5,$$

$$\delta = \frac{a^2c'}{2(n+3)(2n+5)(n+2)^2}, \quad \theta = 3(n+2),$$

$$\varepsilon = \frac{-a^3c}{2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3}, \quad \varpi = 3(n+7),$$

$$\pi = \frac{-a^3c'}{2.3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3}, \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(f)$, il vient celle

$$= \left\{ \begin{array}{l} c\left[1 - \dfrac{ax^{n+2}}{1.(n+1)(n+2)} + \dfrac{a^2x^{2(n+2)}}{1.2(n+1)(2n+3)(n+2)^2} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{a^3x^{3(n+2)}}{1.2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3} + \text{etc.} \right] \\ + c'\left[x - \dfrac{ax^{n+3}}{1.(n+3)(n+2)} + \dfrac{a^2x^{2n+5}}{1.2(n+3)(2n+5)(n+2)^2} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{a^3x^{3n+7}}{1.2.3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3} + \text{etc.} \right] \end{array} \right\} \ldots (456),$$

qui est l'intégrale demandée, et dont on peut sans autre calcul, prolonger les deux séries d'après la loi qui régit chacune d'elles, et qui se manifeste d'une manière évidente.

Il y a différentes valeurs particulières de $n$ qui rendent la valeur précédente de $y$ en partie ou en tout infinie ; il faudra donc dans ces cas chercher de quelqu'autre manière la solution complète de l'équation (455) ; c'est à quoi nous parviendrons après avoir résolu le problème suivant.

459. PROBLÈME. *Connaissant l'une des deux intégrales particulières de l'équation*

$d^2y + Xdydx + y\xi dx^2 = 0$ [équat. (452), art. 457],

*que l'on obtient de l'intégrale complète en faisant l'une des deux constantes arbitraires* $c$ *ou* $c' = 0$, *trouver l'autre intégrale particulière, et par conséquent l'intégrale générale de la proposée.*

SOLUTION. Soit $y = cf(x) \ldots (a)$

l'intégrale particulière connue, et représentant par $\varphi(x)$, une fonction inconnue de $x$, soit

$$y = cf(x)\varphi(x) \ldots\ldots (b)$$

la seconde intégrale particulière cherchée. Différentiant deux fois de suite l'équation $(b)$, substituant les valeurs résultantes de $dy$ et $ddy$, ainsi que celle de $y$ [éq. $(b)$], dans le trinome qui forme le premier membre de l'équation (452), il est clair que l'équation $(b)$ étant l'une des deux intégrales particulières de l'équation (452), le résultat de cette substitution sera égal à zéro, et on aura par conséquent.

$$\varphi(x)[cddf(x) + cXd(fx)dx + c\xi f(x)dx^2] + cf(x)dd\varphi(x)$$
$$+ 2cdf(x)d\varphi(x) + cXf(x)d\varphi(x)dx = 0 \ldots\ldots (c).$$

Or le facteur de $\varphi(x)$, n'est autre chose que le premier membre de l'équation (452), dans lequel on a substitué à la place de $y$, $dy$ et $ddy$, la valeur de $y$, [équat. $(a)$], et les différentielles première et seconde de cette valeur; donc, puisque l'équation $(a)$ est par hypothèse l'une des deux intégrales particulières de l'équation (452), il s'ensuit que le facteur trinome de $\varphi(x)$ dans l'équation $(c)$ est $= 0$; on a donc aussi

$$f(x)dd\varphi(x) + 2df(x)d\varphi(x) + Xf(x)d\varphi(x)dx = 0 \ldots (d),$$

et faisant

$$d\varphi(x)=\varphi'(x)dx\ldots(e) \quad \text{d'où} \quad d^2\varphi(x)=d\varphi'(x)dx,$$

on aura l'équation

$$f(x)\,d\varphi'(x)+2df(x)\,\varphi'(x)+Xf(x)\,\varphi'(x)\,dx=0$$

qui étant divisée par $f(x)\varphi'(x)$, donne celle

$$\frac{d\varphi'(x)}{\varphi'(x)}+\frac{2df(x)}{f(x)}+Xdx=0,$$

dont l'intégrale est

$$lc'\varphi'(x)[f(x)]^2=-\int Xdx, \text{ou } c'\varphi'(x)[f(x)]^2=e^{-\int Xdx}$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(x)=\frac{e^{-\int Xdx}}{c'[f(x)]^2};$$

mais l'équation $(e)$ donne $\varphi(x)=\int\varphi'(x)dx$, donc

$$\varphi(x)=\int\frac{e^{-\int Xdx}}{c'[f(x)]^2}dx;$$

substituant cette valeur de $\varphi(x)$ dans l'équation $(b)$, on aura pour la seconde intégrale particulière de l'équation (452)

$$y=f(x)\int\frac{e^{-\int Xdx}}{c'[f(x)]^2}dx,$$

et par conséquent l'intégrale entière et complète de la proposée est

$$y=f(x)\left[c+c'\int\frac{e^{-\int Xdx}}{[f(x)]^2}dx\right]\ldots(457),$$

en représentant par $c'$ la quantité constante arbitraire $\frac{1}{c'}$.

EXEMPLE. *Sachant que l'équation*

$$x^2(lx-1)ddy-xdydx+ydx^2=0\ldots\ldots(f)$$

*a pour l'une de ses deux intégrales particulières*

$$y = cx \ldots\ldots (g),$$

*trouver l'intégrale entière et complète de la proposée* ($f$).

Divisant l'équation ($f$) par $x^2(lx-1)$, et comparant l'équation résultante avec celle (452), on a $X = -\frac{1}{x(lx-1)}$, donc $e^{-\int X dx} = e^{\int \frac{dlx}{lx-1}} = e^{l(lx-1)} = lx - 1$; et puisque $f(x) = x$, on aura

$$y = x\left[c + c'\left(\int \frac{lxdx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2}\right)\right] \text{[équat. (457)]};$$

mais $\int \frac{lxdx}{x^2} = -\frac{lx}{x} - \frac{1}{x}$ et $-\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$, donc

$$y = x\left(c - \frac{c'lx}{x}\right) = cx - c'lx,$$

ce qui est l'intégrale complète de la proposée ($f$).

460. Nous allons maintenant nous occuper des cas où certaines valeurs particulières de $n$, mettent en défaut la solution par approximation (456) de l'équation (455) : le premier de ces cas que nous considérerons, est celui où $n = -2$, c'est-à-dire celui où l'on a à résoudre l'équation

$$ddy + \frac{aydx^2}{x^2} = 0 \ldots\ldots (458);$$

car alors chacune des deux séries qui composent la valeur approchée (456) de $y$, devient infinie en grandeur. Il faut donc chercher de quelqu'autre manière l'intégrale complète de l'équation (458); c'est ce qui va être l'objet de nos recherches dans cet article.

Soit fait $y = cx^{\omega} \ldots\ldots (a)$,

en représentant par $c$ une constante indéterminée arbitraire, et par $\omega$ une constante encore indéterminée, mais non arbitraire, et dont nous allons déterminer la valeur de la manière suivante. Différentiant deux fois de suite l'équation $(a)$, ce qui donne

$$ddy = c\omega(\omega - 1)x^{\omega-2}dx^2,$$

substituant cette valeur de $ddy$, ainsi que celle de $y$ [ équat. $(a)$ ] dans l'équation (458), enfin divisant le résultat par $cx^{\omega-2}dx^2$, on a l'équation complète du second degré $\omega^2 - \omega + a = 0$, d'où l'on tire $\omega = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$,

et substituant cette valeur successivement avec le signe $+$ et ensuite avec le signe $-$ dans l'équation $(a)$, en accentuant $c$ dans la seconde substitution, on aura les deux intégrales particulières de l'équation (458); ainsi l'intégrale totale et complète de cette dernière équation est

$$y = cx^{\frac{1+\sqrt{(1-4a)}}{2}} + c'x^{\frac{1-\sqrt{(1-4a)}}{2}} \ldots (459) (*).$$

---

[*] Cette intégrale que nous avons tout de suite déduite d'une seule intégrale particulière, à cause du double signe qui précède $\sqrt{(1-4a)}$, peut encore se déduire aisément de la formule (457) [art. 459]; car ayant trouvé que l'une des deux intégrales particulières est $y = cx^{\frac{1+\sqrt{(1-4a)}}{2}}$, d'où $f(x) = x^{\frac{1+\sqrt{(1-4a)}}{2}}$, et d'ailleurs X étant dans ce ce cas ci $= 0$, la formule (457) donne $y = x^{\frac{1+\sqrt{(1-4a)}}{2}}\left[c + c'\int\frac{dx}{x^{1+\sqrt{(1-4a)}}}\right]$. Or $\int\frac{dx}{x^{1+\sqrt{(1-4a)}}} = -\frac{x^{-\sqrt{(1-4a)}}}{\sqrt{(1-4a)}}$; donc représentant toujours par $c'$

Cette valeur de $y$ est affectée d'imaginaires lorsque $a$ étant un nombre positif dans la proposée (458), on a de plus $a > \frac{1}{4}$; car alors l'équation (459) se change en celle

$$y = \sqrt{x}\left[cx^{\frac{\sqrt{(4a-1)}\sqrt{-1}}{2}} + c'x^{\frac{-\sqrt{(4a-1)}\sqrt{-1}}{2}}\right] \ldots (b).$$

Mais il est aisé d'éliminer l'imaginaire $\sqrt{-1}$, en observant que $x^{\frac{\pm\sqrt{(4a-1)}\sqrt{-1}}{2}} = e^{\frac{\pm\sqrt{(4a-1)}\sqrt{-1}}{2}lx}$ $= \cos\frac{\sqrt{(4a-1)}}{2}lx \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\sqrt{(4a-1)}}{2}lx$; donc pour le cas de $a > \frac{1}{4}$, on a la vraie solution de l'équation (458), qui est

$$y = \sqrt{x}\left[c\cos\frac{\sqrt{(4a-1)}}{2}lx + c'\sin\frac{\sqrt{(4a-1)}}{2}lx\right] . (460).$$

Il peut encore arriver que $a = \frac{1}{4}$, alors l'une et l'autre solution (459) et (460) ne donnent plus que l'intégrale particulière

$$y = c\sqrt{x} \ldots\ldots (c),$$

de l'équation (458) qui, dans le cas que nous considérons, devient

$$ddy + \frac{ydx^2}{4x^2} = 0 \ldots\ldots (461).$$

Mais d'après ce qui a été enseigné à l'article 459, il nous est aisé de trouver l'intégrale générale de la proposée (461). En effet, comparant cette dernière

---

la quantité constante arbitraire $\frac{-c'}{\sqrt{(1-4a)}}$, on aura l'équation $y = 2^{\frac{1+\sqrt{(1-4a)}}{2}}[c + c'x^{-\sqrt{(1-4a)}}]$ qui se réduit à celle (459) lorsqu'on effectue la multiplication.

équation avec celle (452), [art. 457, et répétée à l'article 459], on a $X = 0$ et $\xi = \frac{1}{4x^2}$; de plus l'équation ($c$) comparée avec celle ($a$) de l'article (459), donne $f(x) = \sqrt{x}$; donc substituant ces valeurs dans l'équation (457), [art. 459], il vient

$$y = \sqrt{x}\left[c + c'\int\frac{dx}{x}\right],$$

et intégrant, on a pour intégrale générale et complète de la proposée (461), l'équation

$$y = \sqrt{x}\,[c + c'lx] \ldots\ldots (462).$$

461. La formule générale (456) de solution par approximation de l'équation (455), ne donne que l'une des intégrales particulières et par approximation de cette dernière équation, 1°. lorsque $n = \frac{1-2m}{m}$; 2°. lorsque $n = -\frac{(1+2m)}{m}$, en représentant par $m$ un nombre entier et positif; car dans le premier cas, la première série de la formule (456) a tous ses termes divisés par zéro, à partir de celui où le coefficient de $n$ dans le dénominateur est $= m$ (*); mais la seconde

(*) En effet, les coefficiens de $n$ dans cette première série, formant la progression par différence $\div 1.2.3.4 \ldots\ldots m$, en s'arrêtant au $m^{ieme}$ terme; les nombres qu'on ajoute à $n$, $2n$, $3n \ldots\ldots mn$ forment la progression par différence $\div 1.3.5.7 \ldots\ldots 1+2(m-1)$; donc au terme de la série en question où il commencera à y avoir au dénominateur $m$ facteurs binomes $n+1$, $2n+3$, $3n+5 \ldots\ldots$ le dernier ou $m^{ieme}$ facteur sera $mn+1+2(m-1)$ ou $mn+2m-1$, mais par hypothèse $n = \frac{1-2m}{m}$; donc ce facteur sera $1-2m+2m-1=0$.

série conserve tous ses termes de valeur significative et de grandeur limitée ; donc, représentant par $S'$ cette série, on ne devra conserver de l'intégrale générale (456) que l'intégrale particulière

$$y = c' S' ;$$

d'où l'on conclura que l'intégrale générale de la proposée est

$$y = S' \left[ c' + c \int \frac{dx}{S'^2} \right] \ldots (463), \text{ [éq. (457), art. 459]}.$$

De même dans le second cas, la première série de l'équation (456) conservant ses termes de valeur significative et de grandeur finie, ceux de la seconde, à commencer du $(m+1)^{ième}$ terme, seront infinis (*) ; ainsi on ne devra conserver de l'équation (456), que la première série, et représentant cette serie par $S$, il s'ensuivra que l'on n'aura que l'intégrale particulière

$$y = cS :$$

mais par le moyen de la formule (457), [art. 459], on en conclura que l'intégrale générale de la proposée est

$$y = S \left[ c + c' \int \frac{dx}{S^2} \right] \ldots\ldots (464).$$

---

(*) En effet, les premiers termes des facteurs binomes du $(m+1)^{ième}$ terme formant la progression par différence $\div n.2n.3n \ldots\ldots mn$, les seconds termes forment la progression par différence $\div 3.5.7 \ldots\ldots 3 + 2(m-1)$; donc le $m^{ième}$ facteur binome de ce terme sera $mn + 3 + 2(m-1)$ ou $mn + 2m + 1$ ; mais par hypothèse on a $n = -\frac{(1+2m)}{m}$ ; donc ce facteur sera $-1 - 2m + 2m + 1 = 0$.

EXEMPLE. *Intégrer par approximation l'équation*

$$d^2y + \frac{ydx^2}{x} = 0 \ldots\ldots (a),$$

Comparant cette équation avec celle (455), il vient $a = 1$ et $n = -1 = \frac{1-2m}{m}$, en faisant dans cette dernière formule $m = 1$; donc n'ayant égard qu'à la seconde série de la formule (456), on a

$$y = (c'S') = c'\left[x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} - \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5} - \text{etc.}\right].$$

Elevant la série entre crochets à la puissance $-2$ par la méthode enseignée à l'art. 33 (tom. I, pag. 46), et multipliant le développement par $dx$, on trouve bien vîte que

$$\frac{dx}{S'^2} = \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{x} + \frac{7dx}{12} + \frac{19xdx}{72} + \frac{9x^2dx}{80} + \text{etc.},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{S'^2} = -\frac{1}{x} + lx + \frac{7x}{12} + \frac{19x^2}{144} + \frac{3x^3}{80} + \text{etc.}$$

Multipliant cette série par $cS'\left(= cx - \frac{cx^2}{2} + \text{etc.}\right)$, et substituant ces valeurs dans l'équation (463), on a, toutes réductions faites,

$$y = (c' + clx)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \text{etc.}\right)$$
$$- c\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{72}x^3 - \text{etc.}\right),$$

ce qui est l'intégrale par approximation de l'équation proposée ($a$).

462. L'application que nous avons faite de la méthode enseignée à l'article 457, pour résoudre par approximation l'équation générale (452), dans le cas où l'on a dans cette équation $X=0$ et $\xi=ax^n$, étant suffisante pour faire connaître au lecteur comment il doit opérer pour toute autre valeur des fonctions X et $\xi$ de $x$, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ces résolutions par approximation; mais avant d'abandonner entièrement ce sujet, nous pensons qu'il est à propos, et même très-utile, comme nous le verrons tout-à-l'heure, d'observer que l'intégration de l'équation

$$du+u^2dx+ax^ndx=0\ldots\ldots(a)$$

du comte Riccati, peut aisément se ramener à celle de l'équation (455). En effet, faisant

$$(b)\ldots y=e^{\int udx},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{y}=udx\ldots(c),$$

$$(d)\ldots u^2dx^2=\frac{dy^2}{y^2}\quad\text{et}\quad dudx=\frac{ddy}{y}-\frac{dy^2}{y^2}\ldots(e);$$

ensuite multipliant l'équation ($a$) par $ydx$, ce qui donne celle

$$ydxdu+yu^2dx^2+ayx^ndx^2=0,$$

et substituant dans cette dernière équation les valeurs de $dxdu$ [éq. ($e$)] et de $u^2dx^2$ [éq. ($d$)], on a, toutes réductions faites, l'équation (455) qui, étant résolue, donne $y=fx$, d'où $\frac{dy}{y}$ ou $dly=dlfx$; or, de l'équation ($c$) on tire $u=\frac{dly}{dx}$, donc

$$u = \frac{dlfx}{dx} \ldots\ldots (f),$$

ce qui est l'intégrale de l'équation ($a$).

463. Cette manière de ramener l'intégration de l'équation du comte Riccati à celle de l'équation (455), peut être souvent utile lorsque la première de ces équations n'est pas séparable, et qu'on veut cependant la résoudre par approximation; elle peut même être encore utile lorsque l'équation du comte Riccati étant séparable, le nombre représenté par $n$ est tel, que l'intégration de l'équation (455) peut s'effectuer exactement, et est plus aisé à obtenir que celle de l'équation ($a$). Par exemple, soit proposé d'intégrer l'équation

$$du + u^2dx + \frac{5dx}{36x^2} = 0 \ldots\ldots (g),$$

qui, comparée avec l'équation ($a$), donne

$$a = \frac{5}{36} \quad \text{et} \quad n = -2.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (455), on a celle

$$ddy + \frac{5ydx^2}{36x^2} = 0,$$

qui est de la forme de l'équation (458), [art. 460], et dont conséquemment l'intégrale donnée par l'equation (459) est

$$y = cx^{\frac{5}{6}} + c'x^{\frac{1}{6}};$$

donc l'équation ($f$) donnera celle

$$u = \frac{5cx^{\frac{2}{3}} + c'}{6x(cx^{\frac{2}{3}} + c')}$$

ou, divisant les deux termes de la fraction par $c'$, et représentant la quantité constante arbitraire $\frac{c}{c'}$ par $c$, on aura

$$u = \frac{5cx^{\frac{2}{3}} + 1}{6x(cx^{\frac{2}{3}} + 1)}$$

ce qui est la solution complète de l'équation ($g$), et que nous avons obtenue avec beaucoup moins de calcul par le moyen que nous venons d'employer, que si nous nous étions servi de la méthode enseignée à l'article 351, en transformant la proposée en une équation homogène, et intégrant cette transformée, (art. 339).

# SECTION IV.

## *Supplément aux trois premières Sections.*

## CHAPITRE Ier.

### *Intégration simultanée de certains systèmes d'équations.*

464. Nous avons déjà fait voir à l'article 446, comment, étant donné un système de $m-1$ équations linéaires d'un ordre quelconque $n$ entre un nombre $m$ de variables $u$, $x$, $y$, $z$....., on doit s'y prendre pour trouver les valeurs des variables $u$, $y$, $z$...., en fonctions de $x$ qui satisfont simultanément aux $m-1$ équations proposées. Nous allons dans ce chapitre nous occuper des mêmes recherches pour certains autres systèmes d'équations, et commençant par celles du premier ordre, nous nous proposerons d'abord de trouver les valeurs de $y$ et de $z$ en fonctions de $x$ qui satisfont simultanément aux deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}z+\mathrm{B}y)dx+\mathrm{D}dz+\mathrm{E}dy=\mathrm{X}dx\\(\mathrm{H}z+\mathrm{I}y)dx+\mathrm{K}dz+\mathrm{L}dy=\xi dx\end{array}\right\}\ldots.(465)$$

dans lesquelles les lettres A...E, H...L représentent des quantités constantes déterminées, et X, $\xi$ des fonctions quelconques de $x$.

Eliminant successivement $dy$ et $dz$ entre les deux équations (465), on a les deux suivantes

$$\left.\begin{array}{l}[(AL-EH)z+(BL-EI)y]dx+(DL-EK)dz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =(LX-E\xi)dx \\ [(DH-AK)z+(DI-BK)y]dx+(DL-EK)dy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =(D\xi-KX)dx\end{array}\right\}.(a);$$

lesquelles étant divisées par DL — EK, et faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l}a=\dfrac{AL-EH}{DL-EK},\ b=\dfrac{BL-EI}{DL-EK},\ X'=\dfrac{LX-E\xi}{DL-EK} \\ m=\dfrac{DH-AK}{DL-EK},\ n=\dfrac{DI-BK}{DL-EK},\ \xi'=\dfrac{D\xi-KX}{DL-EK}\end{array}\right\}(466),$$

se réduiront aux deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(az+by)dx+dz=X'dx \\ (mz+ny)dx+dy=\xi'dx\end{array}\right\}\ldots\ldots(467)$$

Multipliant la première de ces équations par un facteur indéterminé $\mathcal{C}$, et ajoutant le produit avec la seconde équation, on a celle

$$[(a\mathcal{C}+m)z+(b\mathcal{C}+n)y]dx+\mathcal{C}dz+dy=[\mathcal{C}X'+\xi']dx,$$

ou

$$(b\mathcal{C}+n)\left[\frac{a\mathcal{C}+m}{b\mathcal{C}+n}z+y\right]dx+\mathcal{C}dz+dy=[\mathcal{C}X'+\xi']dx\,(b).$$

Mais à cause de l'indétermination de la constante $\mathcal{C}$, soit fait

$$\frac{a\mathcal{C}+m}{b\mathcal{C}+n}=\mathcal{C},\ \text{d'où}\ \mathcal{C}=\frac{a-n\pm\sqrt{4bm+(a-n)^2}}{2b}.(468):$$

or cette dernière équation donnant deux valeurs de $\mathcal{C}$ que nous représenterons respectivement par $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, nous aurons en substituant successivement ces deux valeurs

valeurs de $\mathcal{C}$ dans l'équation $(b)$, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(b\mathcal{C}'+n)(\mathcal{C}'z+y)dx+d(\mathcal{C}'z+y)=(\mathcal{C}'X'+\xi')dx\\(b\mathcal{C}''+n)(\mathcal{C}''z+y)dx+d(\mathcal{C}''z+y)=(\mathcal{C}''X'+\xi')dx\end{array}\right\}\cdot\cdot(c),$$

ou faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{lll}p'=b\mathcal{C}'+n, & u'=\mathcal{C}'z+y, & X''=\mathcal{C}'X'+\xi'\\p''=b\mathcal{C}''+n, & u''=\mathcal{C}''z+y, & \xi''=\mathcal{C}''X'+\xi'\end{array}\right\}\cdot(469),$$

on aura les deux équations

$$\begin{array}{l}p'u'dx+du'=X''dx\\p''u''dx+du''=\xi''dx,\end{array}$$

qui étant de la forme de celle (298)[art. 342], ont respectivement pour intégrales complètes les équations

$$\left.\begin{array}{l}u'=e^{-p'x}(c+\int X''e^{p'x}dx)\\u''=e^{-p''x}(c'+\int\xi''e^{p''x}dx)\end{array}\right\}\cdots\cdots(470),$$

dans lesquelles $c$ et $c'$ représentent des constantes arbitraires. Mais des seconde et cinquième équations du groupe (469) combinées ensemble, tirant les valeurs de $y$ et de $z$, on a

$$\left\{y=\frac{\mathcal{C}'u''-\mathcal{C}''u'}{\mathcal{C}'-\mathcal{C}''},\qquad z=\frac{u'-u''}{\mathcal{C}'-\mathcal{C}''}\right\}\cdots(471),$$

et substituant dans ces deux dernières équations les valeurs respectives de $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $u'$ et $u''$ [équat. (468) et (470)], on aura les valeurs demandées de $y$ et de $z$.

EXEMPLE. *Etant données les équations différentielles*

$$\left.\begin{array}{l}(44z+49y)dx+4dz+9dy=xdx\\(34z+38y)dx+3dz+7dy=e^xdx\end{array}\right\}\cdots(d)$$

*de deux surfaces courbes, trouver les équations primitives des projections de l'intersection des deux surfaces sur les plans coordonnés des* xy *et des* xz.

Comparant les équations $(d)$ avec celles qui leur cor-

respondent respectivement sous le n° 465, on a $A=44$, $B=49$, $D=4$, $E=9$, $X=x$, $H=34$, $I=38$, $K=3$, $L=7$ et $\xi=e^x$. Substituant ces valeurs dans les équations groupées sous le n° 466, il vient $a=2$, $b=1$, $X'=7x-9e^x$, $m=4$, $n=5$ et $\xi'=4e^x-3x$. Mettant les valeurs de $a$, $b$, $m$ et $n$ dans l'équation (468), on a $\mathcal{C}'=1$ et $\mathcal{C}''=-4$; d'où $p'=6$, $p''=1$, $X''=4x-5e^x$ et $\xi''=40e^x-31x$ [équat. du groupe (469)]; donc $\int X''e^{p'x}dx=4\int xe^{6x}dx-5\int e^{7x}dx=\frac{2}{3}e^{6x}(x-\frac{1}{6})-\frac{5}{7}e^{7x}$ [voy. la formule (214) art. 266], et $\int\xi''e^{p''x}dx=40\int e^{2x}dx-31\int xe^xdx=20e^{2x}-31e^x(x-1)$. Substituant ces valeurs dans les équations (470), on a

$$u'=ce^{-6x}+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{5}{7}e^x-\tfrac{1}{9},$$

et

$$u''=c'e^{-x}-31x+20e^x+31,$$

Enfin mettant ces valeurs de $u'$ et de $u''$, ainsi que celles de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ dans les équations (471), on a pour équations de projections sur les plans coordonnés des $xy$ et des $xz$ de l'intersection des deux surfaces, celles

$$y=4ce^{-6x}+c'e^{-x}+\frac{24}{7}e^x-\frac{17}{3}x+\frac{55}{9}$$

$$z=ce^{-6x}-c'e^{-x}-\frac{29}{7}e^x+\frac{19}{3}x-\frac{56}{9}.$$

465. Tant que $b$ et $m$ sont de même signe, ou qu'étant de signes contraires, on a $4bm<(a-n)^2$, il est clair qu'il n'y a rien à changer aux résultats trouvés dans l'article précédent. Mais si $b$ et $m$ sont de signes contraires, il peut arriver 1°. que $4bm=(a-n)^2$, ce qui donne $\mathcal{C}'=\mathcal{C}''$; 2°. que $4bm>(a-n)^2$, ce qui rend les valeurs de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$ imaginaires. Nous allons dans cet article examiner le premier de ces deux cas qui semble offrir beaucoup de difficultés, car $\mathcal{C}'$ étant $=\mathcal{C}''$,

chaque couple d'équat. ($c$) et (470) [art. 464] se réduit à une seule équation, et les equations (471) donnent $y = \frac{0}{0}$ et $z = \frac{0}{0}$, sans pouvoir déterminer à priori les valeurs de ces fractions vagues $\frac{0}{0}$ par les méthodes enseignées au chapitre VIII du Calcul différentiel, (art. 60..67). Mais toute la difficulté disparaîtra, si nous parvenons à éliminer des valeurs de $y$ et de $z$ les quantités qui constituent la différence de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, ainsi que des autres élémens du calcul, qui ne diffèrent entre eux qu'autant que $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont différens. Pour parvenir à ce but, soit fait

$$q = \frac{a-n}{2b} \ldots (472) \text{ et } \omega = \frac{\sqrt{4bm + (a-n)^2}}{2b},$$

ce qui donne $\mathcal{C}' = q + \omega$ et $\mathcal{C}'' = q - \omega$ [ éq. (468) ]. Les intégrations des équations (470) donnent pour $u'$ et $u''$ deux valeurs en fonctions de $x$, qui diffèrent entre elles tant que $\mathcal{C}'$ diffère de $\mathcal{C}''$ ; soit donc

$$\{ u' = \mathrm{F}(x) + f(x) \text{ et } u'' = \mathrm{F}(x) - f(x) \} \ldots (a):$$

substituant ces valeurs dans les équations (471), on a, toutes réductions faites, $y = \mathrm{F}(x) - q\frac{f(x)}{\omega}$ et $z = \frac{f(x)}{\omega}$,

donc $$y = \mathrm{F}(x) - qz \ldots\ldots (473),$$

d'où $dy = d\mathrm{F}(x) - qdz$. Mettant ces valeurs de $y$ et de $dy$ dans la seconde des deux équations (467), il vient celle

$$dz + \frac{(nq-m)z}{q}dx = \frac{n\mathrm{F}(x)dx + d\mathrm{F}(x) - \xi' dx}{q} \ldots (474),$$

qui est de la forme de l'équation (298), (art. 342), et dont conséquemment l'intégrale sera immédiatement donnée par l'equation (299). Ayant la valeur de $z$ en fonction de $x$, il n'y aura qu'à la substituer dans

l'équation (473), et l'on aura par ce moyen les deux équations primitives demandées.

EXEMPLE. *Trouver les valeurs de* y *et de* z *en fonctions de* x, *qui satisfont simultanément aux deux équations*

$$(11z + 31y)\,dx + 4dz + 9dy = e^x$$
$$(8z + 24y)\,dx + 3dz + 7dy = e^{2x}.$$

Comparant ces deux équations avec celles (465), on a $A = 11$, $B = 31$, $D = 4$, $E = 9$, $X = e^x$, $H = 8$, $I = 24$, $K = 3$, $L = 7$ et $\xi = e^{2x}$ : substituant ces valeurs dans les équations (466), il vient $a = 5$, $b = 1$, $X' = 7e^x - 9e^{2x}$, $m = -1$, $n = 3$ et $\xi' = 4e^{2x} - 3e^x$, donc $q = 1$ [équat. (472)] et $\sqrt{4bm + (a-n)^2} = 0$, d'où $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'' = 1$ ce qui donne $f(x) = 0$, et par conséquent $u' = F(x)$, [ équat. $(a)$ ], mais $p' = 4$ et $X'' = 4e^x - 5e^{2x}$ [ 1re et 3eme équations du groupe (469) ] donc $u'$ ou $F(x) = e^{-4x}(c + 4\int e^{5x}dx - 5\int e^{6x}dx)$ [1re éq. (470)] $= ce^{-4x} + \frac{4}{5}e^x - \frac{5}{6}e^{2x}$ ; donc

$$dF(x) = (-4ce^{-4x} + \tfrac{4}{5}e^x - \tfrac{5}{3}e^{2x})\,dx :$$

substituant ces valeurs dans l'équation (474), il vient, toutes réductions faites,

$$dz + 4zdx = (\tfrac{31}{5}e^x - \tfrac{49}{6}e^{2x} - ce^{-4x})dx,$$

et intégrant par le moyen de la formule (299) [ art. 342], on a pour la première des deux équations demandées,

$$z = \tfrac{31}{25}e^x - \tfrac{49}{36}e^{2x} - cxe^{-4x} + c'e^{-4x} ;$$

substituant cette valeur de $z$ ainsi que celles de $F(x)$ et de $q$ dans l'équation (473), il vient

$$y = \frac{c(1+x) - c'}{e^{4x}} + \frac{19}{36}e^{2x} - \frac{11}{25}e^x,$$

qui est la seconde des deux équations qu'on cherche.

466. Si $b$ et $m$ étant de signes contraires, on a $4bm > (a-n)^2$, alors les valeurs de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$ sont imaginaires [ équat. (468) ], ce qui rend aussi imaginaires les valeurs de $p'$ et de $p''$, ainsi que celles de $X''$ et de $\xi''$ [ équat. (469) ]. Mais la marche du calcul pour l'intégration reste la même que celle indiquée à l'article 464, si ce n'est qu'il faut substituer aux quantités exponentielles imaginaires, telles que $e^{\pm gx\sqrt{-1}}$, leurs valeurs trigonométriques $\cos gx \pm \sqrt{-1} \sin gx$. Par exemple, soit proposé d'intégrer simultanément le système des deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(2z+31y)dx+4dz+9dy=e^x dx\\ (z+24y)dx+3dz+7dy=3dx\end{array}\right\}\ldots\ldots(a).$$

On trouve à l'ordinaire, par le moyen des équations (466), (468) et (469), que $a=5$, $b=1$, $X'=7e^x-27$, $m=-2$, $n=3$, $\xi'=12-3e^x$, $\mathcal{C}'=1+\sqrt{-1}$, $\mathcal{C}''=1-\sqrt{-1}$, $p'=4+\sqrt{-1}$, $p''=4-\sqrt{-1}$, $X''=(4+7\sqrt{-1})e^x-3(5+9\sqrt{-1})$ et $\xi''=(4-7\sqrt{-1})e^x-3(5-9\sqrt{-1})$. Substituant ces quatre dernières valeurs dans les équations (470), on a celles

$$u'=e^{-4x}e^{-x\sqrt{-1}}[(4+7\sqrt{-1})\int e^{5x}e^{x\sqrt{-1}}dx$$
$$-3(5+9\sqrt{-1})\int e^{4x}e^{x\sqrt{-1}}dx+c]$$
$$u''=e^{-4x}e^{x\sqrt{-1}}[(4-7\sqrt{-1})\int e^{5x}e^{-x\sqrt{-1}}dx$$
$$-3(5-9\sqrt{-1})\int e^{4x}e^{-x\sqrt{-1}}dx+c'];$$

et passant des quantités exponentielles imaginaires $e^{\pm x\sqrt{-1}}$ aux binomes trigonométriques $\cos x \pm \sin x\sqrt{-1}$, il vient

$$u'=e^{-4x}(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)[(4+7\sqrt{-1})(\int e^{5x}\cos x dx$$
$$+\sqrt{-1}\int e^{5x}\sin x dx)-3(5+9\sqrt{-1})(\int e^{4x}\cos x dx$$
$$+\sqrt{-1}\int e^{4x}\sin x dx)+c]\ldots\ldots\ldots(b);$$
$$u''=e^{-4x}(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)[(4-7\sqrt{-1})(\int e^{5x}\cos x dx$$
$$-\sqrt{-1}\int e^{5x}\sin x dx)-3(5-9\sqrt{-1})(\int e^{4x}\cos x dx$$
$$-\sqrt{-1}\int e^{4x}\sin x dx)+c']\ldots\ldots\ldots(c).$$

Or, par le moyen des formules (274) et (272), (art. 309), on a

$$\int e^{5x}\cos x dx = \frac{e^{5x}(5\cos x + \sin x)}{26}$$

$$\int e^{4x}\cos x dx = \frac{e^{4x}(4\cos x + \sin x)}{17}$$

$$\int e^{5x}\sin x dx = \frac{e^{5x}(5\sin x - \cos x)}{26}$$

$$\int e^{4x}\sin x dx = \frac{e^{4x}(4\sin x - \cos x)}{17},$$

Substituant ces valeurs dans les équations ($b$) et ($c$), et ensuite les valeurs résultantes de $u'$ et de $u''$, ainsi que celle de $\beta'$ et $\beta''$ dans les équations (471), on aura les valeurs demandées de $y$ et de $z$. Nous ne poursuivrons pas ce calcul, qui n'offre plus de difficultés.

467 Si $DL = EK$, je dis que les deux équations (465) appartiennent à une seule surface courbe dont l'équation primitive est donnée par la combinaison des deux équations différentielles proposées (465), et que conséquemment le problème résolu dans les articles précédens, qui a pour but de trouver les équations des projections sur le plan des $xy$ et des $xz$ de l'intersection de deux surfaces courbes, devient impossible à résoudre dans ce cas-ci; en effet, de l'équation $DL = EK$, on tire $K = \frac{DL}{E}$; substituant cette valeur dans la seconde des équations (465), multipliant le résultat par E, et la première des équations (465) par L, on a les deux équations

$$L(Az + By)dx + L(Ddz + Edy) = LXdx$$
$$E(Hz + Iy)dx + L(Ddz + Edy) = E\xi dx;$$

d'où éliminant $L(Ddz + Edy)$ et divisant par $dx$,

il vient l'équation primitive d'une seule surface.

$$(LA - EH)z + (LB - EI)y = LX - E\xi.$$

468. Si DH = AK, ce qui donne $m = 0$, il est clair que les deux valeurs successives de $\mathcal{C}$ seront $\frac{a-n}{b}$ et 0 [ équat. (468) ]; ce qui donne $p' = a$, $p'' = n$, $X'' = \frac{a-n}{b}X' + \xi'$ et $\xi'' = \xi'$ [ 1re, 3me, 4me et 6me équations du groupe (469) ] et réduit les équations (470) à celles

$$\left.\begin{array}{l} u' = e^{-ax}(c + \int X'' e^{ax} dx) \\ u'' = e^{-nx}(c' + \int \xi' e^{nx} dx) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (475);$$

enfin les équations (471) se réduisent dans ce cas-là à celles

$$\left\{ y = u'' \text{ et } z = \frac{(u' - u'')b}{a - n} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (476).$$

469. Si BL = EI, d'où $b = 0$, alors l'équation (468) donne pour $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ des valeurs infinies; mais dans ce cas-là, remontant aux équations (467), la première de ces équations se réduit à celle

$$azdx + dz = X'dx,$$

qui, étant de la forme de l'équation (298), (art. 342), donne tout de suite, par le moyen de la formule (299),

$$z = e^{-ax}(c + \int X' e^{ax} dx) \ldots\ldots\ldots (477).$$

Représentant cette valeur de $z$ par $f(x)$, et la substituant dans la seconde équation du n° (467); on aura l'équation

$$nydx + dy = (\xi' - mf(x))dx,$$

qui étant de la même forme que celle (298), a pour

intégrale,

$$y = e^{-nx}\left[\, c' + \int(\xi' - mf(x))\, e^{nx} dx \,\right] \ldots\ldots (478).$$

Les cas de AL = EH, d'où $a = 0$, et de DI = BK, d'où $n = 0$ considérés séparément, ou même ensemble, n'offrent aucune circonstance essentiellement remarquable.

470. Proposons-nous maintenant d'intégrer simultanément le système des trois équations

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}z + \mathrm{B}y + \mathrm{C}t)dx + \mathrm{D}dz + \mathrm{E}dy + \mathrm{G}dt = \mathrm{X}dx \\ (\mathrm{H}z + \mathrm{I}y + \mathrm{K}t)dx + \mathrm{L}dz + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dt = \mathrm{X}'dx \\ (\mathrm{O}z + \mathrm{P}y + \mathrm{Q}t)dx + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dy + \mathrm{T}dt = \mathrm{X}''dx\end{array}\right\} \ldots (479);$$

dans lesquelles A....G, H....N, O....T sont des quantités constantes déterminées, et X, X′, X″, des fonctions quelconques de $x$.

Par le moyen des trois équations données, éliminant d'abord $dz$ et $dy$, ensuite $dz$ et $dt$, enfin $dy$ et $dt$, on a trois équations de la forme

$$\left.\begin{array}{l}(ay + bz + ct)\,dx + dt = \xi\, dx \\ (hy + iz + kt)\,dx + dy = \xi' dx \\ (my + nz + qt)\,dx + dz = \xi'' dx\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (480);$$

ainsi il ne s'agit que d'intégrer simultanément ce dernier système d'équations. Pour y parvenir, multiplions la seconde équation par $\beta$ et la troisième par $\omega$, ces deux facteurs étant constans, mais encore indéterminés; ajoutons ces deux produits à la première équation du groupe (480), et multiplions dans l'équation résultante, le coefficient de $dx$ dans le premier membre par $\dfrac{c + k\beta + q\omega}{c + k\beta + q\omega}$, ce qui nous donnera l'équation

$$(c + k\beta + q\omega)\left[t + \frac{b + i\beta + n\omega}{c + k\beta + q\omega} z + \frac{a + h\beta + n\omega}{c + k\beta + q\omega} y\right] dx$$
$$+ dt + \beta dy + \omega dz = [\xi + \beta\xi' + \omega\xi'']\, dx \ldots\ldots (a).$$

Faisons

$$\left\{ \omega = \frac{b + i\beta + n\omega}{c + k\beta + q\omega}, \quad \beta = \frac{a + h\beta + n\omega}{c + k\beta + q\omega} \right\} \ldots\ldots (b),$$

et $$t + \omega z + \beta y = u \ldots\ldots\ldots (c),$$

d'où $dt + \omega dz + \beta dy = du$, ce qui réduit l'équation ($a$) à celle

$$(c + k\beta + q\omega)\, u dx + du = [\xi + \beta\xi' + \omega\xi'']\, dx \ldots (d).$$

De la première des deux équations en ($b$), nous tirons celle

$$\beta = \frac{q\omega^2 + (c - n)\,\omega - b}{i - k\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots (e),$$

et substituant cette valeur de $\beta$ dans la seconde équation en ($b$), il en résultera, toutes réductions faites, une équation du troisième degré par rapport à $\omega$ qu'il seroit trop long d'écrire ici; donc résolvant cette dernière équation, nous aurons trois valeurs successives de $\omega$, que nous représenterons par $\omega'$, $\omega''$ et $\omega'''$, lesquelles successivement substituées dans l'équation ($e$), donneront aussi trois valeurs successives de $\beta$, que nous représenterons par $\beta'$, $\beta''$ et $\beta'''$. Substituant $\omega'$ et $\beta'$ dans l'équation ($d$), ensuite $\omega''$ et $\beta''$; enfin $\omega'''$ et $\beta'''$, nous aurons trois équations différentielles de la forme de celle (298) (art. 342) qui, par le moyen de la formule (299), donneront trois valeurs successives, $u'$, $u''$ et $u'''$ de $u$ en fonctions de $x$; et substituant successivement ces valeurs dans l'équation ($c$), ainsi que celles $\omega'$ et $\beta'$, $\omega''$ et $\beta''$, $\omega'''$ et $\beta'''$ qui leur correspondent respectivement, nous aurons trois équations primitives entre les quatre variables $t$, $x$, $y$, $z$, par le moyen desquelles, et suivant les règles ordinaires de l'élimination, nous trouverons les valeurs des trois variables $t$, $y$ et $z$ en fonctions de $x$, qui

satisfont simultanément aux trois équations proposées (479).

471. SCOLIE. Des méthodes dont nous nous sommes servi pour intégrer simultanément le système des deux équations (465) entre trois variables, ensuite le système des trois équations (478) entre quatre variables, on voit assez comment on doit s'y prendre pour intégrer simultanément un système d'un nombre quelconque $n$ d'équations différentielles du premier ordre entre $n+1$ variables, parmi lesquelles une seule varie uniformément, lorsque ces équations sont chacune composées, 1°. de la somme des premières puissances des $n$ variables, variant inuniformément, respectivement multipliées par des coefficiens constans et déterminés, multipliée par la différentielle de la variable variant uniformément. 2°. De la somme des différentielles des $n$ premières variables respectivement multipliées par des coefficiens constans et déterminés. 3°. D'une fonction quelconque de la variable variant uniformément, multipliée par la différentielle de cette variable. Passons maintenant aux intégrations simultanées des équations différentielles d'ordres supérieurs.

472. Proposons-nous d'abord de trouver les valeurs de $y$ et de $z$ en fonctions de $x$ qui satisfont simultanément aux deux équations différentielles du second ordre

$$\left.\begin{array}{l}(Ay+Bz)dx^2+(Cdy+Ddz)dx+Ed^2y+Hd^2z=Xdx^2\\(Ly+Kz)dx^2+(Ldy+Mdz)dx+Nd^2y+Od^2z=\xi dx^2\end{array}\right\}(481),$$

dans lesquelles A.. H, I... O sont des quantités constantes déterminées et X, $\xi$ des fonctions quelconques de $x$.

Faisant $\{ dy = udx \text{ et } dz = vdx \} \ldots\ldots\ldots (a)$;

substituant ces valeurs dans les équations (481), et divisant par $dx$, on a les deux transformées

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}y+\mathrm{B}z+\mathrm{C}u+\mathrm{D}v)dx+\mathrm{E}du+\mathrm{H}dv=\mathrm{X}dx\\(\mathrm{I}y+\mathrm{K}z+\mathrm{L}u+\mathrm{M}v)dx+\mathrm{N}du+\mathrm{O}dv=\xi dx\end{array}\right\}\ldots\ldots(b),$$

qui ne sont plus que du premier ordre. Eliminant successivement $du$ et $dv$ entre ces deux équations $(b)$, divisant par EO — HN, et faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l}a=\frac{\mathrm{EI-AN}}{\mathrm{EO-HN}}, b=\frac{\mathrm{EK-BN}}{\mathrm{EO-HN}}, g=\frac{\mathrm{EL-CN}}{\mathrm{EO-HN}}, h=\frac{\mathrm{EM-DN}}{\mathrm{EO-HN}}\\\mathrm{X}'=\frac{\mathrm{E}\xi-\mathrm{NX}}{\mathrm{EO-HN}}, i=\frac{\mathrm{AO-HI}}{\mathrm{EO-HN}}, k=\frac{\mathrm{BO-HK}}{\mathrm{EO-HN}}, l=\frac{\mathrm{CO-HL}}{\mathrm{EO-HN}}\\m=\frac{\mathrm{DO-HM}}{\mathrm{EO-HN}}, \text{ et } \xi'=\frac{\mathrm{OX}-\mathrm{H}\xi}{\mathrm{EO-HN}},\end{array}\right\}\ldots(c),$$

on a, compris les deux équations $(a)$, les quatre suivantes

$$\left.\begin{array}{l}(ay+bz+gu+hv)dx+dv=\mathrm{X}'dx\\(iy+kz+lu+mv)dx+du=\xi'dx\\dy-udx=0\\dz-vdx=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(d).$$

Multipliant la seconde de ces quatre équations par $\beta$, la troisième par $\omega$ et la quatrième par $\lambda$; ensuite ajoutant ces trois produits avec la première équation, et multipliant le facteur de $dx$ dans le premier membre de la résultante par $\frac{h+m\beta-\lambda}{h+m\beta-\lambda}$, on a l'équation

$$(h+m\beta-\lambda)\left[v+\frac{g+l\beta-\omega}{h+m\beta-\lambda}u+\frac{b+k\beta}{h+m\beta-\lambda}z\right.$$
$$\left.+\frac{a+i\beta}{h+m\beta-\lambda}y\right]dx+dv+\beta du+\lambda dz+\omega dy$$
$$=(\mathrm{X}'+\beta\xi')dx\ldots\ldots\ldots\ldots(e).$$

Faisant

$$\left\{ \mathcal{C} = \frac{g + l\mathcal{C} - \omega}{h + m\mathcal{C} - \lambda},\ \lambda = \frac{b + k\mathcal{C}}{h + m\mathcal{C} - \lambda} \text{ et } \omega = \frac{a + i\mathcal{C}}{h + m\mathcal{C} - \lambda} \right\} \ldots (f),$$

ensuite

$$t = v + \mathcal{C}u + \lambda z + \omega y \ldots\ldots (g),$$

d'où $\quad dt = dv + \mathcal{C}du + \lambda dz + \omega dy,$

l'équation $(e)$ se réduira à celle

$$(h + m\mathcal{C} - \lambda)\, tdx + dt = (X' + \mathcal{C}\xi')dx \ldots\ldots (h),$$

qui, étant de la même forme que l'équation (298) (art. 342), donnera d'après la formule (299), la valeur de $t$ en fonction de $x$, $\mathcal{C}$, $\lambda$ et la constante arbitraire $c$ : substituant cette valeur de $t$ dans l'équation $(g)$, il viendra

$$F(x, \mathcal{C}, \lambda, c) = v + \mathcal{C}u + \lambda z + \omega y \ldots\ldots (i).$$

Mais par le moyen des trois équations $(f)$ et suivant les règles de l'élimination, on parviendra à une équation du sixième degré par rapport à $\mathcal{C}$, ce qui donnera six valeurs de $\mathcal{C}$ en fonctions des constantes déterminées $a$, $b$... [équat. du groupe $(c)$]. Prenant parmi ces six valeurs les quatre qu'on jugera les plus convenables, telles que les réelles et commensurables, s'il y en a, et représentant ces quatre valeurs de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}'''$ et $\mathcal{C}^{\text{IV}}$, on en conclura quatre valeurs $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$, $\omega^{\text{IV}}$ et $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$, $\lambda^{\text{IV}}$ de $\omega$ et de $\lambda$ en fonctions des mêmes constantes $a$, $b$... Substituant $\mathcal{C}'$, $\omega'$ et $\lambda'$, ensuite $\mathcal{C}''$, $\omega''$ et $\lambda''$, puis $\mathcal{C}'''$, $\omega'''$ et $\lambda'''$, enfin $\mathcal{C}^{\text{IV}}$, $\omega^{\text{IV}}$ et $\lambda^{\text{IV}}$ dans l'équation $(i)$, on aura quatre équations entre les cinq variables $x$, $y$, $z$, $u$ et $v$ au moyen desquelles éliminant d'abord $z$, $u$ et $v$ ; ensuite $y$, $u$ et $v$, on aura les valeurs demandées de $y$ et de $z$ en fonctions de $x$.

Il paraît, d'après cette méthode, que les valeurs de $y$ et

de $z$ seraient affectées de la même constante arbitraire $c$, qui entre déjà dans l'équation ($i$), quoique ces valeurs doivent avoir des constantes arbitraires différentes $c$ et $c'$; mais comme il est présumable que dans les deux équations finales, ou que du moins dans l'une des deux il y a une combinaison de $c$ avec quelque constante déterminée, on pourra représenter cette combinaison par $c'$ dans l'une des deux équations, ce qui sera la constante arbitraire de cette intégrale, dans le temps que l'autre intégrale aura pour constante arbitraire la primitive $c$ de l'équation ($i$), ou sa combinaison avec quelque constante déterminée. Au reste, l'on pourrait, par le moyen des quatre équations entre $x$, $y$, $z$, $u$ et $v$, éliminer d'abord $y$, $z$, $v$, ensuite $y$, $z$, $u$, ce qui donnerait $u$ et $v$ en fonctions de $x$; après cela substituant ces valeurs dans les équations ($a$), et intégrant en ajoutant à la première intégrale la constante arbitraire $c$; et à la seconde, la constante arbitraire $c'$, on aurait les deux valeurs demandées de $y$ et de $z$.

473. Voici un autre système d'équations du second ordre entre trois variables.

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}y+\mathrm{B}z+\mathrm{D})dx^2+\mathrm{E}d^2y+\mathrm{H}d^2z=0\\(\mathrm{I}y+\mathrm{K}z+\mathrm{L})dx^2+\mathrm{M}d^2y+\mathrm{N}d^2z=0\end{array}\right\}\cdots(482),$$

beaucoup plus facile à intégrer que le précédent (481). En effet, éliminant entre les deux équations (482), $d^2z$ et $d^2y$, divisant les deux équations résultantes par MH — EN, et faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l}a=\dfrac{\mathrm{HI-AN}}{\mathrm{HM-EN}},\ b=\dfrac{\mathrm{HK-BN}}{\mathrm{HM-EN}},\ h=\dfrac{\mathrm{HL-DN}}{\mathrm{HM-EN}},\\m=\dfrac{\mathrm{AM-EI}}{\mathrm{HM-EN}},\ n=\dfrac{\mathrm{BM-EK}}{\mathrm{HM-EN}},\ q=\dfrac{\mathrm{DM-EL}}{\mathrm{HM-EN}},\end{array}\right\}\cdots(483),$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} (ay+bz+h)dx^2+d^2y=0 \\ \text{et } (my+nz+q)dx^2+d^2z=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(a).$$

Multipliant la seconde de ces équations par le facteur indéterminé $\mathcal{C}$; ajoutant le produit avec la première équation en $(a)$, et multipliant le facteur de $dx^2$ par $\frac{a+m\mathcal{C}}{a+m\mathcal{C}}$, on a

$$(a+m\mathcal{C})\left[y+\frac{b+n\mathcal{C}}{a+m\mathcal{C}}z+\frac{h+q\mathcal{C}}{a+m\mathcal{C}}\right]dx^2+d^2y+\mathcal{C}d^2z=0\ldots(b).$$

Faisant à cause de l'indéterminée $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}=\frac{b+n\mathcal{C}}{a+m\mathcal{C}}$, d'où

$$\mathcal{C}=\frac{n-a\pm\sqrt{4bm+(a-n)^2}}{2m}\ldots\ldots\ldots(484),$$

et posant

$$u=y+\mathcal{C}z+\frac{h+q\mathcal{C}}{a+m\mathcal{C}}\ldots\ldots\ldots\ldots(c),$$

d'où $d^2u=d^2y+\mathcal{C}d^2z$, l'équation $(b)$ se réduira à celle

$$(a+m\mathcal{C})\,udx^2+d^2u=0\ldots\ldots\ldots(d);$$

mais à cause du double signe qui précède le radical de l'équation (484), on a deux valeurs successives de $\mathcal{C}$, que je représente par $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, ce qui donne deux valeurs successives de $u$ dans l'équation $(c)$, que je représente par $u'$ et $u''$; donc l'équation $(d)$ donnera successivement celles

$$\left.\begin{array}{l} d^2u'=p'\,u'\,dx^2 \\ d^2u''=p''\,u''\,dx^2 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(e),$$

en faisant pour abréger

$$\{\,p'=-(a+m\mathcal{C}')\text{ et }p''=-(a+m\mathcal{C}'')\,\}\ldots(485).$$

Pour intégrer la première des deux équations en $(e)$, faisons $dx = vdu'$, ce qui donne $dx^2 = v^2 du'^2$ et $ddx = 0 = vddu' + dvdu'$, d'où $d^2u' = -\frac{dvdu'}{v}$; substituant ces valeurs dans l'équation que nous voulons intégrer, il vient $\frac{dv}{v^3} = -p'u'du'$, dont l'intégrale est

$$\frac{1}{v^2} = p'u'^2 \text{ d'où } v = \frac{1}{u'\sqrt{p'}};$$

et substituant cette valeur de $v$ dans l'équation $dx = vdu'$, on a celle $dx = \frac{du'}{u'\sqrt{p'}}$, dont l'intégrale est

$$x = \frac{1}{\sqrt{p'}}\, l\, \frac{u'}{c} \text{ ou } u' = ce^{x\sqrt{p'}} \ldots\ldots\ldots (f),$$

en représentant par $c$ une constante arbitraire.

Les deux équations en $(e)$ étant de formes identiques, il est clair qu'on aura aussi

$$u' = c'\, e^{x\sqrt{p''}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g),$$

en représentant par $c'$ une autre constante arbitraire.

Mais à cause des deux valeurs successives $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}$ et des correspondantes $u'$, $u''$ de $u$, l'équation $(c)$ donne successivement celles

$$\left\{ u' = y + \mathcal{C}'z + \mathrm{P}' \text{ et } u'' = y + \mathcal{C}z'' + \mathrm{P}'' \right\} \ldots\ldots (h),$$

en faisant pour abréger

$$\left\{ \mathrm{P}' = \frac{h + q\mathcal{C}'}{a + m\mathcal{C}'}, \text{ et } \mathrm{P}'' = \frac{h + q\mathcal{C}''}{a + m\mathcal{C}''} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (486).$$

Or, éliminant successivement $z$ et $y$ entre les deux quations $(h)$, on a celles

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\mathcal{E}'u'' - \mathcal{E}''u' + \mathcal{E}''P' - \mathcal{E}'P''}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}''} \\ z &= \frac{u' - u'' + P'' - P'}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (i),$$

et substituant dans ces deux dernières équations les valeurs de $u'$ et de $u''$ [équat. $(f)$ et $(g)$], il vient celles demandées

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\mathcal{E}' c' e^{x\sqrt{p''}} - \mathcal{E}'' c e^{x\sqrt{p'}} + \mathcal{E}''P' - \mathcal{E}'P''}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}''} \\ z &= \frac{c e^{x\sqrt{p'}} - c' e^{x\sqrt{p''}} + P'' - P'}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}''} \end{aligned}\right\} \ldots (487),$$

qui satisfont simultanément aux deux équations proposées (482).

Exemple. *Intégrer simultanément le système des deux équations*

$$\left.\begin{aligned} (59 - 17y - 88z)dx^2 + 8d^2y + 7d^2z &= 0 \\ (35 - 11y - 52z)dx^2 + 5d^2y + 4d^2z &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (k).$$

Comparant ces deux équations avec celles (482), on a $A = -17$, $B = -88$, $D = 59$, $E = 8$, $H = 7$, $I = -11$, $K = -52$, $L = 35$, $M = 5$, $N = 4$, ce qui donne d'après les équations du groupe (483)

$$a = -3,\ b = -4,\ h = 3,\ m = 1,\ n = -8,\ q = 5;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (484), il vient

$$\mathcal{E} = -\frac{5 \pm 3}{2} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}' = -1 \text{ et } \mathcal{E}'' = -4.$$

Les valeurs numériques de $a$, $m$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ substituées dans les équations (485), et les mêmes valeurs plus celles numériques de $h$ et de $q$ substituées dans les

équations

équations (486), donnent

$$p' = 4,\ p'' = 7,\ P' = \tfrac{1}{2} \text{ et } P'' = \tfrac{17}{7}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (487), on a celles

$$y = \frac{4ce^{2x} - c'e^{x\sqrt{7}}}{3} + \frac{1}{7} \text{ et } z = \frac{ce^{2x} - c'e^{x\sqrt{7}}}{3} + \frac{9}{14},$$

qui satisfont simultanément aux deux équations proposées ($k$).

474. Mais si les deux quantités $p'$ et $p''$, ou une seule d'elles est négative, alors les formules (487) ne donnent que des valeurs imaginaires de $y$ et de $z$; il faut donc recourir à quelqu'autre moyen pour trouver les intégrales simultanées des équations (482).

Les quantités $p'$ et $p''$ étant négatives, ce qui a lieu lorsque celles $a + m\mathcal{C}'$ et $a + m\mathcal{C}''$ sont positives, alors les deux équations ($e$) de l'article précédent, se changent en celles

$$\left\{ d^2u' = -p'u'dx^2 \text{ et } d^2u'' = -p''u''dx^2 \right\} \ldots\ldots (a),$$

dans lesquelles $p'$ et $p''$ représentent maintenant les quantités positives $a + m\mathcal{C}'$ et $a + m\mathcal{C}''$. Multipliant la première de ces équations par $du'$, on a

$$du'd(du') = -p'dx^2u'du' \ldots\ldots\ldots (b),$$

dont la première intégrale, en considérant $dx$ comme constante, est l'équation

$$du'^2 = -p'u'^2dx^2 + c^2dx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

dans laquelle $c^2$ représente une constante arbitraire : de cette équation on tire celle

$$dx = \frac{du'}{\sqrt{c^2 - p'u'^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

dont l'intégrale est l'équation

$$x = \frac{1}{\sqrt{p'}} \text{arc}\left(\sin = \frac{u'\sqrt{p'}}{c}\right) \ldots (e) \text{ [for. (134) art. 206]};$$

qui, à cause de la constante arbitraire $c$, peut se mettre sous la forme

$$x\sqrt{p'} = \text{arc}\left(\sin = \frac{u'}{c}\right),$$

d'où l'on tire

$$u' = c \sin(x\sqrt{p'}) \ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Opérant de même sur la seconde équation en $(a)$, il est clair qu'on aura

$$u'' = c' \sin(x\sqrt{p''}) \ldots\ldots\ldots\ldots (g),$$

et substituant ces valeurs dans les équations $(i)$ de l'article (473), il viendra

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\mathcal{C}' c' \sin(x\sqrt{p''}) - \mathcal{C}'' c \sin(x\sqrt{p'}) + \mathcal{C}''\mathrm{P}' - \mathcal{C}'\mathrm{P}''}{\mathcal{C}' - \mathcal{C}''} \\ z &= \frac{c \sin(x\sqrt{p'}) - c' \sin(x\sqrt{p''}) + \mathrm{P}'' - \mathrm{P}'}{\mathcal{C}' - \mathcal{C}''} \end{aligned}\right\} \ldots (488).$$

On voit assez les modifications qu'il faudrait faire éprouver à ces formules, si l'une seule des quantités $a + m\mathcal{C}'$, $a + m\mathcal{C}''$ était positive.

Remarque. En intégrant une première fois l'équation $(b)$, nous avons ajouté une constante arbitraire, mais en intégrant une seconde fois, c'est-à-dire en intégrant l'équation $(d)$, nous n'avons pas ajouté une seconde constante arbitraire, afin que les valeurs de $u'$ et de $u''$ introduites dans les équations $(i)$ de l'article (473), ne donnassent aux valeurs de $y$ et de $z$ que les deux constantes arbitraires $c$ et $c'$ qui sont les seules qu'elles doivent avoir, puisque les équations

finales qu'on veut obtenir, ne sont que les intégrales simultanées de deux équations différentielles (482) du second ordre. Mais si au lieu d'ajouter à la première intégrale la seule constante arbitraire que l'on veut avoir dans l'intégrale finale de l'équation ($b$), ou première équation en ($a$), on ne veut l'ajouter qu'à la seconde ; alors on n'aura plus pour première intégrale que

$$\sqrt{-p'}\,dx' = \frac{du'}{u'},$$

et pour seconde intégrale

$$x'\sqrt{p'}\sqrt{-1} = l\frac{u'}{c};$$

d'où l'on tire $u' = ce^{x\sqrt{p'}\sqrt{-1}}$.

Opérant de même sur la seconde équation en ($a$), on aura $u'' = c'e^{x\sqrt{p''}\sqrt{-1}}$, et substituant ces valeurs dans les équations ($i$) de l'article précédent, on aura

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\mathcal{C}'c'e^{x\sqrt{p''}\sqrt{-1}} - \mathcal{C}''ce^{x\sqrt{p'}\sqrt{-1}} + \mathcal{C}''\mathrm{P}' - \mathcal{C}'\mathrm{P}''}{\mathcal{C}' - \mathcal{C}''} \\ z &= \frac{ce^{x\sqrt{p'}\sqrt{-1}} - c'e^{x\sqrt{p''}\sqrt{-1}} + \mathrm{P}'' - \mathrm{P}'}{\mathcal{C}' - \mathcal{C}''} \end{aligned}\right\}\cdots(h),$$

qui sont précisément les mêmes équations que celles qu'on aurait déduites directement des équations (487), en y rendant négatives $p'$ et $p''$, comme on les a supposées au commencement de cet article ; mais il est aisé de voir que même en développant en fonctions trigonométriques les quantités exponentielles $e^{x\sqrt{p''}\sqrt{-1}}$, $e^{x\sqrt{p'}\sqrt{-1}}$, on ne pourra jamais ramener les équations ($h$) à des formes réelles de quelque manière qu'on dispose des constantes arbitraires $c$ et $c'$, pourvu que ce ne soit pas contradictoirement.

475. Si $m$ et $b$ sont de signes contraires, il peut arriver, 1° que les deux valeurs successives $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ de

$\mathcal{C}$ soient égales ; 2° qu'elles soient imaginaires ; or dans l'un et dans l'autre de ces deux cas, les formules (487) ou (488) ne peuvent plus servir, puisque dans le premier cas elles donnent des valeurs de grandeur infinie à $y$ et à $z$, et que dans le second cas elles ne donnent à ces variables que des valeurs imaginaires ; il faut donc chercher pour ces deux cas des formules d'intégrations simultanées qui soient réelles et significatives. Pour parvenir à ce but, soit fait

$$(a)\ldots r=\frac{n-a}{2m}\quad\text{et}\quad \omega=\frac{\sqrt{[4bm+(a-n)^2]}}{2m}\ldots(b),$$

ce qui donne

$$\{\mathcal{C}'=r+\omega\quad\text{et}\quad \mathcal{C}''=r-\omega\}\ldots\ldots\ldots\ldots(c).$$

Or, tant que $\omega$ n'est pas nul, les valeurs de $u'$ et de $u''$ en fonctions de $x$ déduites des intégrations des équations ($e$) de l'article 473, n'étant pas égales, on peut généralement poser les équations

$$\{\,u'=\mathrm{F}\,(x)+f(x)\quad\text{et}\quad u''=\mathrm{F}\,(x)-f\,(x)\,\}\ldots(d),$$

abstraction faite des signes qui précèdent $f\,(x)$, lesquels doivent toujours être contraires dans les deux équations ($d$), mais qui peuvent être placés en sens inverse de celui suivant lequel nous les avons mis, ce qui n'importe en rien à l'objet de nos recherches. De même les constantes P′ et P″ étant de valeur différente lorsque celles de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$ diffèrent, on peut généralement poser les équations

$$\{\,\mathrm{P}'=g+\lambda\quad\text{et}\quad P''=g-\lambda\,\}\ldots\ldots\ldots(e)\,;$$

pour lesquelles on fera la même observation relativement aux signes de $\lambda$, que celles que nous venons de faire pour les signes qui précèdent $f\,(x)$ dans les équations ($d$). Substituant ces valeurs [ équat. ($c$), ($d$), ($e$) ] dans

les équations ($i$) de l'article 473, on a

$$y = \mathrm{F}(x) - g - r\left[\frac{f(x) - \lambda}{\omega}\right] \quad \text{et } z = \frac{f(x) - \lambda}{\omega},$$

donc $\qquad y = \mathrm{F}(x) - g - rz \ldots\ldots (489).$

Mettant cette valeur de $y$ dans la seconde des deux équations en ($a$) de l'article 473, et faisant attention que $n - mr = \frac{a+n}{2}$ [ équat. ($a$) ], il vient l'équation linéaire du second ordre

$$d^2z + \tfrac{1}{2}(a+n)zdx^2 = [mg - q - m\mathrm{F}(x)]dx^2 \ldots (f),$$

qui, lorsque le second terme est positif, a d'après la formule (437), [art. 429], l'intégrale

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \sin\left(x\sqrt{\frac{a+n}{2}}\right)[c + \int(mg - q - m\mathrm{F}(x))\cos\left(x\sqrt{\frac{a+n}{2}}\right)dx] \\ + \cos\left(x\sqrt{\frac{a+n}{2}}\right)[c' - \int(mg - q - m\mathrm{F}(x))\sin\left(x\sqrt{\frac{a+n}{2}}\right)dx] \end{array}\right\}}{\sqrt{\left(\frac{a+n}{2}\right)}} \ldots (490).$$

Mais si le second terme de l'équation ($f$) est négatif, alors d'après les formules (428) et (429) [art. 424], l'intégrale de cette équation ($f$) est

$$z = \frac{\left\{\begin{array}{l} e^{\sqrt{\left(\frac{a+n}{2}\right)}x}[c + \int e^{-\sqrt{\left(\frac{a+n}{2}\right)}x}(mg - q - m\mathrm{F}(x))dx] - \\ e^{-\sqrt{\left(\frac{a+n}{2}\right)}x}[c' + \int e^{\sqrt{\left(\frac{a+n}{2}\right)}x}(mg - q - m\mathrm{F}(x))dx] \end{array}\right\}}{\sqrt{2(a+n)}} \ldots (491).$$

Substituant dans l'équation (489) la valeur de $z$ donnée par l'équation (490), ou par celle (491), suivant que $a + n$ est un nombre positif ou négatif, on aura la valeur de $y$ en fonction de $x$. Cette valeur, ainsi que celle de $z$ [ équat. (490) ou (491)] satisferont simulta-

nément aux deux équations (482), lorsque $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ seront des quantités réelles et différentes entre elles, ce qui est évident; mais dans ce cas-là, il vaut encore mieux se servir des formules d'intégration simultanée (487) ou (488), qui sont beaucoup plus simples. Il nous reste donc à examiner si les formules trouvées dans cet article, satisferont au cas de $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$ qui rend infinies les valeurs de $y$ et de $z$ données par les équations (487), c'est ce qui sera l'objet de nos recherches dans l'article suivant; et ensuite nous examinerons à l'article 477 si les mêmes formules peuvent servir lorsque $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont des quantités imaginaires.

476. Les formules trouvées dans l'article précédent, et qui donnent les valeurs de $z$, et par suite, celles de $y$ en fonction de $x$, ne sont pas indépendantes de la différence de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$, puisqu'elles sont affectées de $y$ et de F $(x)$ qui, elles-mêmes, renferment explicitement ou implicitement la demi-différence $\omega$ de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$. Examinons donc en premier lieu, ce que deviennent ces deux quantités, lorsque $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$. Or, ce cas-là donne $p' = p''$, d'où $u' = u'' = ce^{x\sqrt{p'}}$ [équat. $(f)$, art. 473] si $a + m\mathcal{C}'$ est un nombre négatif, et $= c \sin(x\sqrt{p'})$ [éq. $(f)$ art. 474] si $a + m\mathcal{C}'$ est un nombre positif; donc omettant la constante arbitraire $c$, parce qu'elle se trouve déjà dans les formules (490) et (491), on aura

$$\left\{ \mathrm{F}(x) = e^{x\sqrt{p'}} \text{ ou } \mathrm{F}(x) = \sin(x\sqrt{p'}) \right\} \ldots\ldots\ldots (492),$$

suivant que $a + m\mathcal{C}'$ est un nombre négatif ou positif. Ainsi l'on voit que lorsque $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$, F $(x)$ n'introduit dans les équations (489), (490) et (491), qu'une quantité significative et réelle; il en est de même pour $g$; en effet, remontant aux équations (486) et $(e)$ [art. 475], on a

$$\mathrm{P}' + \mathrm{P}'' = 2g = \frac{2ah + (aq + mh)(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') + 2mq\mathcal{C}'\mathcal{C}''}{a^2 + am + (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') + m^2\mathcal{C}'\mathcal{C}''} \ldots (a).$$

Mais $\mathcal{C}' + \mathcal{C}'' = 2r$ et $\mathcal{C}'\mathcal{C}'' = (r + \omega)(r - \omega) = r^2 - \omega^2$ [équat. $(c)$, art. 475] ; donc, substituant ces valeurs dans l'équation $(a)$, et divisant par 2, on aura celle

$$g = \frac{ah + (aq + mh)r + mq(r^2 - \omega^2)}{a^2 + 2amr + m^2(r^2 - \omega^2)} \ldots\ldots (493).$$

Or, si $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$, d'où $\omega = 0$, l'équation précédente se réduit à celle

$$g = \frac{4[ah + (aq + mh)r + mqr^2]}{(a + n)^2} \ldots\ldots\ldots (494),$$

dans lesquelles nous avons mis à la place de $(a + mr)^2$ sa valeur $\left(\frac{a + n}{2}\right)^2$ [équat. $(a)$, art. 475].

Ainsi cette valeur de $g$ n'introduit dans les équations (489), (490) et (491) qu'une quantité significative et réelle.

EXEMPLE. *Intégrer simultanément les deux équations*

$$\left.\begin{array}{l}(25y + 36z - 73)dx^2 - 11ddy - 8ddz = 0 \\ (16y + 23z - 46)dx^2 - 7ddy - 5ddz = 0\end{array}\right\} \ldots (b).$$

Comparant identiquement ces deux équations avec celles (482), et mettant les valeurs numériques de A, B... dans les équations (483), il vient

$$a = -3,\ b = -4,\ h = 3,\ m = 1,\ n = 1 \text{ et } q = 5.$$

Substituant les valeurs numériques de $a$, $b$, $m$ et $n$ dans l'équation (484), on a $\mathcal{C} = 2 \pm 0$, d'où $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'' = 2$ et $p' = p'' = 1$ [équat. 485], donc $F(x) = e^x$ [éq. (492)], et l'équat. $(a)$ (art. 475) donnant $r = 2$, on a $g = -13$ [équat. (494)]. Substituant ces valeurs de $g$, $F(x)$ et $r$ dans l'équation (489), il vient

$$y = e^x - 2z + 13 \ldots\ldots\ldots (c).$$

Or, $a+n=-3+1=-2$ étant une quantité négative, il faudra en la prenant positive, se servir de la formule (491), ce qui donnera

$$z=e^x\frac{[c-\int e^{-x}(18+e^x)dx-e^{-x}(c'-\int e^x(18+e^x)dx]}{2};$$

effectuant les intégrations, il vient

$$z=\frac{e^x}{2}(c-x+\tfrac{1}{2})-\frac{c'e^{-x}}{2}+18\ldots\ldots\ldots\ldots(d),$$

et substituant cette valeur de $z$ dans l'équation ($c$), on aura

$$y=e^x(\tfrac{1}{2}-c+x)+c'e^{-x}-23\ldots\ldots\ldots(e).$$

Il est aisé de vérifier que ces valeurs de $z$ et de $y$ [équat. ($d$) et ($e$)] satisfont simultanément aux deux proposées ($b$).

477. Examinons maintenant le cas où $b$ et $m$ étant de signes contraires, on a $4bm>(a-n)^2$, ce qui rendant les deux valeurs successives de $\mathcal{C}$ imaginaires dans l'équation (484), donnera

$$\mathcal{C}'=\frac{n-a}{2m}+\frac{\sqrt{(4bm-(a-n)^2)}\sqrt{-1}}{2m}$$

$$\text{et } \mathcal{C}''=\frac{n-a}{2m}-\frac{\sqrt{(4bm-(a-n)^2)}\sqrt{-1}}{2m}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (485) et faisant pour abréger

$$\left\{i=-\left(\frac{a+n}{2}\right)\text{ et } k=\tfrac{1}{2}\sqrt{4bm-(a-n)^2}\right\}\ldots(a),$$

on aura

$$\left\{p'=i-k\sqrt{-1}\text{ et } p''=i+k\sqrt{-1}\right\}\ldots(b).$$

Mais $\sqrt{[i \mp k\sqrt{-1}]} = \sqrt{\left[\frac{i+\sqrt{(k^2+i^2)}}{2}\right]}$

$$\mp\sqrt{\left[\frac{i-\sqrt{(k^2+i^2)}}{2}\right]} \text{(Alg. § 178)},$$

donc

$$\sqrt{p'} = \sqrt{\frac{i+\sqrt{(k^2+i^2)}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{(k^2+i^2)}-i}{2}}\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{p''} = \sqrt{\frac{i+\sqrt{(k^2+i^2)}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(k^2+i^2)}-i}{2}}\sqrt{-1},$$

ou mettant à la place de $i$ et de $k$ leurs valeurs respectives [équat. $(a)$], et faisant pour abréger

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\sqrt{(an+bm)} - \frac{1}{4}(a+n)} \\ \text{et } \delta = \sqrt{\sqrt{(an+bm)} + \frac{1}{4}(a+n)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (495),$$

on aura

$$\sqrt{p'} = \alpha - \delta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{p''} = \alpha + \delta\sqrt{-1};$$

et substituant ces valeurs dans les équations $(f)$ et $(g)$ de l'article (473), en omettant les constantes arbitraires $c$ et $c'$ qui se trouvent dans les formules (490) et (491), on aura

$$u' = e^{\alpha x} e^{-\delta x\sqrt{-1}} \quad \text{et } u' = e^{\alpha x} e^{\delta x\sqrt{-1}}.$$

Mais $u' + u'' = 2\,\mathrm{F}(x)$ [équat. $(d)$ art. 475]; donc

$$\mathrm{F}(x) = e^{\alpha x}\left[\frac{e^{\delta x\sqrt{-1}} + e^{-\delta x\sqrt{-1}}}{2}\right] = e^{\alpha x}\cos(\delta x) \text{ (496)}.$$

Ainsi lorsque $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont des quantités imaginaires, $\mathrm{F}(x)$ n'introduit dans les formules (490) et (491) qu'une quantité variable significative et réelle.

Dans le même cas de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ imaginaires, on a

$$\omega = \frac{\sqrt{[4bm-(a-n)^2]}\sqrt{-1}}{2m}:$$

d'où $r^2 - \omega^2 = r^2 + \frac{4bm - (a-n)^2}{4m^2}$, et mettant dans le second membre de cette équation la valeur de $r^2$ donnée par l'équation ($a$) de l'article (475), il vient

$$r^2 - \omega^2 = \frac{b}{m},$$

ce qui réduit l'équation (493) à celle

$$g = \frac{ah + (aq + mh)\,r + bq}{an + mb}.$$

Donc encore pour ce cas, $g$ n'introduit qu'une quantité significative et réelle dans les équations (490) et (491).

Scolie. Il suit de ce qui a été démontré dans ces trois derniers articles, que la méthode d'intégration simultanée des équations (482) enseignée à l'article (475) est générale à tous les cas possibles relativement aux valeurs réelles et inégales de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$, ou aux valeurs réelles et égales de ces mêmes quantités, ou enfin aux valeurs imaginaires de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$; mais que dans le premier de ces trois cas, il vaut mieux se servir de la méthode enseignée aux articles 473 et 474.

478. Si $m = 0$, c'est-à-dire, si AM = EI, alors, soit en opérant directement sur le second membre de l'équation (484), dans laquelle considérant $m$ comme variable, on cherche par la méthode enseignée à l'article 60, ce que devient $\mathcal{C}$ lorsque $m = 0$, soit plus simplement en remontant à l'équation d'où l'on a déduit celle (484) et qui, lorsque $m = 0$, est $\mathcal{C} = \frac{b + n\mathcal{C}}{a}$, d'où $\mathcal{C} = \frac{b}{a-n}$, on en conclura que $\mathcal{C}$ n'ayant qu'une

valeur, les méthodes d'intégrations simultanées enseignées dans les cinq articles précédens, ne peuvent plus servir, puisqu'elles posent sur l'hypothèse que $\mathcal{C}$ a deux valeurs successives. Mais dans ce cas de $m = 0$, il est aisé de voir que la seconde équation en $(a)$ de l'article 483 se réduisant à celle

$$nzdx^2 + d^2z = -qdx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

qui est de la forme de l'équation (436), son intégrale sera donnée par l'équation (437); substituant cette valeur de $z$ en fonction de $x$, que je représente par $\varphi(x)$, dans la première équation en $(a)$ de l'article 473, il viendra l'équation

$$aydx^2 + d^2y = -[h + b\varphi(x)]dx^2 \ldots\ldots (b)$$

qui est encore de la forme de l'équation (436), et dont par conséquent on pourra tirer la valeur de $y$ en fonctions de $x$ par le moyen de la formule (437); ainsi on aura de cette manière trouvé les valeurs de $y$ et de $z$ qui satisfont simultanément aux deux équations proposées

EXEMPLE. *Intégrer simultanément les deux équations*

$$\left.\begin{array}{l}(11y + 36z - 73)dx^2 - 11\,ddy - 8ddz = 0\\ (7y + 23z - 46)dx^2 - 7\,ddy - 5ddz = 0\end{array}\right\} \ldots (c).$$

Comparant ces deux équations avec celles (482) et calculant les valeurs de $a$, $b$... par le moyen des équations (483), on aura

$$a = -1,\ b = -4,\ h = 3,\ m = 0,\ n = 1 \text{ et } q = 5;$$

substituant ces valeurs dans l'équation $(a)$, à cause de $m = 0$, on a celle

$$zdx^2 + d^2z = -5dx^2,$$

dont l'intégrale est, d'après la formule (437),

$$z = \sin x\,(c - 5\int \cos x dx) + \cos x\,(c' + 5\int \sin x dx);$$

d'où $z = c \sin x - 5 \sin^2 x + c' \cos x - 5 \cos^2 x$, ou

$$z = c \sin x + c' \cos x - 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

Substituant cette valeur de $z$ ou $\varphi(x)$ dans l'équation $(b)$, il vient celle

$$d^2y - y dx^2 = [4c \sin x + 4c' \cos x - 23]\, dx^2,$$

d'où l'on tire par le moyen de la formule (437)

$$y = ce^x - c'e^{-x} - 2c \sin x - 2c' \cos x + 23 \ldots\ldots (e).$$

Il est aisé de vérifier que ces valeurs de $z$ et de $y$ [équat. $(d)$ et $(e)$] satisfont simultanément aux deux équations proposées $(c)$.

---

# CHAPITRE II.

*Intégration de certaines équations différentielles du premier ordre entre deux variables et séparées dont on obtient les intégrales algébriques, quoique la fonction différentielle de chacune de ces deux variables étant considérée isolément, ne puisse s'intégrer algébriquement, et que ces deux fonctions ne puissent s'intégrer en même temps par les logarithmes, ou par les arcs de cercle.*

479. Nous avons vu à l'article 355, (section II, chapitre III), qu'on peut intégrer algébriquement toute

équation séparée du premier ordre entre deux variables, dans laquelle la fonction différentielle de chacune de ces variables n'est pas algébriquement intégrable, lorsque les deux fonctions sont en même temps intégrables par les arcs de cercle, ou par les logarithmes ; telle est encore, outre les équations que nous avons données à l'article 355, celle

$$\frac{Adx}{mx^2+2nx+q}=\frac{Bdy}{ay^2+2by+e}\ldots\ldots\ldots\ldots(498).$$

Lorsqu'on a en même temps $mq < n^2$ et $ae < b^2$, ou que les deux inégalités $mq > n^2$ et $ae > b^2$ ont simultanément lieu, puisque dans le premier de ces cas, les deux membres de l'équation 498 sont intégrables par les logarithmes [art. 237 et 238], et que dans le second cas ils sont intégrables par les arcs de cercle [form. (180), art. 241].

Telle est encore l'équation

$$\frac{Adx}{\sqrt{(mx^2+2nx+q)}}=\frac{Bdy}{\sqrt{(ay^2+2by+e)}}\ldots\ldots(499);$$

dont chaque membre est intégrable par les logarithmes. (*Voyez* l'art. 249).

Mais l'équation séparée

$$\frac{dx}{\sqrt{[ax^4+bx^3+ex^2+hx+m]}}=\frac{dy}{\sqrt{[ay^4+by^3+ey^2+hy+m]}}\ldots(500),$$

à chacun de ces deux membres qui, considéré isolément, ne peut être exactement intégrable ni algébriquement, ni par les logarithmes, ni par les arcs de cercle, (*voyez* l'article 251); cependant nous allons voir que cette équation (500), a une intégrale algébrique.

Soit fait pour abréger, le dénominateur du premier membre de l'équation proposée $= \sqrt{\xi}$ et celui du second $= \sqrt{\gamma}$, ce qui donne

$$\frac{dx}{\sqrt{\xi}} = \frac{dy}{\sqrt{\gamma}} \ldots (a), \text{ d'où } \frac{dx^2}{\xi} = \frac{dy^2}{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Mais faisant $\frac{dx}{\sqrt{\xi}} = du$, d'où $\xi = \frac{dx^2}{du^2}$, on aura nécessairement d'après l'équation $(a)$, $\frac{dy}{\sqrt{\gamma}} = du$; d'où $\gamma = \frac{dy^2}{du^2}$; donc

$$\frac{dx^2 - dy^2}{du^2} = \xi - \gamma = a(x^4 - y^4) + b(x^3 - y^3) + e(x^2 - y^2)$$
$$+ h(x - y) = (x - y)[a(x^3 + y^3 + xy(x + y))$$
$$+ b(x^2 + y^2 + xy) + e(x + y) + h] \ldots\ldots (c).$$

Si actuellement nous faisons

$$\left\{ v = x - y \text{ et } z = x + y \text{ d'où } x = \frac{v + z}{2} \text{ et } y = \frac{z - v}{2} \right\} (d),$$

nous aurons $dv = dx - dy$ et $dz = dx + dy$, d'où

$$dvdz = dx^2 - dy^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e);$$

ensuite

$$\left\{ x^3 + y^3 = \frac{z^3 + 3v^2 z}{4},\ xy = \frac{z^2 - v^2}{4} \text{ et } x^2 + y^2 = \frac{v^2 + z^2}{2} \right\} \ldots (f).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(c)$, et divisant par $v$, nous aurons

$$\frac{dvdz}{vdu^2} = \frac{a}{2}(z^3 + v^2 z) + \frac{b}{4}(3z^2 + v^2) + ez + h \ldots (g).$$

Actuellement différentiant les équations $\xi = \frac{dx^2}{du^2}$, et

$\gamma = \frac{dy^2}{du^2}$ en considérant $u$ comme variant uniformément, et par conséquent traitant $du$ comme une quantité constante, il viendra

$$d\xi = \frac{2dxddx}{du^2} \quad \text{et} \quad d\gamma = \frac{2dyddy}{du^2}.$$

Mais $d\xi = (4ax^3 + 3bx^2 + 2ex + h)\,dx$ et $d\gamma = (4ay^3 + 3by^2 + 2ey + h)dy$; donc substituant ces deux valeurs dans les deux équations précédentes, divisant la première par $dx$ et la seconde par $dy$, il viendra les deux équations

$$\frac{2ddx}{du^2} = 4ax^3 + 3bx^2 + 2ex + h$$

$$\frac{2ddy}{du^2} = 4ay^3 + 3by^2 + 2ey + h;$$

dont la somme divisée par 2 est

$$\frac{ddx + ddy}{du^2} = 2a(x^3+y^3) + \tfrac{3}{2}b(x^2+y^2) + e(x+y) + h,$$

ou, à cause des équations $(f)$ et $(d)$,

$$\frac{ddx+ddy}{du^2} = \frac{a}{2}(z^3+3v^2z) + \frac{3b}{4}(z^2+v^2) + ez + h \ldots\ldots (h);$$

mais en différentiant l'équation $dz = dx + dy$, on a $d^2z = d^2x + d^2y$, donc

$$\frac{d^2z}{du^2} = \frac{a}{2}(z^3 + 3v^2z) + \frac{3b}{4}(z^2 + v^2) + ez - h,$$

et retranchant de cette dernière équation celle $(g)$, il vient l'équation

$$\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dvdz}{vdu^2} = av^2z + \frac{b}{2}v^2,$$

qui étant multipliée par $\frac{2dz}{v^2}$ donne l'équation

$$\frac{1}{du^2}\left[\frac{2dzd^2z}{v^2}-\frac{2dvdz^2}{v^3}\right]=2azdz+bdz\ldots\ldots(i),$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dz^2}{du^2v^2}=az^2+bz+c,$$

en représentant par $c$ la constante arbitraire, donc $\frac{dz}{du}=v\sqrt{az^2+bz+c}$ : mais $\frac{dz}{du}=\frac{dx}{du}+\frac{dy}{du}=\sqrt{\xi}+\sqrt{\gamma}$, $v=x-y$ et $z=x+y$, donc remettant les polynomes que représentent respectivement les symboles $\xi$ et $\gamma$, on aura entre $x$ et $y$ l'équation primitive et algébrique

$$\sqrt{(ax^4+bx^3+ex^2+hx+m)}+\sqrt{(ay^4+by^3+ey^2+hy+m)}=(x-y)\sqrt{a(x+y)^2+b(x+y)+c}\ldots(501),$$

qui est l'intégrale complète de l'équation (500).

Si l'un des membres de l'équation (500) est négatif, il n'y a d'autres changemens à faire à l'intégrale précédente (501), que celui de mettre le signe — à la place de celui + devant le second radical du premier membre. La méthode d'intégration dont nous venons de parler est due à Lagrange, et Euler ne fait qu'en donner un plus grand développement dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg pour l'année 1778.

480. Faisant successivement dans les équations (500) et (501) $a$, $b$, $e$, $h$, $m=0$, ensuite successivement $a$ et $b=0$, $a$ et $e=0$, et ainsi de suite pour les dix combinaisons des cinq lettres $a$, $b$, $e$, $h$, $m$ prises de deux à deux, on aura les intégrales algébriques de quinze équations séparées qui sont, en exceptant

exceptant celle provenant de $a = 0$ et $b = 0$ dans le cas de l'équation (500). Il serait trop long d'écrire ici ces quinze formules, mais la manière dont elles se déduisent de celles (500) et (501) étant extrêmement simple d'après ce que nous venons de dire, le lecteur fera bien d'en former une table pour son usage. Par exemple, considérant le cas où les deux coefficiens $a$ et $b$ sont en même temps égaux à zéro, il déduira des formules (500) et (501) celle

$$\int\left[\frac{dx}{\sqrt{(ex^2+hx+m)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(ey^2+hy+m)}} = 0\right]$$
$$= [\sqrt{(ex^2+hx+m)} \mp \sqrt{(ey^2+hy+m)} = c(x-y)] \ldots (a),$$

en représentant par $c$ la constante arbitraire, et il écrira d'une manière semblable les quatorze autres intégrales mentionnées ci-dessus. Enfin si le lecteur le desire, il pourra augmenter cette table de dix autres intégrales en faisant trois des cinq coefficiens $a$, $b$, $e$, $h$, $m$ égaux à zéro, ce qui donne dix combinaisons.

Remarque. L'intégrale ($a$) est plus simple que celle qu'on obtiendrait en intégrant séparément chacune des deux fonctions différentielles par la méthode enseignée à l'article 249; elle est même plus simple que celle qu'à trouvé Euler dans son Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Pétersbourg pour l'année 1778, en employant une méthode à peu près semblable à celle dont d'après ce célèbre Géomètre, nous nous sommes servi pour intégrer l'équation (500), mais qui en diffère un peu; car s'il s'était exactement servi de la méthode de l'article (479) il serait parvenu à un résultat aussi simple que celui ($a$). En effet, nous servant des mêmes symboles que précédemment,

et considérant toujours $u$ comme variant uniformément, nous aurons

$$\frac{dx^2 - dy^2}{du^2} = \xi - \gamma = e\,(x^2 - y^2) + h(x - y)\text{, ou}$$

$$\frac{dz dv}{v du^2} = ez + h \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Mais différentiant les équations $\frac{dx^2}{du^2} = \xi$ et $\frac{dy^2}{du^2} = \gamma$, divisant la différentielle de la première par $dx$ et la differentielle de la seconde par $dy$, ensuite ajoutant les deux équations résultantes ; enfin faisant attention qu'à cause de $\xi = ex^2 + hx + m$, et de $\gamma = ey^2 + hy + m$, on a $\frac{d\xi}{dx} = 2ex + h$ et $\frac{d\gamma}{dy} = 2ey + h$, nous aurons l'équation $\frac{d^2x + d^2y}{du^2} = e(x+y) + h$; qui, à cause de $z = x + y$, se change en celle $\frac{d^2z}{du^2} = ez + h$, et retranchant de cette dernière équation celle $(b)$, il viendra l'équation

$$\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz dv}{v du^2} = 0, \text{ ou } \frac{dz d^2z}{v^2 du^2} - \frac{dz^2 dv}{v^3 du^2} = 0,$$

dont l'intégrale est $\frac{dz^2}{v^2 du^2} = c^2$, d'où $\frac{dz}{du} = cv$, et par conséquent $\frac{dx}{du} + \frac{dy}{du} = cv$, ou $\sqrt{\xi} \mp \sqrt{\gamma} = c(x - y)$, ce qui est la même intégrale que celle $(a)$ trouvée précédemment.

481. La méthode qui nous a servi à intégrer algébriquement l'équation (500) [ art. 479 ], n'est pas générale pour toutes les équations de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{(ax^n + bx^{n-1} \ldots + q)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(ay^n + by^{n-1} \ldots + q)}} = 0,$$

car lorsque $n$ est $>4$, l'équation équivalente à celle ($i$) de l'article (479), a dans son second membre des termes affectés de la variable $v$; donc l'intégrale du premier membre étant $\frac{dz^2}{v^2du^2}$, le second membre où se trouvent les deux variables $z$, $v$ et la seule différentielle $dz$ ne pourra s'intégrer, et l'on ne parviendrait à faire disparaître dans le second membre les termes affectés de $v$, qu'en égalant à zéro les coefficiens des variables $x$ et $y$ élevées à des puissances $>4$.

Cependant de l'intégrale (501) de l'équation (500), ou du moins des deux intégrales qu'on en déduit en faisant d'abord $m=0$, ensuite $h$ et $m=0$ (art. 480), nous en déduirons, 1° l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{[Ax^6+Bx^4+Ex^2+H]}}\pm\frac{dy}{\sqrt{[Ay^6+By^4+Ey^2+H]}}=0 \quad (502);$$

2°. l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{x\sqrt{[Ax^{2n}+Bx^n+E]}}\pm\frac{dy}{y\sqrt{[Ay^{2n}+By^n+E]}}=0. \quad (503),$$

quelle que soit la valeur de $n$.

En effet, faisant pour la première de ces deux équations $x^2=X$ et $y^2=Y$, d'où $dx=\frac{dX}{2\sqrt{X}}$ et $dy=\frac{dY}{2\sqrt{Y}}$, l'équation (502) se transformera en celle

$$\frac{dX}{\sqrt{[AX^4+BX^3+EX^2+HX]}}\pm\frac{dY}{\sqrt{[AY^4+BY^3+EY^2+HY]}}=0 \quad (a)$$

qui est de la même forme que l'équation (500), en y faisant $m=0$, on aura donc

$$\int(502) = \{x\sqrt{[Ax^6 + Bx^4 + Ex^2 + H]}$$
$$\mp y\sqrt{[Ay^6 + By^4 + Ey^2 + H]}$$
$$= (x^2 - y^2)\sqrt{A(x^2-y^2)^2 + B(x^2-y^2) + c}\} \ldots (504).$$

Actuellement, pour intégrer l'équation (503), faisons

$$X = x^n \text{ et } Y = y^n, \text{ d'où } dx = \frac{1}{n} X^{\frac{1-n}{n}} dX$$

et
$$dy = \frac{1}{n} Y^{\frac{1-n}{n}} dY.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (503), nous aurons la transformée

$$\frac{dX}{X\sqrt{[AX^2 + BX + E]}} = \frac{dY}{Y\sqrt{[AY^2 + BY + E]}};$$

qui est de la forme de ce que devient l'équation (500) lorsqu'on fait en même temps $h = 0$ et $m = 0$; donc faisant dans l'équation (501), $h = 0$, $m = 0$, substituant respectivement aux lettres $a$, $b$, $e$ celles A, B, E, et aux variables $x$ et $y$ les quantités $x^n$ et $y^n$, on aura

$$\int(503) = \{x^n\sqrt{Ax^{2n} + Bx^n + E} \mp y^n\sqrt{Ay^{2n} + By^n + E}$$
$$= (x^n - y^n)\sqrt{A(x^n + y^n)^2 + B(x^n + y^n) + c}\} \ldots (505).$$

L'équation (503) que nous venons d'intégrer, et qui dans son espèce a une sorte de généralité, n'a été intégrée ni par Euler, dans le Mémoire cité plus haut, ni par aucun autre Géomètre, du moins que je sache.

# CHAPITRE III.

## *Des intégrales et solutions particulières des équations différentielles d'ordres supérieurs.*

482. Une équation différentielle d'un ordre quelconque $n$ étant absolument indépendante des valeurs que l'on peut donner aux $n$ constantes arbitraires $c'$, $c''$.... $c^{n'}$ qui entrent en partie ou en totalité dans les première, seconde... $n^{ième}$ intégrales de la proposée, il s'ensuit que cette équation différentielle de l'ordre $n$ peut avoir un nombre infini d'*intégrales particulières* (art. 374) de tout rang, depuis 1 jusqu'à $n$ qui est l'intégrale finale.

483. Outre ces intégrales particulières, il peut y avoir des équations différentielles de tous les ordres inférieurs à $n$, et une équation primitive entre les mêmes variables que la proposée, qui étant essentiellement distinctes des intégrales de tout rang qui leur correspondent par l'ordre de différentielle et d'intégrale finale, satisfont pourtant à la proposée; nous appellerons ces équations, comme nous l'avons fait au chap. VI de la seconde section, relativement aux équations différentielles du premier ordre, *solutions particulières* des équations différentielles d'ordres supérieurs. Nous nous proposons dans ce chapitre de trouver ces solutions particulières. Mais avant d'entrer en matière, il est à propos d'observer que représentant par $c'$, $c''$, ... $c^{n'}$,

un nombre $n$ de constantes arbitraires, les $n$ différentiations successives de l'intégrale finale

$$U = f(x, y, c', c'' \ldots c^{n'}) = 0 \ldots\ldots (a)$$

d'une équation différentielle de l'ordre $n$

$$d^n V = d^n F(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (b),$$

ne pourront reproduire cette dernière équation qu'en tant que l'intégrale finale ($a$) se présentera sous la forme

$$\varphi(x, y) + c' x^{n-1} + c'' x^{n-2} \ldots + c^{n'} = 0 \ldots\ldots (c);$$

en considérant $\varphi(x, y)$ comme une fonction rationnelle de $x$ et de $y$, ou si $\varphi(x, y)$ étant une fonction irrationnelle des variables $x$ et $y$, on différentie successivement $n$ fois de suite l'équation ($c$), sans commencer par la rendre rationnelle. Mais si $\varphi(x, y)$ étant irrationnelle on rend l'équation ($c$) rationnelle, ou si dans l'intégrale finale ($a$) de l'équation ($b$), les constantes arbitraires $c', c'', \ldots c^{n'}$ se combinent avec la variable $y$, ou se combinent de toute autre manière que dans l'équation ($c$) avec la seule variable $x$, alors par les $n$ différentiations successives de l'intégrale finale, il est clair que l'équation différentielle de l'ordre $n$ ainsi obtenue, contiendra en tout ou en partie les $n$ constantes arbitraires $c', c'' \ldots c^{n'}$, et par conséquent différera de la proposée $d^n V = 0$. Cependant les $n$ équations différentielles obtenues par les $n$ différentiations successives de l'intégrale finale $U = 0$, réunies avec cette dernière équation, serviront à reproduire la proposée ($b$), puisqu'entre les $n + 1$ équations

$$U = 0, \quad dU = 0, \quad d^2U = 0, \ldots d^nU = 0,$$

on pourra éliminer les $n$ quantités $c', c'', \ldots c^{n'}$, ce qui donnera pour résultat, et indépendamment des valeurs que l'on peut supposer à ces dernières quantités,

fussent-elles même variables, l'équation proposée $d^n V = 0$.

Passons maintenant aux recherches des solutions particulières de l'équation $d^n V = 0$.

484. Différentiant une première fois l'équation $U = 0$ par rapport à $x, y, c', c'', \ldots c^{n'}$, on aura l'équation

$$d^x U + d^y U + d^{c'} U + d^{c''} U \ldots + d^{c^{n'}} U = 0,$$

qui, en passant des différentielles partielles indiquées aux différentielles partielles effectuées, prend la forme

$$f^x(U)dx + f^y(U)dy + f^{c'}(U)dc' + f^{c''}(U)dc'' \ldots$$
$$\ldots + f^{c^{n'}}(U)dc^{n'} = 0,$$

(*voyez* l'art. 20, chap. III du Calcul différentiel). Or, si l'on fait dans cette équation

$$f^{c'}(U)dc' + f^{c''}(U)dc'' \ldots\ldots + f^{c^{n'}}(U)dc^{n'} = 0$$

ou $f^{c'}(U)\dfrac{dc'}{dc^{n'}} + f^{c''}(U)\dfrac{dc''}{dc^{n'}} \ldots + f^{c^{n'}}(U) = 0 \ldots\ldots (a')$,

elle se réduira à l'équation

$$f^y(U)\frac{dy}{dx} + f^x(U) = 0 \ldots\ldots\ldots (b'),$$

qui est précisément la différentielle première de l'équation $U = 0$, lorsqu'on y considère $c', c'' \ldots\ldots c^{n'}$ comme des constantes.

Actuellement représentant pour abréger par $dU$ le premier membre de l'équation $(b')$, et différentiant l'équation $dU = 0$ par rapport aux deux variables $y$, $x$ et aux lettres $c', c'', \ldots c^{n'}$, on aura l'équation

$$f^y(dU)dy + f^x(dU)dx + f^{c'}(dU)dc' + f^{c''}(dU)dc'' \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f^{c^{n'}}(dU)dc^{n'} = 0,$$

qui, en faisant

$$f^{c'}(dU)\frac{dc'}{dc^{n'}} + f^{c''}(dU)\frac{dc''}{dc^{n'}}\ldots + f^{c^{n'}}(dU) = 0 \ldots (a''),$$

se réduit à celle

$$f^{y}(dU)\frac{dy}{dx} + f^{x}(dU) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (b''),$$

qui évidemment est la différentielle $d^2U = 0$ de l'équation $U = 0$, lorsqu'on considère $c'$, $c''$....$c^{n'}$ comme des constantes.

On trouvera de même en différentiant l'équation $d^2U = 0$ par rapport aux deux variables et aux constantes, et faisant toute la partie de cette équation affectée des différentielles des constantes égale à zéro, les équations

$$f^{c'}(d^2U)\frac{dc'}{dc^{n'}} + f^{c''}(d^2U)\frac{dc''}{dc^{n'}}\ldots + f^{c^{n'}}(d^2U) = 0. (a''')$$

$$\text{et} \quad f^{y}(d^2U)\frac{dy}{dx} + f^{x}(d^2U) = 0 \ldots\ldots\ldots (b''') ,$$

dont la seconde n'est autre chose que la différentielle troisième de l'équation $U = 0$, en considérant $c'$, $c''$, ....$c^{n'}$ comme des constantes.

Continuant ce calcul jusqu'à la $n^{ième}$ différentiation, on parviendra enfin aux deux équations

$$f^{c'}(d^{n-1}U)\frac{dc'}{dc^{n'}} + f^{c''}(d^{n-1}U)\frac{dc''}{dc^{n'}}\ldots$$

$$\ldots + f^{c^{(n-1)'}}(d^{n-1}U)\frac{dc^{(n-1)'}}{dc'} + f^{c^{n'}}(d^{n-1}U) = 0 \ldots (a^{n'}),$$

$$\text{et} \quad f^{y}(d^{n-1}U)\frac{dy}{dx} + f^{x}(d^{n-1}U) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (b^{n'}),$$

dont la seconde est la différentielle de l'ordre $n$ de

l'équation $U=0$, en n'y considérant de variable que $x$ et $y$.

Or, il est aisé de voir qu'éliminant les $(n-1)$ quantités $\frac{dc'}{dc^{n'}}, \frac{dc''}{dc^{n'}}, \ldots \frac{dc^{(n-1)'}}{dc^{n'}}$ entre les $n$ équations $(a'), (a''), \ldots (a^{n'})$, on parviendra à une équation différentielle de l'ordre $n-1$, que je représente par $d^{n-1}W'=0$, qui ne sera plus affectée des différentielles $dc', dc'', \ldots dc^{n'}$ des constantes $c', c'' \ldots c^{n'}$ considérées comme variables, mais *pourra* encore être affectée de ces constantes arbitraires, et dans ce cas-là éliminant entre les $n+1$ équations

$$d^{n-1}W'=0, \quad d^{n-1}U=0, \quad d^{n-2}U=0, \ldots d^2U=0,$$

$dU=0$ et $U=0$ les $n$ constantes arbitraires, $c', c'', \ldots c^{n'}$, on parviendra à une équation différentielle de l'ordre $n-1$ que je représente par $d^{n-1}W=0$ qui, comme l'équation $d^nU=0$, ne renfermera plus de constantes arbitraires, et qui de plus satisfera par la différentiation, concurremment avec les équations

$$\int d^{n-1}W=0, \int^2 d^{n-1}W=0, \ldots \int^{n-2} d^{n-1}W=0 \text{ et } W=0(c),$$

à l'équation proposée $d^nU=0$, puisqu'elle a lieu ainsi que ses intégrales de tous les ordres $(c)$, en même temps que les équations $(b'), (b'') \ldots (b^{n'})$ qui sont les $n$ différentielles naturelles de l'intégrale finale $U=0$; donc l'équation $d^{n-1}W=0$ et celles $(c)$ qui en dérivent, sont les solutions particulières de l'équation $d^{n-1}U=0$. Or, nous observerons que l'équation $d^{n-1}W=0$, ne renfermant aucune constante arbitraire, son intégrale finale $W=0$ ne pourra en renfermer que $n-1$; d'où nous conclurons que *la solution particulière la plus étendue que puisse avoir une équation différentielle de*

*l'ordre* n, *ne saurait être exprimée par une équation primitive contenant plus de* n — 1 *constantes.*

485. Remarque I. Nous avons souligné dans l'article précédent le mot pourra, parce qu'il est possible que l'élimination de $\frac{dc'}{dc^{n'}}, \frac{dc''}{dc^{n'}}, \ldots \frac{dc^{(n-1)'}}{dc^{n'}}$ entre les équations $(a')$, $(a'')$, ... $(a^{n'})$ de l'article 484, conduise à une équation différentielle de l'ordre $n-1$ qui ne renfermera aucune des constantes arbitraires $c'$, $c''$,... $c^{n'}$; et puisqu'alors on aura $d^{n-1}W' = d^{n-1}W$, le calcul se trouvera abrégé de celui qu'il faut faire pour passer de $d^{n-1}W'$ à $d^{n-1}W$. Par exemple, l'équation

$$6y^2dx^2 - yx^2ddy - 6xydxdy + 2x^2dy^2 = 0 \ldots (B),$$

qui a pour intégrale complète

$$xy + c'x^3 + c''y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

est dans ce cas-là. En effet si l'on différentie d'abord l'équation (A) par rapport à $x$ et $y$ seulement, et ensuite par rapport à $c'$ et $c''$ seulement, on aura les deux équations

$$xdy + ydx + 3c'x^2dx + c''dy = 0 \ldots\ldots (B')$$

$$x^3\frac{dc'}{dc''} + y = 0 \ldots\ldots\ldots (A').$$

Différentiant l'équation (B') par rapport à $c'$ et $c''$, il viendra

$$3x^2dx\frac{dc'}{dc''} + dy = 0 \ldots\ldots (A''),$$

et éliminant $\frac{dc'}{dc''}$ entre les deux équations (A') et (A''), on a celle $\quad 3ydx = xdy \ldots\ldots (C),$

qui n'étant affectée d'aucune des deux constantes arbitraires $c'$ et $c''$, est l'équation que nous avons généralement représentée par $d^{n-1}W=0$. Intégrant l'équation (C), il vient

$$y = c_1 x^3 \ldots\ldots (D);$$

ainsi les équations (C) et (D) sont les solutions particulières de la proposée (B).

Si l'équation $d^{n-1}W'=0$ ne renfermait que $n-p$ constantes arbitraires, alors le passage de $d^{n-1}W'$ à $d^{n-1}W$ n'exigerait que l'élimination des $n-p$ constantes, par le moyen de l'équation $d^{n-1}W'=0$ et des $n-p$ équations $d^{n-1}U=0 \ldots d^{n-2}U=0 \ldots\ldots d^pU=0$.

486. Remarque II. Il peut encore arriver que les constantes arbitraires $c', c'' \ldots c^{n'}$ soient combinées dans l'équation $U=0$, de manière qu'en éliminant ces constantes et les quantités $\frac{dc'}{dc^{n'}}, \frac{dc''}{dc^{n'}}, \ldots \frac{dc^{(n-1)'}}{dc^{n'}}$ entre les équations $(a')$, $(a'')$, $\ldots (a^{n'})$, $(b')$, $(b'')$, $\ldots (b^{n'})$, on parvienne à une équation finale qui ne renferme plus les différentielles des variables $x$, $y$, et qui conséquemment sera la solution particulière finale de la proposée sans constantes arbitraires.

487. La méthode précédente pour trouver les solutions particulières de l'équation $d^nV=0$, exigeant que l'on connaisse déjà son intégrale finale qu'il est malheureusement très-difficile et quelquefois impossible d'obtenir par l'intégration, serait une bien faible ressource de l'analyse, si l'on ne pouvait par quelqu'autre moyen déduire directement de l'équation différentielle proposée ses solutions particulières; c'est la recherche de ces moyens qui va nous occuper dans cet article et les suivans (*).

(*) La méthode que nous allons faire connaître, et qui est extraite

Supposons que X représentant une fonction de $x$ et des constantes arbitraires $c'$, $c''$... dont le nombre n'excède pas $n$, on a $y = X$ qui satisfait à la proposée $d^n V = 0$. Représentons respectivement par $y'$ et $X'$ ce que deviennent $y$ et X lorsque considérant les seules lettres $c'$, $c''$...comme variables, la quantité X passe à l'état $X + d^{c'}X + d^{c''}X +$ etc. ; donc, représentant pour abréger, la différentielle $d^{c'}X + d^{c''}X +$ etc. de X par rapport à $c'$, $c''$... par $\delta X$, on aura $X' = X + \delta X$, ou pour plus de simplicité,

$$y' = y + \delta y, \text{ d'où } dy' = dy + d\delta y,\ d^2y' = d^2y + d^2\delta y,$$
$$\ldots\ldots\ldots d^n y' = d^n y + d^n \delta y.$$

Cela posé, mettant $y'$ à la place de $y$ dans l'équation $d^n V = 0$, et y substituant ensuite les valeurs précédentes de $y'$, $dy'$, $d^2y'$, ...$d^n y'$, il est clair qu'on aura dans le premier membre la somme de tous les termes non affectés de $\delta y$, qui sera ce qu'était $d^n V$ avant les substitutions en question ; et comme cette somme est nulle à cause de $d^n V = 0$, il ne restera que le polynome affecté de $\delta y$ ; et ne conservant dans le polynome restant que les termes dans lesquels l'ordre ou le degré des différentielles ne dépasse pas $n$, en considérant $\delta y$ comme une simple différentielle, ainsi que cela est réellement, puisque $\delta y = \delta X = d^{c'}X + d^{c''}X$ + etc., il ne restera que ce que l'on obtiendrait directement en différentiant $d^n V = 0$ par rapport à $y$ seul, mais en mettant à la place de la nouvelle ca-

---

d'un savant Mémoire de M. Legendre, imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1790, dépend en partie du calcul des variations, dont nous n'avons pas encore parlé ; mais la manière dont nous allons présenter la méthode en question, ne laissera voir au lecteur aucune trace d'un calcul qui lui est encore étranger.

ractéristique $d$ qu'introduit cette différentiation, celle $\delta$, et passant toujours $\delta$ immédiatement avant la variable $y$, lorsque par la différentiation elle se trouve en avant de la caractéristique $d$. On aura donc par ce calcul une équation de la forme

$$A\frac{d^n\delta y}{dx^n}+B\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}}\ldots\ldots+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\delta y=0..(506),$$

dans laquelle A, B,...P et Q sont des fonctions de $y$, $x$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{d^2x}$....; or, si A est une quantité différente de zéro, il est évident qu'en résolvant l'équation (506) par rapport à $\delta y$, la valeur de cette dernière quantité, ou, ce qui est la même chose, de $d^{c'}X+d^{c''}X+d^{c'''}X+$ etc., devra renfermer un nombre $n$ de constantes arbitraires, puisque $\delta y$ sera alors l'intégrale d'une équation différentielle de l'ordre $n$; on aura donc dans ce cas $y=X$, qui renfermant $n$ constantes arbitraires et satisfaisant à la proposée $d^nV=0$, en sera la solution complète et finale. Mais si dans l'équation (506), le premier terme seul ou la somme de quelques-uns des premiers termes s'évanouit, alors cette équation différentielle n'étant plus du $n^{ième}$ ordre, il est clair que son intégrale $\delta y=\delta X$ renfermera moins de $n$ constantes arbitraires; donc $y=X$, qui satisfait à l'équation $d^nV=0$, ne sera plus, d'après le principe démontré à l'article 484, qu'une solution particulière de la proposée.

488. Il est clair qu'en différentiant à l'ordinaire l'équation $d^nV=0$ par rapport à $y$, ses différentielles et $x$, le coefficient de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ sera le même que celui A de $\frac{d^n\delta y}{dx^n}$ dans l'équation (506), puisque ce coefficient

est indépendant des nouvelles différentiations des fonctions de $x$ dans la différentiation de $d^n V = 0$, et que la caractéristique $d$ que l'on met dans cette dernière opération à la place de celle $\delta$ qu'on à employée à l'article 487, ne peut influer sur sa valeur ; on aura donc

$$d^{n+1}V = A\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \ldots (a).$$

Mais lorsque l'équation proposée $d^n V = 0$ a des solutions particulières, on a $A = 0$, ce qui réduit l'équation $(a)$ à celle $F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$; donc alors on a l'équation

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{0}{0} \ldots\ldots\ldots\ldots (507),$$

qui conséquemment est le caractère des solutions particulières.

489. Quelle que soit l'équation $d^n V = 0$ entre les deux variables $x$ et $y$, il est clair qu'en faisant $x$ égale à une constante quelconque on $y$ satisfera, puisqu'on aura alors $y$ qui sera aussi égale à une constante, et que conséquemment, ayant simultanément $dx = 0$, et les différentielles de tous les ordres jusqu'à celui $n$ de $y$ égales à zéro, la proposée se réduira à l'identité $0 = 0$. D'après cela, nous prévenons que dans nos recherches sur les solutions particulières, nous ne regarderons plus comme telles que les équations entre les deux variables $x$ et $y$ qui satisfaisant à la proposée, différeront essentiellement de l'intégrale finale de l'équation.

490. L'introduction de la caractéristique $\delta$ dans la différentiation de l'équation $d^n V = 0$ par rapport à

$y$ et ses différentielles de tous les ordres jusqu'à celui $n$, nous devenant inutiles pour déterminer les relations qui doivent exister entre $x$ et $y$, afin de faire évanouir le coefficient A de $\frac{d^n \delta y}{dx^n}$ dans l'équation (506), ou de $\frac{d^{n+1}y}{dx^n}$, en différentiant à l'ordinaire $d^n V$ par rapport à $y$ et ses différentielles, nous prévenons que dans les applications que nous allons faire des théories précédentes, nous ne nous servirons pas de la caractéristique $\delta$.

EXEMPLE I. *Trouver les solutions particulières de l'équation différentielle du premier ordre*

$$x + \frac{ydy}{dx} - \frac{dy}{dx}\sqrt{y^2 + x^2 - a^2} = 0 \ldots\ldots (a).$$

Différentiant cette équation par rapport à $y$ et $dy$ seulement, ensuite chassant le dénominateur, on a

$$(y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2})\sqrt{y^2 + x^2 - a^2}\,\frac{ddy}{dx}$$
$$= (y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2})\frac{dy^2}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Egalant le coefficient de $\frac{ddy}{dx}$ à zéro, on a l'équation

$$(y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2})\sqrt{y^2 + x^2 - a^2} = 0,$$

à laquelle on ne peut satisfaire qn'en faisant $y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2} = 0$, d'où $x = \pm a$, résultat que nous devons rejeter (art. 489), ou en faisant

$$y^2 + x^2 - a^2 = 0, \text{ d'où } y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, cette dernière équation satisfaisant à la proposée ($a$), nous en conclurons qu'elle en est la solution particulière. Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés à l'article 383, où ce même exemple a été traité par une méthode différente et particulière aux équations différentielles du premier ordre, et où nous n'étions pas encore convenu de ne pas regarder comme solution particulière les équations de la forme $x = \text{const.}$

Différentiant l'équation ($a$) par rapport à $y$, $x$ et $dy$, il serait venu celle

$$(y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2})\sqrt{y^2 + x^2 - a^2}\,\frac{ddy}{dx^2}$$

$$= (y - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2})\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{xdy}{dx} - \sqrt{y^2 + x^2 - a^2} \ldots (c).$$

Or, faisant $y^2 + x^2 - a^2 = 0$ pour que le coefficient de $\frac{ddy}{dx^2}$ s'évanouisse, on a $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, d'où

$$\frac{ydy^2}{dx^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ et } \frac{xdy}{dx} = -\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ($c$), on a

$$0 \times \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2 - x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0},$$

ce qui est, comme nous l'avons démontré à l'article (488), le caractère des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

Exemple II. *Trouver les solutions particulières des équations*

$$(d^2y)^2 + 4xdx^2d^2y - 4dydx^3 = 0 \ldots\ldots (d).$$

Ecrivant cette équation sous la forme

$$(d^2y + 2xdx^2)^2 = 4(x^2dx^4 + dydx^3),$$

et

et prenant la racine carrée des deux membres, on a l'équation

$$d^2y + 2xdx^2 = 2dx\sqrt{x^2dx^2 + dydx} \ldots\ldots\ldots\ldots (e),$$

qui différentiée par rapport à $d^2y$ et $dy$, donne

$$\sqrt{x^2 + \frac{dy}{dx}}\ \frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx},$$

et faisant le coefficient de $\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, on a $dy = -x^2dx$, d'où $y = -\frac{x^3}{3} + c$, ou plus simplement à cause de l'arbitraire de $c$, on a l'équation

$$y = \frac{c - x^3}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (f),$$

qui satisfait à la proposée, et qui conséquemment en est une solution particulière.

491. Les solutions particulières des équations différentielles d'un ordre quelconque, ne sont pas toujours les solutions particulières des différentielles de l'équation proposée, ou de ses intégrales de tous les ordres, puisque pour que cela eût lieu, il faudrait que toutes les équations, telles que celles $(a')$, $(a'')$.... de l'article 484, eussent lieu simultanément. Ainsi $y = \xi$ étant l'intégrale finale de l'équation $d^2V = 0$, et $dy = d\xi$ l'une de ses premières integrales, ces deux dernières équations ne pourront avoir une même solution particulière $y = X$, qu'en tant qu'on aura simultanément $d^{c'}y = 0$ et $d^{c'}d\xi = 0$. Par exemple, faisant dans l'équation $(e)$ de l'article précédent, $dy = zdx$, d'où $ddy = dzdx$, on a la transformée $dz + 2xdx = 2dx\sqrt{x^2 + z}$, d'où $dx = \frac{dz + 2xdx}{2\sqrt{x^2 + z}}$, et intégrant

il vient $x = \sqrt{x^2 + z} + c'$, d'où $c'^2 - 2c'x = z$, et par conséquent

$$dy = c'^2 dx - 2c'x dx \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

ce qui est une première intégrale de l'équation ($d$) de l'article précédent, et l'intégrant, il vient pour intégrale finale l'équation

$$y = c'^2 x - c'x^2 + c'' \ldots\ldots\ldots\ldots (b);$$

donc $\xi$ étant $= c'^2 x - c'x^2 + c''$ et $d\xi = (c'^2 - 2c'x)dx$, l'équation $d^{c'}\xi = 0$ donne $2c' - x = 0$; d'où $c' = \frac{x}{2}$, et l'équation $d^{c'}d\xi = 0$ donne $2c' - 2x = 0$, d'où $c' = x$; donc ces deux valeurs de $c'$ n'étant pas identiques, il s'ensuit que la solution particulière ($f$) [art. 490], n'est pas la solution particulière de la première intégrale ($a$) de l'équation ($d$) [art. 490].

Mais si à cause de l'arbitraire de la constante $c''$ nous la faisons $= \frac{c - c'^3}{3}$, en représentant par $c$ une autre constante arbitraire, l'équation ($b$) se changera en celle

$$3y - c = 3c'^2 x - 3c'x^2 - c'^3 \ldots\ldots\ldots (c);$$

ou ajoutant de part et d'autre $x^3$, ce qui rend le second membre $= (x - c')^3$, prenant la racine cubique des deux membres et transposant $c'$, on aura l'équation

$$x = c' + \sqrt[3]{(3y + x^3 - c)} \ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

qui est évidemment la même intégrale finale de l'équation ($d$) [art. 490] que celle ($b$), mais mise sous une forme différente qui ne la rend plus comme l'équation ($b$), la solution complète de la proposée ($d$) de

l'article 490, [*voyez* l'art. 389). Différentiant l'équation $(d)$, on a

$$dy = [(3y + x^3 - c)^{\frac{2}{3}} - x^2]dx \ldots\ldots (e),$$

qui est une seconde première intégrale de l'équation $(d)$ [art 490], et qui a la même première solution particulière $(f)$[art. 490] que l'équation $(d)$[art. 490], ce qu'on trouve à *priori* en faisant la quantité radicale de l'équation $(e) = 0$ [art. 383], et dans ce cas-ci il est aisé de voir que l'équation de condition

$$dx d^{c'}\xi = d^{c'} d\xi = 0,$$

afin que l'équation $(d)$[art. 490], et sa première intégrale $(e)$ aient une même solution particulière, est satisfaite; puisque l'équation $(c)$, qui est l'intégrale finale de celle $(d)$ [art. 490], donnant

$$\xi = 3c'^2 x - 3c'x^2 - c'^3, \text{ d'où } d\xi = (3c'^2 - 6c'x)dx,$$

on aura

$$\frac{d^{c'}\xi}{dc'} = 6c'x - 3x^2 - 3c'^2 = 0, \text{ d'où } c'^2 - 2c'x + x^2 = 0$$

et par conséquent $c' = x$, et que de même on aura

$$\frac{d^{c'}d\xi}{dx dc'} = 6c' - 6x = 0, \text{ d'où } c' = x.$$

492. On peut par des procédés semblables aux précédens, trouver les solutions particulières et simultanées d'un système de $m$ équations entre $m+1$ variables $x$, $y$, $z$... et d'un ordre quelconque $n$, en supposant toujours que l'une des variables $x$ varie uniformément. En effet, considérant les constantes $c'$, $c''$... des valeurs de $y$, $z$... dans les intégrales finales des équations proposées, comme variant elles-mêmes, et représentant respectivement par $y + \delta y$, $z + \delta z$.... ce que deviennent les valeurs de $y$, $z$...lorsque les

constantes arbitraires ont varié ; ensuite substituant dans les $m$ équations proposées les quantités $y + \delta y$, $z + \delta z$... à la place de $y$, $z$..., et retranchant de chacune des $m$ équations résultantes, celle qui lui correspond parmi les $m$ équations données, il est clair qu'on aura encore $m$ équations qui, évidemment, ne seront que ce qu'on aurait obtenu immédiatement en différentiant chacune des équations proposées par rapport aux variables $y$, $z$...et leurs différentielles de tous les ordres jusqu'à celui $n$ inclusivement, en mettant la caractéristique $\delta$ à la place de la nouvelle $d$ qu'on aurait introduite, et en ayant seulement l'attention dans cette différentiation, de placer la lettre $\delta$ immédiatement avant la variable ; on aura donc par ce moyen un nombre $m$ d'équations affectées des différentielles de l'ordre $n$ et des ordres inférieurs de $\delta y$, $\delta z$, etc. Multipliant la seconde de ces équations par un facteur indéterminé $\theta'$, la troisième par un autre facteur indéterminé $\theta''$, et enfin la $m^{ième}$ équation étant multipliée par le facteur indéterminé $\theta^{(m-1)'}$, et ajoutant ces $m$ équations, on n'en aura plus qu'une qui renfermera les quantités $d^n\delta y, d^n\delta z$... Or, si les termes affectés de ces dernières quantités ne s'évanouissaient pas, il est clair qu'alors en résolvant successivement cette équation par rapport à $\delta y$, $\delta z$...les valeurs de ces quantités, et de suite celles de $y$, $z$...(art. 487), auraient $n$ constantes arbitraires ; donc ces valeurs de $y$, $z$... ne seraient plus des solutions particulières (art. 484). Il faut conséquemment rendre nuls les coefficiens de $d^n\delta y$, $d^n\delta z$..., ce qui donnera un nombre $m$ d'équations entre les $m-1$ indéterminées $\theta'$, $\theta''$...$\theta^{(m-1)'}$ par le moyen desquelles on éliminera ces $m-1$ indéterminées, ce qui donnera $m-1$ équations entre les coefficiens qu'avaient $d^n\delta y$, $d^n\delta z$... avant l'introduction des facteurs indéter-

minés. Combinant ces équations de condition qui doivent avoir lieu en même temps que les proposées, avec ces $m$ dernières équations, on pourra éliminer les quantités $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \ldots \frac{dy}{dx}, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}, \ldots \frac{dz}{dx}$ etc. ce qui donnera une équation primitive qui sera une solution particulière, et d'où l'on pourra en conclure d'autres par la différentiation et des substitutions, ensuite l'intégration.

Soient, par exemple, proposées les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(y^2 - 2ax)dy - a^2dz + 2aydx = 0 \\ zdy^2 + ydzdy + 2adzdx = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Différentiant ces équations par rapport à $y$, $dy$, $z$ et $dz$ en conservant pour plus de simplicité la caractéristique $d$ à la place de celle $\delta$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}(y^2 - 2ax)ddy - a^2ddz + \text{etc.} = 0 \\ (2zdy + ydz)ddy + (ydy + 2adx)ddz + \text{etc.} = 0\end{array}\right\} \ldots (b).$$

Multipliant la seconde équation par $\theta'$ et ajoutant le produit avec la première équation en $(b)$, on a

$$\begin{array}{c}[(y^2 - 2ax) + \theta'(2zdy + ydz)]ddy \\ + [\theta'(ydy + 2adx) - a^2]ddz + \text{etc.} = 0;\end{array}$$

et puisque les termes affectés de $ddy$ et de $ddz$ doivent s'évanouir, on aura les deux équations

$$\begin{array}{c}y^2 - 2ax + \theta'(2zdy + ydz) = 0, \\ \theta'(ydy + 2adx) - a^2 = 0;\end{array}$$

et éliminant $\theta'$, il viendra

$$(y^2 - 2ax)(ydy + 2adx) + a^2(2zdy + ydz) = 0.$$

Divisant cette équation et les deux proposées en $(a)$ par $dx$, et éliminant entre les trois équations résul-

tantes les quantités $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on aura l'équation

$$yz - x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

d'où $z = \frac{x^2}{y}$ et $dz = \frac{2xdx}{y} - \frac{x^2dy}{y^2}$. Substituant ces valeurs dans les deux équations proposées ($a$), on tirera également de l'une et de l'autre l'équation

$$(y^2 - ax)dy + 2aydx = 0,$$

qui étant divisée par $y^{\frac{3}{2}}$, donne l'équation

$$y^{\frac{1}{2}}dy - \left[\frac{axdy}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{2adx}{y^{\frac{1}{2}}}\right] = 0,$$

qui étant intégrée (art. 323), donne complètement

$$y^2 + 3ax = c\sqrt{y} \ldots\ldots\ldots (d).$$

Ainsi les équations ($c$) et ($d$) sont les solutions particulières des équations proposées ($a$).

---

# CHAPITRE IV.

## *De l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.*

493. Les équations aux différentielles ordinaires dont nous nous sommes occupé jusqu'à présent, donnaient une relation entre les différentielles des variables indépendantes $x$, $y$... et celle de la fonction inconnue $z$ de ces variables. Mais les équations dont nous allons nous occuper, ne donnent que la relation des différentielles partielles de la variable principale $z$ par rapport à celles $x, y$... dont elle est fonction, et il faudra

par le moyen de ces équations, trouver la valeur de $z$. c'est en cela que consiste la résolution ou intégration des équations aux différentielles partielles.

Nous regarderons une pareille équation comme résolue, lorsque nous l'aurons ramenée à ce que sa solution ne dépende plus que de l'intégration d'une équation aux différentielles ordinaires.

494. Avant d'entrer en matière, nous rappellerons à nos lecteurs que représentant par $z$ une fonction de $x$, $y$, $s$....., nous appelons différentielles partielles indiquées, les quantités $d^x z$, $d^y z$, $d^s z$.... et différentielles partielles effectuées, celles $f^x z dx$, $f^y z dy$, $f^s z ds$... (art. 20). De même, lorsque nous voudrons indiquer la différentielle partielle de $z$ par rapport à deux, trois...variables, telles que $xy$, $xys$..., nous écrirons $d^x d^y z$, $d^x d^y d^s z$... ou plus simplement $d^{xy} z$, $d^{xys} z$...Mais nous avons vu aux articles 54, 75 et 76, que quel que soit l'ordre des différentiations partielles, le résultat est toujours le même, donc $d^{xy} z = d^{yx} z$; de même $d^{xys} z = d^{xsy} z = d^{sxy} z = d^{yxs} z = d^{ysx} z = d^{syx} z$, et enfin généralement on pourra écrire dans les différentiations partielles de $z$ par rapport à un nombre quelconque de variables $x$, $y$, $s$..., ces dernières variables dans un ordre quelconque.

De même $d^x z$ étant égal à $f^x z dx$, nous aurons $\frac{d^x z}{dx} = f^x z$, et si nous différentions cette équation par rapport à $y$, nous aurons $d^y \frac{d^x z}{dx} = d^y f^x z = f^y (f^x z) dy$ ou $\frac{d^{yx} z}{dydx}, = f^y (f^x z)$ ce que nous écrirons de la manière suivante $\frac{d^{yx} z}{dydx} = f^{yx} z$; et de même $\frac{d^{yxs\ldots} z}{dydxds\ldots} = f^{yxs\ldots} z$;

ainsi $f^x z$ représente ce que devient la fonction variable $z$ de $x$, $y$, $s$..., lorsqu'après l'avoir différentiée partiellement par rapport à $x$, on a divisé cette différentielle par $dx$; de meme $f^{xy}z$ représente ce que devient $z$ lorsqu'après l'avoir différentiée partiellement par rapport à $x$ et $y$, on a divisé cette differentielle par $dxdy$; enfin généralement $f^{xys\cdots}z$ est ce que devient $z$ lorsqu'après l'avoir différentiée par rapport à $x$, $y$, $s$....., on a ensuite divisé la différentielle par $dxdyds$...

Il faut faire attention que ces différentiations partielles faites à la suite les unes des autres, fussent-elles en même nombre que celui des variables $x$, $y$, $s$... dont $z$ est fonction, ne donneraient pas la différentielle de $z$, qui se compose de la somme des différentielles partielles de $z$, par rapport à toutes les variables secondaires $x$, $y$, $s$...; par exemple, $z$ étant fonction de $x$ et de $y$, on a $dz = d^x z + d^y z = f^x z dx + f^y z dy$, quantité qui est différente de celle $d^{xy}z = f^{xy}z dx dy$, laquelle n'est que la différentielle partielle, par rapport à $x$ de la différentielle de $z$ par rapport à $y$, ou l'inverse, puisque $d^{xy}z = d^{yx}z$.

De même, pour indiquer l'intégration partielle d'une fonction différentielle ($x$, $y$, $s$...$dx$, $dy$, $ds$...) par rapport à une seule partie des variables, par exemple $x$ et $y$, nous écrirons $\int^x \int^y (x, y, s \ldots dx, dy, ds \ldots)$, ou plus simplement $\int^{xy}(x, y, s \ldots dx, dy, ds \ldots)$, et puisque $d^{xy}z = d^{yx}z$, il est clair que $\int^{xy} dz = \int^{yx} dz$, et généralement quel que soit l'ordre des intégrations partielles, le résultat est toujours le même. Il suit de cette notation que si $z$ n'est, par exemple, fonction que des trois variables $x$, $y$, $s$ la quantité $\int^{xys} dz$ est $= \int dz = z$.

495. Une équation aux différentielles partielles est de l'ordre représenté par le plus grand nombre de différen-

tielles partielles indiquées de la fonction $z$ des variables $s, u, v, x \ldots$ Ainsi un des termes de l'équation proposée étant, par exemple, affecté de la quantité $\frac{d^{ms} d^{ny} d^x z}{ds^m dy^n dx}$ ou $\frac{d^{(ms)(ny)(x)} z}{ds^m dy^n dx}$, cette équation aux différentielles partielles sera de l'ordre $m + n + 1$, puisque $d^{ms}$, $d^{ny}$ et $d^x$ indiquent respectivement les differentielles partielles du $m^{ième}$, du $n^{ième}$ et du premier ordre de la fonction $z$, en y considérant d'abord seulement $s$, ensuite $y$, enfin $x$ comme variable.

496. Nous ne nous occuperons dans ce chapitre que des équations différentielles partielles du premier ordre, et nous allons commencer par celles à trois variables dont la forme la plus générale est

$$\left\{ A \frac{d^x z}{dx} + B \frac{d^y z}{dy} = D \text{ ou } A f^x z + B f^y z = D \right\} \ldots (508);$$

dans laquelle $z$ est la fonction inconnue et cherchée des variables $x$ et $y$, et $A$, $B$, $D$ des fonctions quelconques des variables $z$, $x$ et $y$.

Si l'on fait dans cette équation (508) $A = 0$, alors elle se réduit à celle

$$d^y z = \frac{D}{B} dy \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

laquelle ne considérant que $y$ et $z$ comme variables, peut s'écrire sous la forme

$$dz = \frac{D}{B} dy \ldots\ldots\ldots (b),$$

et résolvant cette équation par les méthodes ordinaires d'intégration, on aura celle

$$z = F(x, y) + \varphi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

dans laquelle $x$ sous le lien de F s'y trouve placé comme pourrait s'y trouver toute autre quantité constante contenue dans $\frac{D}{B}$, et $\phi(x)$ représente une fonction arbitraire de $x$ (*) qui disparaîtrait si pour revenir à l'équation ($b$) ou ($a$), on différentiait celle ($c$) par rapport à $y$ et $z$.

Le cas où l'on ferait $B = 0$ dans l'équation (508), présente évidemment des circonstances semblables par rapport aux variables $x$ et $y$ prises en sens inverse.

Le cas de $D = 0$ rentre dans le cas général que nous allons examiner, et en est un corollaire.

497. Considérant maintenant l'équation (508) dans toute sa généralité, et éliminant entre cette équation et celle

$$dz = d^x z + d^y z \ldots\ldots\ldots\ldots (a);$$

la différentielle partielle $d^x z$, on a l'équation

$$(Ady - Bdx)\,\frac{d^y z}{dy} = Adz - Ddx \ldots\ldots (509),$$

dans laquelle $\frac{d^y z}{dy}$ où $d^y z$ est encore une quantité indéterminée.

Si entre l'équation (508) et celle ($a$) on élimine $d^y z$ à la place de $d^x z$, on aura l'équation

$$(Ady - Bdx)\,\frac{d^x z}{dx} = Ddy - Bdz \ldots\ldots\ldots\ldots (510),$$

(*) Nous prévenons que dorénavant nous nous servirons de la lettre F seule ou accentuée, ou avec un indice quelconque, pour caractéristique des fonctions déterminées, et que nous emploîrons la lettre $\phi$ ou $\Phi$, seule ou avec les mêmes accessoires que les précédens relativement à F, pour caractéristique des fonctions arbitraires.

dont on pourra se servir préférablement à celle (509), si les calculs que nous allons indiquer relativement à cette dernière équation, s'effectuent plus aisément en opérant sur l'équation (51c).

Ainsi, considérant seulement l'équation (509), nous rappellerons que d'après ce qui a été démontré à l'article 360, il existe toujours un facteur $\theta$, fonction de $x$ et de $y$, dont le produit par le binome $Ady - Bdx$, dans lequel on ne regarde comme variables que $x$ et $y$, sera exactement intégrable par rapport à ces deux variables. De même, ne considérant comme variables que $x$ et $z$ dans le binome $Adz - Ddx$, il existe un facteur $\theta''$ fonction de $x$ et de $z$, dont le produit par ce binome est exactement intégrable par rapport à $x$ et $z$; on aura donc les deux équations

$$\int^{yx}\theta\,(Ady - Bdx) = \mathrm{F}\,(x,y,z)\ldots\ldots\ldots(b),$$

et $$\int^{xz}\theta''(Adz - Ddx) = \mathrm{F}''(x,y,z)\ldots\ldots\ldots(c),$$

en observant que $z$ ne se trouve sous le lien de F dans l'équation ($b$) que comme constante, et comme pourrait s'y trouver toute autre constante $a$, $b$.... contenue dans $A$ et $B$, et qu'il en est de même pour $y$ dans la seconde équation ($c$).

Faisant pour abréger

$$(d)\ldots\ldots U = \mathrm{F}(x,y,z) \quad \text{et} \quad V = \mathrm{F}''(x,y,z)\ldots\ldots(e),$$

on aura les deux équations

$$\int^{yx}(Ady - Bdx) = U \quad \text{et} \quad \int^{xz}\theta''(Adz - Ddx) = V,$$

qui différentiées par rapport aux trois variables $x, y$ et $z$ donneront celles

$$\left.\begin{array}{l}\theta\,(Ady - Bdx) + d^z U = dU\\ \text{et}\quad \theta''(Adz - Ddx) + d^y V = dV\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(f).$$

Multipliant la première de ces deux équations par

$\frac{d^y z}{\theta dy}$, et divisant la seconde par $\theta''$, on aura celle

$$(Ady - Bdx)\frac{d^y z}{dy} = \frac{d^y z}{\theta dy}dU - \frac{d^y z}{\theta dy}d^z U$$

et $$Adz - Ddx = \frac{dV}{\theta''} - \frac{d^y V}{\theta''}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (509), et isolant $dV$ dans le premier membre ; il viendra l'équation

$$dV = \frac{\theta''}{\theta}\frac{d^y z}{dy}dU - \frac{\theta''}{\theta}\frac{d^y z}{dy}d^z U + d^y U \ldots\ldots\ldots\ldots (g).$$

Il peut arriver deux cas, 1°. que $A$ n'étant fonction que de $x$, $B$ ne le soit que de $x$ et de $y$, et que $D$ ne contienne pas la variable $y$. 2°. Que $A$, $B$ et $D$ soient indistinctement fonctions des trois variables $x$, $y$ et $z$. Or, je dis que dans l'un et l'autre cas $V$ sera également fonction de $U$. En effet, dans le prémier cas, $U$ ne sera fonction que de $x$ et de $y$ [équat. ($b$) et ($d$)], et $V$ ne contiendra que les deux variables $x$ et $z$ [éq. ($c$) et ($e$)], on aura donc $d^z U = 0$ et $d^y U = 0$, ce qui réduira l'équation ($g$) à celle

$$dV = \frac{\theta''}{\theta}\frac{d^y z}{dy}dU \ldots (h),$$

qui, à cause que $dV$ est une différentielle exacte, ne peut évidemment avoir lieu qu'en tant que le coefficient de $dU$ est fonction de $U$; donc l'équation ($h$) se réduira à celle $dV = \varphi'(U)dU$, d'où par l'intégration on tirera

$$V = \varphi(U) \ldots\ldots (511).$$

De même dans le second cas, prenant l'équation ($g$) dans toute sa généralité, et substituant seulement aux différentielles partielles indiquées $d^z U$ et $d^y U$ les diffé-

rentielles partielles effectuées $f^z U dz$ et $f^y U dy$ ; il est clair que le second membre de l'équation ($g$) ne renfermant que les différentielles $dU$, $dz$ et $dy$, le premier membre $dV$ qui est une différentielle exacte, se composera de la somme des différentielles partielles exactes $d^U V + d^z V + d^y V$; ainsi substituant ce trinome à la place de $dV$ dans l'équation ($g$), et effaçant de part et d'autre $d^y V$, on aura

$$d^U V + d^z V = \frac{\theta''}{\theta} \frac{d^y z}{dy} dU - \frac{\theta''}{\theta} \frac{d^y z}{dy} d^z U \ldots\ldots\ldots (i).$$

Or, puisque $dV$ est une différentielle exacte, il s'ensuit que la différentielle partielle de $V$ par rapport à $U$, ne peut avoir lieu qu'en tant que $V$ est fonction de $U$, ce qui est exprimé par l'équation (511) qui, conséquemment, a lieu dans les deux cas que nous avons examinés.

L'équation ($i$) nous apprend aussi que $V$ est toujours fonction de $z$, et peut ne pas l'être de $x$ et de $y$, puisque $dV$ étant une différentielle exacte, sa différentielle partielle par rapport à $z$, ne peut avoir lieu qu'en tant que $V = \Phi(z)$, et puisque cette équation n'est pas affectée des termes $d^x V$ et $d^y V$, la quantité V peut n'être pas fonction de $x$ et de $y$.

Il est à propos d'observer que quoique les quantités représentées par $U$ et $V$ soient des fonctions de variables, cependant elles sont toutes deux égales à des quantités constantes. Car si $U$ et $V$ étaient respectivement égales aux deux quantités variables $u$ et $v$, on aurait les équations

$$Ady - Bdx = \frac{du}{\theta} \quad \text{et} \quad Adz - Ddx = \frac{dv}{\theta''}$$

$$\text{d'où} \quad A = \frac{Bdx}{dy} + \frac{du}{\theta dy} \ldots (k) \text{ et } A = \frac{Ddx}{dz} + \frac{dv}{\theta'' dz}.$$

Egalant ces deux valeurs de $A$, et prenant dans l'équation résultante la valeur de $D$, il vient

$$D = \frac{Bdz}{dy} + \frac{dudz}{\theta dydx} - \frac{dv}{\theta'' dx} :$$

substituant cette valeur de $D$ ainsi que celle de $A$ [équat. ($k$)], dans l'équation (508), on a celle

$$\left(B\frac{dx}{dy} + \frac{du}{\theta dy}\right)\frac{d^x z}{dx} + B\frac{d^y z}{dy} = B\frac{dz}{dy} + \frac{dudz}{\theta dydx} - \frac{dv}{\theta'' du},$$

qui ne peut se réduire à la vraie équation

$$d^x z + d^y z = dz$$

qu'en faisant simultanément $du = 0$ et $dv = 0$, donc $u$ et $v$, et par conséquent $U$ et $V$ ne pouvant etre que des quantités constantes, nous ferons

$$\{U = a \quad \text{et} \quad V = b\} \ldots\ldots (512).$$

De ces équations, ainsi que de celles ($f$) on déduira les équations

$$\left.\begin{aligned} Ady - Bdx &= -\frac{d^z U}{\theta} \\ \text{et} \quad Adz - Ddx &= -\frac{d^y V}{\theta''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (l).$$

Mais à cause qu'on intègre $\theta(Ady - Bdx)$, en y considérant $z$ comme constante, et qu'on intègre $\theta''(Adz - Ddx)$ en prenant $y$ constante, il s'ensuit qu'il faudrait faire pour la première intégration $d^z U = 0$, et pour la seconde $d^y V = 0$; ainsi relativement aux intégrations qu'on veut effectuer pour avoir $U$ et $V$, il faudra poser les équations

(513)....$Ady - Bdx = 0$, $Adz - Ddx = 0$....(514),

ou $\qquad Ddy - Bdz = 0 \ldots\ldots (515)$

suivant que l'équation (514) est plus aisée à intégrer par rapport à $z$ et $x$, que celle (515) par rapport à $y$ et $z$, ou l'inverse.

Ayant par le moyen de l'intégration de l'équation (513), multipliée par un facteur convenable $\theta$, l'équation $F(x,y,z) = U = a$, on en tirera $y = F_1(x,z,a)$ ou $x = F_2(y,z,a)$, suivant que la seconde équation qu'on voudra intégrer sera celle (514), ou celle (515); on substituera cette valeur de $y$ ou de $x$ dans la seconde équation choisie, et après l'avoir multipliée par un facteur convenable $\theta'''$, on l'intégrera pour avoir la valeur de $V$; et substituant ces valeurs de $U$ et de $V$ dans l'équation (511), on aura l'intégrale demandée de la proposée (508).

Si l'équation qu'on intègre est dans le premier cas que nous avons examiné, c'est-à-dire, si $A$ est seulement fonction de $x$, que $B$ le soit seulement de $y$, et qu'enfin $D$ ne soit fonction que de $x$ et de $z$, alors le calcul se simplifie, puisque les intégrations des équations

$$\theta\,(Ady - Bdx) = 0 \quad \text{et} \quad \theta''\,(Adz - Ddx) = 0\,;$$

donnant respectivement $U = F_3(x,z)$, et $V = F_4(x,z)$ on a tout de suite par le moyen de l'équation (511) celle $F_4(x,z) = \varphi[F_3(x,y)]$

Ce que nous venons de dire relativement aux équations (513) et (514), a son analogue pour les équations (513) et (515), si $B$ n'étant fonction que de $y$, $A$ n'est fonction que de $y$ et de $x$, et $D$ n'est fonction que de $y$ et de $z$.

Exemple I. *Intégrer l'équation*

$$xf^x z + yf^y z = nz.$$

Comparant identiquement cette équation avec celle (508), on a $A = x$, $B = y$ et $D = nz$; ainsi

la proposée est dans le premier cas examiné précédemment. Substituant ces valeurs dans les équations (513) et (514), on a celles $xdy - ydx = 0$ et $xdz - nzdx = 0$. Le facteur intégrant de la première équation est $\frac{1}{x^2}$, celui de la seconde est $\frac{1}{xz}$; ainsi on a $U = \int \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{y}{x}$ et $\int \frac{dz}{z} - n\int \frac{dx}{x} = 0$, d'où $lz - lx^n = lb$, et par conséquent $b = \frac{z}{x^n}$, mais $V = b$ [équat. (512)], donc $V = \frac{z}{x^n}$, et substituant ces valeurs dans l'équation (511), il vient celle

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

qui est la solution de la proposée.

EXEMPLE II. *Intégrer l'équation*

$$xyf^y z - x^2 f^x z = y^2.$$

Nous avons $A = -x^2$, $B = xy$ et $D = y^2$, ce qui donne $x^2dy + xydx = 0$ et $x^2dz + y^2dx = 0$ [équat. (513) et (514)]. Le facteur intégrant de la première de ces équations est $\frac{1}{x^2y}$; celui de la seconde par rapport à $x$ et $z$ est $\frac{1}{x^2}$; on a donc à intégrer les équations $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$, et $dz + \frac{y^2dx}{x^2} = 0 \ldots (a)$; la première donne $lxy = la$, d'où $xy = a = U$. De cette dernière équation on tire $y = \frac{a}{x}$; substituant cette valeur dans l'équation $(a)$, il vient $dz + \frac{a^2dx}{x^4} = 0$; d'où $z - \frac{a^2}{3x^3} = b = V$; et remettant

remettant dans cette dernière équation la valeur de $a = x$, on a $z - \frac{y^2}{3x} = V$; or $V = \varphi(U)$, donc

$$z = \frac{y^2}{3x} + \Phi(xy),$$

ce qui est l'intégrale de la proposée.

498. Les équations aux différentielles partielles du premier ordre (508) dans lesquelles $A$ n'est fonction que de $x$, et $B$ et $D$ sont fonctions de la seule variable $y$, pourraient s'intégrer par la méthode enseignée dans l'article précédent; mais elles s'intègrent bien plus élégamment et plus facilement par la méthode suivante qu'on trouve, dans quelques ouvrages, traitée d'une manière qui, suivant moi, est incomplète et insuffisante; car ce que les auteurs de ces ouvrages (*voyez* entre autres les élémens du Calcul différentiel et intégral de Lacroix, art. 315) indiquent pour le reste de l'opération à faire dans les applications de la méthode, offre de grandes difficultés et longueurs de calcul que j'ai entièrement fait disparaître dans ma formule finale (517).

Soit $A f^x z = \omega$, d'où $D - B f^y z = \omega$; de ces équations on tire celles $f^x z = \frac{\omega}{A}$ et $f^y z = \frac{D - \omega}{B}$. Mais $dz = f^x z dx + f^y z dy$; donc

$$dz = \frac{\omega}{A} dx + \frac{D - \omega}{B} dy \ldots\ldots (a).$$

Faisant maintenant

$$\left[ {}^{\omega}\!\int \frac{dx}{A} = M \quad \text{et} \quad \int \frac{D}{B} dy - {}^{\omega}\!\int \frac{dy}{B} = N \right] \ldots (b),$$

différentiant la première de ces équations par rap-

port à $x$, et la seconde par rapport à $y$, il vient

$$\left\{\frac{\omega dx}{A}=\mathrm{f}^{x}Mdx \quad \text{et} \quad \frac{D}{B}dy-\frac{\omega dy}{B}=\mathrm{f}^{y}Ndy\right\}\ldots\ldots(c).$$

Mais $M$ étant fonction de $x$ et de $\omega$, et $N$ étant fonction de $y$ et de $\omega$, on a $\mathrm{f}^{x}Mdx=dM-\mathrm{f}^{\omega}Md\omega$ et $\mathrm{f}^{y}Ndy=dN-\mathrm{f}^{\omega}Nd\omega$. Substituant ces valeurs dans les équations $(c)$, il vient $\frac{\omega dx}{A}=dM-\mathrm{f}^{\omega}Md\omega$, et $\frac{D}{B}dy-\frac{\omega dy}{B}=dN-\mathrm{f}^{\omega}Nd\omega$; enfin mettant ces valeurs dans l'équation $(a)$, on a celle

$$dz=dM+dN-[\mathrm{f}^{\omega}M+\mathrm{f}^{\omega}N]d\omega\ldots\ldots(d),$$

qui, évidemment, ne peut être exactement intégrable qu'en tant qu'on fera

$$\mathrm{f}^{\omega}M+\mathrm{f}^{\omega}N=\varphi'(\omega)\ldots\ldots(e);$$

et alors intégrant l'équation $(d)$, on aura

$$z=M+N-\varphi(\omega)\ldots\ldots(f).$$

Pour éliminer $\omega$ de cette équation, soit fait $\varphi(\omega)=\omega^{m}$, en représentant par $m$ une quantité indéterminée, ce qui donne $\omega^{m}=\int\varphi'(\omega)d\omega$,

d'où $$\varphi'(\omega)=m\omega^{m-1}\ldots\ldots(g).$$

Mais les équations $(b)$ donnent celles

$$\mathrm{f}^{\omega}M=\int\frac{dx}{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{f}^{\omega}N=-\int\frac{dy}{B},$$

donc $A$ étant par hypothèse fonction de $x$, et $B$ fonction de $y$, on aura

$\mathrm{f}^{\omega}M=X$ et $\mathrm{f}^{\omega}N=-Y$, d'où $\varphi'(\omega)=X-Y$ [éq. $(e)$],

en faisant

$$\left\{X=\int\frac{dx}{A} \quad \text{et} \quad Y=\int\frac{dy}{B}\right\}\ldots\ldots(516).$$

Substituant dans l'équation ($g$), la valeur que nous venons de trouver à $\phi'(\omega)$ il viendra celle

$$\omega=\sqrt[m-1]{\frac{X-Y}{m}}:$$

cette valeur de $\omega$, ainsi que celles de $\int\frac{dx}{A}$ et de $\int\frac{dy}{B}$ [équat. (516)] étant substituées dans les équations ($b$), on aura

$$M=X\sqrt[m-1]{\frac{X-Y}{m}} \text{ et } N=\int\frac{Ddy}{B}-Y\sqrt[m-1]{\frac{X-Y}{m}}:$$

d'où $\quad M+N=\sqrt[m-1]{\frac{(X-Y)^m}{m}}+\int\frac{Ddy}{B}:$

Enfin mettant cette valeur ainsi que celle de $\varphi\ (\omega)$ $=\omega^m=\sqrt[m-1]{\left(\frac{X-Y}{m}\right)^m}$ dans l'équation ($f$), il viendra celle

$$z=\int\frac{Ddy}{B}+\sqrt[m-1]{(X-Y)^m}\left(\frac{1}{\sqrt[m-1]{m}}-\frac{1}{\sqrt[m-1]{m^m}}\right)\ldots\ldots(h).$$

Mais à cause que $m$ est une quantité indéterminée, il est clair que le dernier terme de l'équation ($h$) est une fonction indéterminée et arbitraire de $X-Y$, qu'on pourra représenter par $\varphi\ (X-Y)$ ; on aura donc

$$z=\int\frac{Ddy}{B}+\varphi(X-Y)\ldots.(517),$$

ce qui est la solution générale et fort simple des équations en question.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$x^2 f^x z + y f^y z = y^2 \ldots\ldots (i).$$

Nous avons $A = x^2$, $B = y$ et $D = y^2$; donc $X = -\frac{1}{x}$, $Y = ly$ [éq. (516)], et $\int \frac{Ddy}{B} = \frac{y^2}{2}$. Substituant ces valeurs dans l'équation (517), et faisant attention que $\varphi$ indiquant une fonction arbitraire, on peut mettre $\varphi\left(\frac{1}{x} + ly\right)$ à la place de $\varphi\left[-\left(\frac{1}{x} + ly\right)\right]$, on aura

$$z = \frac{y^2}{2} + \varphi\left(\frac{1}{x} + ly\right);$$

ce qui est l'intégrale demandée de l'équation ($i$).

499. De même que l'intégrale d'une fonction ou équation différentielle ordinaire a un nombre infini d'intégrales particulières (art. 374), lorsqu'elle est considérée abstraitement, à cause des constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, et que ces constantes ne prennent de valeurs déterminées que lorsque la quantité différentielle intégrée, étant la représentation de quelque point d'application d'analyse à la Géométrie ou aux sciences physico-mathématiques, on trouve pour autant de circonstances qu'il y a de constantes arbitraires, et indépendamment des équations du calcul, les valeurs simultanées des variables en quantités connues; de même aussi les intégrales des équations aux différentielles partielles satisfont toujours à ces équations, quelle que soit la forme qu'on donnera aux fonctions arbitraires des variables qui entrent dans ces intégrales. Ainsi considérant abstrai-

tement une équation aux différentielles partielles, elle a un nombre infini d'intégrales particulières. Mais si cette équation provient de quelques considérations d'analyse appliquée, alors on déterminera les fonctions d'abord considérées comme arbitraires, si l'on peut indépendamment des équations données par le calcul, et d'après une circonstance particulière de l'objet auquel on applique l'analyse, trouver deux équations primitives entre les trois variables qui aient lieu simultanément. En effet, soit

$$z = F(x, y) + \varphi(S) \ldots\ldots (a).$$

L'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre, en représentant par $S$ une combinaison connue de $x$ et de $y$. Supposons qu'on sache d'ailleurs que pour certaine circonstance particulière de l'objet de ces calculs, on a simultanément les deux équations déterminées

$$(b) \ldots\ldots F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y, z) = 0 \ldots\ldots (c),$$

alors faisant $S = t \ldots\ldots (d)$, on aura trois équations $(b)$, $(c)$, $(d)$ par le moyen desquelles on trouvera les valeurs respectives des trois variables $x$, $y$, $z$ en fonctions de $t$, et substituant ces valeurs dans l'équation $(a)$, elle prendra la forme

$$f(t) - F'(t) = \varphi(t),$$

$f$ et $F'$ étant les caractéristiques de fonctions déterminées. Donc ayant la valeur de $\varphi(t)$ en fonctions déterminées de $t$, et remettant à la place de cette dernière lettre celle $S$ qui représente une combinaison donnée de $x$ et de $y$, on aura déterminé $\varphi(S)$, et par conséquent tout le sera dans l'équation de résolution $(a)$.

500. Parmi les équations aux différentielles partielles

du premier ordre qui peuvent se présenter dans le calcul, il m'a paru impossible d'intégrer celle

$$f^x z = F(f^y z) \ldots\ldots (518),$$

en se servant des méthodes précédentes; mais heureusement que l'intégration de l'équation (518), peut s'obtenir d'une manière très-simple par le seul secours de l'équation

$$dz = f^x z dx + f^y z dy \ldots\ldots (a).$$

En effet, substituant dans cette dernière équation la valeur de $f^x z$ prise dans la proposée (518), et observant que $f^y z dy = d[y f^y z] - y d f^y z$, et que $F(f^y z) dx = d[x F(f^y z)] - x F'(f^y z) d f^y z$, en faisant

$$F'(f^y z) = \frac{dF(f^y z)}{d f^y z} \ldots\ldots (b),$$

on aura l'équation

$$dz = d[x F(f^y z)] + d[y f^y z] - [x F'(f^y z) + y] d f^y z \ldots (c),$$

qui, évidemment, n'est exactement intégrable que si l'on fait

$$x F'(f^y z) + y = \varphi'(f^y z) \ldots\ldots (d);$$

et alors posant l'équation

$$d\varphi(f^y z) = \varphi'(f^y z) d f^y z \ldots\ldots (e),$$

l'intégrale de l'équation (c), et par conséquent de la proposée (518), est

$$z = x F(f^y z) + y f^y z - \varphi(f^y z) \ldots\ldots (519).$$

On a dans cette équation $f^y z$ qui est inconnue, et le dernier terme qui est une fonction arbitraire de cette inconnue; ainsi dans le cas que nous considérons à présent, le calcul a été plus simple pour trouver l'intégrale que dans les cas précédens. Mais afin de parvenir à la valeur finale de $z$ en fonctions déter-

minées de $x$ et de $y$, d'après les circonstances de la question qui a donné lieu à ces recherches, il est évident que le calcul doit être plus compliqué que celui enseigné à l'article 499, puisque nous n'avions alors qu'une fonction à déterminer, et qu'ici nous avons de plus à éliminer une quantité inconnue.

Soit fait pour abréger $f^y z = u$, et supposons qu'on a simultanément comme à l'article 499, les deux équations déterminées

$$(f)\ldots.F_1(x, y, z) = 0 \text{ et } F_2(x, y, z) = 0\ldots.(g),$$

on pourra entre ces deux équations et celles $(d)$ et (519) éliminer les trois variables $x$, $y$ et $z$; on aura donc une équation $F_3[\varphi'(u), \varphi(u), u] = 0$; d'où l'on tirera celle

$$\varphi(u) = F_4[\varphi'(u), u]\ldots\ldots(h);$$

mais $\varphi'(u)du = d\varphi(u)$[équat. $(e)$], donc

$$\varphi'(u)du = dF_4[\varphi'(u), u];$$

effectuant la différention du second membre, on aura une équation différentielle ordinaire du premier ordre entre les deux quantités $u$ et $\varphi'(u)$, et qui, par conséquent, pourra s'intégrer soit d'elle-même, soit par le moyen d'un facteur (art. 360), ce qui donnera $\varphi'(u) = F_5(u)$, donc $\varphi'(u)$ sera déterminé, et par conséquent $\varphi(u)$ le sera aussi [équat. $(h)$]. Substituant les valeurs de $\varphi'(u)$ et de $\varphi(u)$ dans les équations $(d)$ et (519), on aura deux équations entre $x$, $y$, $z$ et $u$ ou $f^y z$, par le moyen desquelles on pourra éliminer cette dernière quantité, et il ne restera par conséquent qu'une équation déterminée entre $x$, $y$ et $z$ qui sera la solution de la proposée (518).

501. Considérons maintenant les équations aux différentielles partielles du premier ordre à quatre va-

riables $x$, $y$, $u$, $z$ dont la forme la plus générale est

$$\left.\begin{array}{l} A\dfrac{d^x z}{dx} + B\dfrac{d^y z}{dy} + C\dfrac{d^u z}{du} = D \\ \text{ou } \; Af^x z + Bf^y z + Cf^u z = D \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (520).$$

$A$, $B$, $C$ et $D$ représentant des fonctions des variables qui entrent dans l'équation. Eliminant $d^x z$ entre l'équation proposée (520) et celle

$$dz = d^x z + d^y z + d^u z \ldots\ldots (a),$$

on a l'équation

$$(Ady - Bdx)\frac{d^y z}{dy} + (Adu - Cdx)\frac{d^u z}{du} -$$
$$= Adz - Ddx \ldots\ldots (521) \; [*],$$

dans laquelle $\dfrac{d^y z}{dy}$ et $\dfrac{d^u z}{du}$ sont encore des quantités indéterminées. Soient $\theta = f(x, y)$, $\theta' = f'(u, x)$ et $\theta'' = f''(x, z)$ les facteurs intégrans respectifs des trois binomes

$$Ady - Bdx, \; Adu - Cdx \text{ et } Adz - Ddx,$$

en ne considérant comme variables dans chacun des binomes que celles des quatres lettres $x$, $y$, $z$ et $u$, dont les différentielles affectent les termes ; ce qui donnera exactement

$$\left.\begin{array}{l} \int^{yx}\theta\,(Ady - Bdx) = F\,(x,y,z,u) = U \\ \int^{ux}\theta'\,(Adu - Cdx) = F_1(x,y,z,u) = W \\ \int^{xz}\theta''\,(Adz - Ddx) = F_2(x,y,z,u) = V \end{array}\right\} \ldots\ldots (b),$$

---

[*] Il est évident que si on élimine encore successivement $d^y z$ et $d^u z$ entre les équations (520) et $(a)$, on aura deux équations analogues à celle (521) que le lecteur trouvera aisément. Ainsi on aura trois équations, parmi lesquelles on choisira celle qui sera la plus favorable aux calculs que nous allons indiquer relativement à la seule équation (521).

en représentant respectivement par $U$, $W$ et $V$ ces trois intégrales.

Différentiant chacune des trois équations précédentes par rapport aux quatre variables, on a

$$\left.\begin{array}{l}\theta\,(Ady - Bdx) + d^uU + d^zU = dU\\ \theta'(Adu - Cdx) + d^yW + d^zW = dW\\ \theta''(Adz - Ddx) + d^yV + d^uV = dV\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(c).$$

Multipliant la première de ces trois équations par $\frac{d^yz}{\theta dy}$, la seconde par $\frac{d^uz}{\theta' du}$, et divisant la troisième par $\theta''$, on a

$$(Ady - Bdx)\frac{d^yz}{dy} = \frac{d^yz}{\theta dy}dU - \frac{d^yz}{\theta dy}d^uU - \frac{d^yz}{\theta dy}d^zU,$$

$$(Adu - Cdx)\frac{d^uz}{du} = \frac{d^uz}{\theta' du}dW - \frac{d^uz}{\theta' du}d^zW - \frac{d^uz}{\theta' du}d^zW,$$

$$Adz - Ddx = \frac{dV}{\theta''} - \frac{d^yV}{\theta''} - \frac{d^uV}{\theta''}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (521), isolant $dV$, et multipliant par $\theta''$, il vient

$$dV = \frac{\theta''d^yz}{\theta dy}dU + \frac{\theta''d^uz}{\theta du}dW - \frac{\theta''d^yz}{\theta dy}[d^zU + d^uU]$$
$$- \frac{\theta''d^uz}{\theta' du}[d^yW + d^zW] + d^yV + d^uV\ldots\ldots\ldots(d).$$

Ici, comme à l'article 497, nous distinguerons deux cas, 1° celui où $A$ n'étant fonction que de $x$, on a $B$ qui n'est fonction que de $x$ et de $y$; $C$ qui ne l'est que de $u$ et de $x$; enfin $D$ qui n'est fonction que de $z$ et de $x$. 2°. Celui où $A$, $B$, $C$ et $D$ sont indistinctement fonctions des quatre variables. Or,

je dis que dans l'un et l'autre cas, on aura également

$$V = \varphi(U, W) \ldots\ldots\ldots (522),$$

En effet, il est évident que dans le premier cas $U$ ne sera fonction que de $x$ et de $y$, $W$ ne le sera que de $x$ et de $u$; enfin $V$ ne sera fonction que de $x$ et de $z$; donc l'équation ($d$) se réduira à celle

$$dV = \frac{6''d^y z}{6dy} dU + \frac{6''d^u z}{6du} dW,$$

qui ne peut être intégrable qu'en faisant le coefficient de $dU = W$, et celui de $dW = U$, ce qui donne

$$V = UW \ldots\ldots\ldots (e):$$

ou bien en faisant le coefficient de $dU = \varphi_1(U)$, et celui de $dW = \varphi_2(W)$, d'ou résulte l'équation

$$dV = \varphi_1(U)dU + \varphi_2(W)dW,$$

dont l'intégrale est $V = \varphi'_1(U) + \varphi'_2(W)$ qui, plus brièvement et plus généralement, peut s'écrire sous la forme de l'équation (522) dont celle ($e$) n'est évidemment qu'un cas particulier.

Dans le second cas, mettant dans l'équation ($d$) les différentielles partielles effectuées $f^z Udz$, $f^u Udu$, $f^y Wdy$ et $f^z Wdz$ à la place des respectives indiquées $d^z U$, $d^u U$, $d^y W$ et $d^z W$, on verra évidemment que le second membre de l'équation ($d$) ne renfermant que les différentielles $dy$, $dz$, $du$, $dU$ et $dW$, la différentielle $dV$ qui est exacte, se composera de la somme des différentielles partielles exactes $d^y V + d^z V + d^u V + d^U V + d^W V$; ainsi substituant ce quintinome à la place de $dV$ dans l'équation ($d$), et effaçant de part et d'autre $d^y V + d^u V$; cette équation deviendra

$$d^z V + d^U V + d^W V = \frac{\theta'' d^y z}{\theta dy} dU$$
$$+ \frac{\theta'' d^u z}{\theta du} dW - \frac{\theta'' d^y z}{\theta dy} (f^z U dz + f^u U du)$$
$$- \frac{\theta'' d^u z}{\theta du} (f^y W dy + f^z W dz) \ldots\ldots (f).$$

Mais $dV$ étant une différentielle exacte, il est clair que les différentielles partielles de $V$ par rapport à $U$ et $W$ ne peuvent avoir lieu qu'en tant que $V$ est fonction de $U$ et de $W$; c'est ce qui est exprimé par l'équation (522) qui, conséquemment, a également lieu dans les deux cas que nous avons examinés.

L'équation ($f$) étant affectée de la différentielle partielle de $V$ par rapport à $z$ et non de celles de $V$ par rapport à $x$, $y$ et $u$; nous en conclurons que $V$ est toujours fonction de la variable principale $z$, et peut ne pas l'être de quelques-unes des variables secondaires $x$, $y$ et $u$.

De même qu'à l'article 497, et par un raisonnement parfaitement semblable, on démontrera que $a$, $b$ et $c$ représentant des constantes, on a les équations

$$U = a, \quad W = b \quad \text{et} \quad V = c.$$

donc les équations ($c$) se réduiront à la forme

$$\left.\begin{array}{l} \theta\,(Ady - Bdx) = -d^u U - d^z U \\ \theta'(Adu - Cdx) = -d^y W - d^z W \\ \theta''(Adz - Ddx) = -d^y V - d^u V \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (g).$$

Mais à cause que les intégrations des binomes $Ady - Bdx$, $Adu - Cdx$ et $Adz - Ddx$ ne sont respectivement relatives qu'aux deux variables qui y ont leurs différentielles, on peut, pour effectuer ces intégrations, poser de suite les équations

$$\{Ady - Bdx = 0, Adu - Cdx = 0 \text{ et } Adz - Ddx = 0\} (h),$$

et après avoir trouvé les facteurs intégrans respectifs $\theta = f(x,y)$, $\theta' = f'(u, x)$ et $\theta'' = f''(z,x)$ de ces trois équations $(h)$; on intégrera la première, ce qui donnera $F(x,y,z,u) = U = a$; d'où $u = F'(x,y,z,a)$; substituant cette valeur de $u$ dans la seconde équation en $(h)$ multipliée par son facteur intégrant $\theta'$ et intégrant, on aura $F_1(x, y, z, a) = W = b$; d'où $y = F'_1(x, z, a, b)$ : substituant cette valeur de $y$ dans l'équation $u = F'(x,y,z,a)$, il viendra $u = F''(x,z,a,b)$ : mettant les deux valeurs de $y$ et de $u$ qui ne contiennent plus que les variables $x$ et $z$, dans la troisième équation en $(h)$ multipliée par son facteur intégrant $\theta''$ et intégrant, on aura $F_2(x, z, a, b) = V$; substituant dans cette dernière équation et dans celle $F_1(x, y, z, a) = W = b$ la valeur de $a = F(x, y, z, u)$, il viendra

$$F'_2(x, z, y, u, b) = V \quad \text{et} \quad F''_1(x, y, z, u) = W = b.$$

Enfin substituant cette valeur de $b$ dans la dernière trouvée à $V$, on aura les valeurs de $U$, $W$ et $V$ en fonctions des quatre variables, et formant d'après cela l'équation (522), celle-ci donnera l'intégrale demandée de la proposée (520).

Mais à cause de la fonction arbitraire caractérisée par $\varphi$ qui entre dans l'équation finale (522), il s'ensuit qu'en considérant abstraitement la proposée, celle-ci aura un nombre infini d'intégrales particulières, et ce ne sera que si l'équation proposée est le résultat de l'analyse appliquée à un objet indiqué, qu'on pourra déterminer la fonction arbitraire par des moyens semblables à ceux indiqués à l'article 499 pour les équations à trois variables.

502. On voit assez d'après l'analyse précédente, relativement à l'intégration des équations aux diffé-

rentielles du premier ordre à trois et quatre variables, comment on devrait s'y prendre pour celles qui renfermeraient un plus grand nombre de variables; et il serait facile d'établir une règle générale pour ces intégrations, quel que soit le nombre de variables; mais il serait trop long d'énoncer ici cette règle, et le lecteur pourra y suppléer aisément.

503. Nous n'avons jusqu'à présent considéré que les équations linéaires aux différentielles partielles, c'est-à-dire dans lesquelles $f^x z$, $f^y z$... ne sont élevées qu'à la première puissance : nous allons maintenant nous occuper des équations aux différentielles partielles quelconques du premier ordre, et nous verrons que l'intégration de ces équations se ramène à celles des équations linéaires considérées précédemment.

En effet, soit proposé d'intégrer l'équation

$$F(x, y, z, f^x z, f^y z) = 0 \ldots\ldots (a),$$

dans laquelle les cinq quantités sous le lien de F, peuvent être élevées à des puissances quelconques. Résolvant l'équation ($a$) par rapport à $f^y z$, on a

$$f^y z = F_1(x, y, z, f^x z) \ldots\ldots\ldots (b);$$

donc la valeur de $f^y z$ contenant les quantités variables $x$, $y$, $z$, $f^x z$, on aura

$$df^y z = Adx + Bdy + Cdz + Ddf^x z \ldots\ldots (c),$$

en représentant par $A$, $B$, $C$, $D$ des fonctions déterminées des variables $x$, $y$, $z$ et $f^x z$ : mais d'après l'équation proposée ($a$), la quantité $f^x z$, que pour abréger je représenterai un moment par $\xi$, étant fonction de $x$, $y$ et $z$, on aura

$$df^x z \text{ ou } d\xi = f^x\xi dx + f^y\xi dy + f^z\xi dz \ldots\ldots (d),$$

et substituant cette valeur dans l'équation ($c$), il viendra

$$df^y z = (A + Df^x\xi)dx + (B + Df^y\xi)dy + (C + Df^z\xi)dz,$$

d'où il suit les égalités

$$\left.\begin{cases} \dfrac{d^x f^y z}{dx} = A + Df^x\xi, \ \dfrac{d^y f^y z}{dy} = B + Df^y\xi \\ \dfrac{d^z f^y z}{dz} = C + Df^z\xi \end{cases}\right\} \ldots\ldots (e).$$

Mais comparant identiquement l'équation

$$dz = f^x z dx + f^y z dy, \text{ ou } \xi dx + f^y z dy - dz = 0. \ (f),$$

avec celle

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \text{ [ équat. (328), art 359],}$$

on a $P = \xi$, $Q = f^y z$ et $R = -1$,

$$\text{d'où } \frac{d^x Q}{dx} = A + Df^x\xi, \quad \frac{d^x R}{dx} = \frac{d^y R}{dy} = 0,$$

$$\frac{d^y P}{dy} = f^y\xi, \quad \frac{d^z P}{dz} = f^z\xi, \text{ enfin } \frac{d^x Q}{dz} = C + Df^z\xi;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (330)[art. 359], on aura pour équation de condition de l'intégrabilité de l'équation ($f$) multipliée par un facteur intégrant, celle

$$f^y\xi - Df^x\xi + [F_1(x, y, z, \xi) - D\xi]\, f^z\xi = A + C\xi,$$

qui est une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre les quatre variables $x, y, z$ et celle $\xi$ qui est la variable principale; ainsi en intégrant cette dernière équation [art. 501], on aura $\xi$ ou $f^x z$ en fonctions de $x, y, z$; et substituant cette valeur dans l'équation ($b$), on aura aussi $f^y z$ en fonctions de $x$, $y$, $z$; donc l'équation $dz = f^x z dx + f^y z dy$ ne sera plus qu'une équation aux différentielles ordinaires, et étant

intégrée, elle donnera l'intégrale demandée de l'équation proposée ($a$).

REMARQUE. Je dois prévenir pour empêcher mes lecteurs de commettre une pareille erreur, que c'est à tort que quelques auteurs ont dit qu'il fallait substituer les valeurs de $f^x z$ et de $f^y z$ en $x$, $z$ et $y$ dans l'équation ($a$), ce qui serait un calcul plus simple que celui que nous avons indiqué, qui exige une intégration de plus, mais conduirait à l'équation identique $0 = 0$. En effet, puisque l'équation ($b$) n'est autre chose que la résolution algébrique de l'équation ($a$) par rapport à $f^y z$; il est clair qu'en remettant dans cette dernière équation la valeur de $f^y z$, elle doit y satisfaire, et par conséquent réduire le premier membre de l'équation ($a$) à zéro.

---

# CHAPITRE V.

## *Intégrations des équations aux différentielles partielles du second ordre à trois variables.*

504. LA forme la plus générale des équations dont nous nous occuperons dans ce chapitre est

$$\left.\begin{array}{l} A\dfrac{d^{2y}z}{dy^2} + B\dfrac{d^{2x}z}{dx^2} + C\dfrac{d^{xy}z}{dxdy} + D\dfrac{d^y z}{dy} + E\dfrac{d^x z}{dx} = H \\ \text{ou} \quad Af^{2y}z + Bf^{2x}z + Cf^{yx}z + Df^y z + Ef^x z = H \end{array}\right\} \ldots (523).$$

Les lettres $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $H$ représentent des fonctions de $x$, $y$, $z$. Mais nous ne les considérerons d'abord que comme fonctions des deux seules variables

$x$ et $y$, et lorsque nous supposerons qu'elles renferment outre ces deux variables secondaires, la principale $z$, nous en préviendrons.

Nous allons successivement considérer cette équation (523) avec une partie seulement de ses termes; et ensuite nous la considérerons dans toute sa généralité; mais nous prévenons d'avance, que pour abréger nous ne donnerons au premier terme des différentes équations que nous traiterons, que l'unité pour coefficient, ce qu'on peut toujours obtenir en divisant l'équation par le coefficient du premier terme. Cependant lorsqu'à l'article 519 nous intégrerons l'équation (523) prise dans le cas le plus général, nous ne supprimerons aucun coefficient.

505. Soit donc, en premier lieu, proposé d'intégrer l'équation à deux termes

$$\frac{d^{2y}z}{dy^2} = H \ldots\ldots (524),$$

laquelle peut être mise sous la forme de celle

$$d^y \mathrm{f}^y z = H dy;$$

et intégrant cette dernière équation en $y$ considérant $x$ comme constante, on aura

$$\mathrm{f}^y z = \int^y H dy + \varphi(x) \ldots\ldots (a),$$

en représentant par $\varphi(x)$ une fonction arbitraire de $x$ qui disparaît par la différentiation de l'équation précédente par rapport à la seule variable $y$.

Substituant à $\mathrm{f}^y z$ sa valeur $\frac{d^y z}{dy}$ dans l'équation $(a)$, et multipliant par $dy$, on a l'équation

$$d^y z = dy \int^y H dy + \varphi(x) dy,$$

qui étant encore intégrée par rapport à la seule variable

riable $y$, donne

$$z = \int^y dy \int^y H dy + y\varphi(x) + \varphi'(x) \ldots\ldots (525);$$

en représentant par $\varphi'(x)$ une seconde fonction arbitraire de $x$ qui disparaît par une première différentiation par rapport à $y$ seule.

506. Passons à l'équation

$$\frac{d^{y\,x}z}{dydx} = H \ldots\ldots (526),$$

qui peut être mise sous la forme $d^y f^x z = H dy$, et intégrant par rapport à la seule variable $y$, ce qui oblige d'ajouter une fonction arbitraire de $x$ à l'intégrale, on aura

$$f^x z = \int^y H dy + \varphi(x) \text{ ou } d^x z = dx \int^y H dy + \varphi(x) dx,$$

et intégrant cette dernière équation par rapport à $x$ seule, ce qui nécessite l'addition d'une fonction arbitraire de $y$ à l'intégrale, il viendra l'équation

$$z = \int^x dx \int^y H dy + \varphi(x) + \varphi'(y) \ldots\ldots (527),$$

dans laquelle, à cause de l'arbitraire $\varphi(x)$, nous avons mis cette dernière quantité à la place de $\int \varphi(x) dx$.

Il est évident que l'intégrale (527) de l'équation (526) l'est aussi de l'équation $\frac{d^{xy}z}{dxdy} = H$, puisque $d^{xy}z = d^{yx}z$ (art. 494).

507. Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d^{2y}z}{dy^2} = D\frac{d^y z}{dy} \ldots\ldots (528),$$

que nous mettrons sous la forme

$$\frac{d^y f^y z}{dy} = D f^y z, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^y f^y z}{f^y z} = D dy,$$

et intégrant cette dernière équation par rapport à la

seule variable $y$, ce qui oblige d'ajouter à l'intégrale une fonction arbitraire de $x$, on aura

$$l\mathrm{f}^y z = \int^y D dy + \varphi(x),$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{f}^y z = e^{\int^y D dy} e^{\varphi(x)}, \text{ ou } d^y z = \varphi(x) e^{\int^y D dy} dy,$$

en substituant à la place de la fonction arbitraire $e^{\varphi(x)}$ de $x$ celle $\varphi(x)$. Intégrant cette dernière équation par rapport à la seule variable $y$, ce qui oblige d'ajouter à l'intégrale une seconde fonction arbitraire de $x$, on aura pour intégrale de l'équation (528), celle

$$z = \varphi(x) \int^y e^{\int^y D dy} + \varphi'(x) \ldots\ldots (529).$$

508. Soit encore l'équation

$$\frac{d^{yx} z}{dy dx} = D \frac{d^y z}{dy} \ldots\ldots (530),$$

qu'on peut mettre sous la forme de celle $\frac{d^x \mathrm{f}^y z}{\mathrm{f}^y z} = D dx$ qui, étant intégrée par rapport à la seule variable $x$, donne $l\mathrm{f}^y z = \int^x D dx + \varphi(y)$, d'où l'on tire

$$\mathrm{f}^y z = e^{\int^x D dx} e^{\varphi(y)}, \text{ ou } d^y z = dy e^{\int^x D dx} e^{\varphi(y)};$$

et intégrant actuellement par rapport à la seule variable $y$, il vient l'équation

$$z = \int^y dy e^{\int^x D dx} \varphi(y) + \varphi'(x) \ldots\ldots (531),$$

dans laquelle nous avons mis $\varphi(y)$ à la place de $e^{(\varphi y)}$, et qui est l'intégrale de la proposée (530).

509. Parmi les équations à deux termes qu'on peut déduire de l'équation générale (523), il y en a encore trois distinctes que nous n'avons pas encore intégrées, et qui offrent beaucoup plus de difficultés. Ces équations binomes sont celles où l'un des termes renfermant la différentielle seconde de la variable principale $z$ par

rapport à une seule des deux variables secondaires $y$ et $x$, le second terme renferme la différentielle première ou seconde de $z$ par rapport à l'autre variable secondaire $x$ ou $y$. Nous ne nous occuperons d'abord que de deux de ces équations dans le cas le plus simple, qui est celui où la lettre capitale qui est dans le second terme, est une quantité constante : car l'intégration de ces équations lorsque la lettre capitale représente une fonction variable, exige qu'on sache auparavant intégrer des équations aux différentielles partielles du second ordre de plus de deux termes.

Soit donc en premier lieu l'équation

$$f^{2y}z = a^2 f^{2x}z \ldots\ldots\ldots (532),$$

célèbre parmi les Géomètres, parce qu'elle est relative au mouvement des cordes vibrantes et de grosseur uniforme, et qu'elle sert à faire connoître la figure que doit prendre cette corde dans ses vibrations.

On a $\quad df^y z = d^y f^y z + d^x f^y z = f^{2y}z dy + f^{xy}z dx$,

et $\quad df^x z = d^y f^x z + d^x f^x z = f^{xy}z dy + f^{2x}z dx.$

Substituant dans la première de ces deux équations la valeur $f^{2y}z$ donnée par l'équation (532), ensuite multipliant la seconde équation par $a$; enfin combinant successivement les deux équations résultantes par voie d'addition et de soustraction, on aura

$$\begin{aligned} a df^x z + df^y z &= (af^{2x}z + f^{xy}z)(ady + dx) \\ &= (af^{2x}z + f^{xy}z)\, d(ay + x) \ldots\ldots (a) \end{aligned}$$

et $\quad a df^x z - df^y z = (f^{xy}z - af^{2x}z) d(ay - x) \ldots (b).$

Or, l'intégrale du premier membre de la première de ces équations étant $af^x z + f^y z$; il faut nécessairement que le second membre soit une fonction dif-

férentielle exacte, ce qui exige que $af^{xx}z + f^{xy}z$ soit égal à une fonction de $ay + x$ que je représente par $\varphi'(ay + x)$ ; donc l'intégrale de l'équation ($a$) est

$$af^{x}z + f^{y}z = \varphi(ay + x) \ldots\ldots (c).$$

De même, l'intégrale du premier membre de l'équation ($b$) étant exactement $af^{x}z - f^{y}z$, il faut nécessairement que $f^{xy}z - af^{xx}z$ soit égal à $\varphi'_1(ay - x)$ ; donc l'intégrale de l'équation ($b$) est

$$af^{x}z - f^{y}z = \varphi_1(ay - x) \ldots\ldots (d).$$

Ajoutant les deux équations ($c$) et ($d$), divisant la somme par $2a$, et à cause que $\varphi$ et $\varphi_1$ sont les caractéristiques de fonctions indéterminées, mettant respectivement les expressions $\varphi(ay + x)$ et $\varphi_1(ay - x)$ à la place de $\frac{\varphi(ay + x)}{2a}$ et $\frac{\varphi_1(ay - x)}{2a}$, on aura

$$f^{x}z = \varphi(ay + x) + \varphi_1(ay - x) \ldots\ldots (e).$$

Actuellement, retranchant de l'équation ($c$) celle ($d$), et faisant dans le second membre de l'équation résultante les mêmes changemens que les précédens (ce qui doit être, sans quoi $\varphi(ay + x)$ et $\varphi_1(ay - x)$ ne représenteraient plus les mêmes fonctions dans l'équation ($e$) et dans la suivante), on aura

$$f^{y}z = a\varphi\,(ay + x) - a\varphi_1\,(ay - x) \ldots\ldots (f).$$

Substituant ces valeurs de $f^{x}z$ et de $f^{y}z$ dans l'équation $dz = f^{x}zdx + f^{y}zdy$, il viendra

$$dz = \varphi(ay + x)\,(ady + dx) - \varphi_1(ay - x)\,(ady - dx),$$

ou $dz = \varphi\,(ay + x)d(ay + x) - \varphi_1(ay - x)\,d(ay - x)$;

mais $d\Phi\,(ay + x) = \varphi(ay + x)d(ay + x)$

et $d\Phi_1(ay - x) = \varphi_1(ay - x)d(ay - x)$,

donc $dz = d\Phi\,(ay + x) + d\Phi_1\,(ay - x)$,

et intégrant il vient l'équation

$$z = \Phi(ay + x) + \Phi_1(ay - x) \ldots\ldots (533),$$

qui est la vraie intégrale de la proposée (532).

510. Considérons en second lieu l'équation

$$f^{2y}z = a^2 f^{xy}z \ldots\ldots\ldots (534),$$

on a $df^y z = f^{2y}zdy + f^{xy}zdx$ et $df^x z = f^{xy}zdy + f^{2x}zdx$. Substituant dans la première de ces deux équations la valeur de $f^{2y}z$ donnée par l'équation (534), multipliant la seconde par $a$, ensuite combinant successivement les deux équations résultantes par voie d'addition et de soustraction, on aura

$$df^y z + adf^x z = f^{xy}z[a(a+1)dy + dx] + af^{2x}zdx \ldots\ldots (a)$$

$$df^y z - adf^x z = f^{xy}z[a(a-1)dy + dx] - af^{2x}zdx \ldots\ldots (b).$$

Ajoutant ces deux équations, et divisant la somme par 2, il vient l'équation

$$df^y z = f^{xy}z[a^2dy + dx] = f^{xy}zd(a^2y + x) \ldots\ldots (c),$$

dont le second membre ne peut être comme le premier une fonction différentielle exacte, qu'en faisant $f^{xy}z = \varphi'(a^2y + x)$. Substituant cette valeur dans l'équation ($d$) et intégrant, il vient

$$f^y z = \varphi_1(a^2y + x) \ldots\ldots\ldots (d).$$

On voit que jusqu'à présent la marche du calcul est la même que dans l'article précédent; mais ici il faut la changer, car la soustraction de l'équation ($b$) de celle ($a$), ramènerait à la valeur de $df^x z$ que nous avons trouvée directement en différentiant $f^x z$ par rapport aux deux variables $x$ et $y$. Or, j'observe que la proposée (534) étant mise sous la forme $d^y f^y z = a^2 d^y f^x z$, et intégrant par rapport à la seule variable $y$, on a $f^y z = a^2 f^x z + \Phi'(x)$, d'où l'on tire $f^x z = \dfrac{f^y z - \Phi'(x)}{a^2}$;

et substituant dans cette équation la valeur de $f^y z$ [équat. $(d)$], il vient

$$f^x z = \frac{\varphi_1(a^2y + x) - \Phi'(x)}{a^2}.$$

Substituant ces valeurs de $f^y z$ (équat. $(d)$] et de $f^x z$ dans l'équation $dz = f^y z dy + f^x z dx$, on a

$$dz = \varphi_1(a^2y + x)(a^2dy + dx) - \Phi'(x)dx \ldots\ldots (e),$$

en mettant respectivement $\varphi_1(a^2y + x)$ et $\Phi'(x)$ à la place de ces mêmes fonctions arbitraires divisées par $a^2$. Or, $a^2dy + dx = d(a^2y + x)$; donc intégrant l'équation $(e)$, il viendra

$$z = \varphi(a^2y + x) - \Phi(x) \ldots\ldots (535),$$

ce qui est l'intégrale de l'équation (534).

511. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration de quelques équations aux différentielles partielles du second ordre de plus de deux termes, qui s'intègrent aisément par des méthodes qui leur sont particulières. Nous nous occuperons en premier lieu de l'équation

$$f^{2y} z = Df^y z + H \ldots\ldots (536),$$

qui peut être mise sous la forme

$$d^y f^y z = Df^y z dy + H dy \ldots\ldots (a).$$

Or, si prenant $x$ constante, on considère $f^y z$ et $y$ comme deux variables respectivement représentées par $y$ et $x$ dans l'équation (298), [art. 342], celle (299) donnera pour intégrale de l'équation $(a)$, la suivante

$$d^y z = dy e^{\int^y D dy}\left[\int^y H e^{-\int^y D dy} dy + \varphi(x)\right],$$

et intégrant cette dernière équation par rapport à la seule variable $y$, on aura pour intégrale de la pro-

posée (536), l'équation

$$z=\int^y dy e^{\int^y Ddy}\left[\int^y He^{-\int^y Ddy}dy+\psi(x)\right]+\phi'(x) \quad (537)$$

512. Examinons encore l'équation à trois termes

$$f^{yx}z=Ef^xz+H\ldots\ldots(538),$$

qui peut être mise sous la forme

$$d^yf^xz=Ef^xzdy+Hdy\ldots\ldots(a).$$

Or, si nous prenons $x$ constante, et si nous considérons $f^xz$ et $y$ comme deux variables respectivement représentées par $y$ et $x$ dans l'équation (298) [art. 342], nous aurons celle (299) qui nous donnera pour intégrale de $(a)$, l'équation

$$f^xz=e^{\int^y Edy}\left[\int^y He^{-\int^y Edy}dy+\phi(x)\right],$$

qui étant multipliée par $dx$ et intégrée par rapport à la seule variable $x$, en faisant attention que $f^xzdx=d^xz$, donne l'équation

$$z=\int^x dx e^{\int^y Edy}\left[\int^y He^{-\int^y Edy}dy+\phi(x)\right]+\phi'(y) \quad (539),$$

qui est l'intégrale de la proposée (538).

513. Nous n'avons considéré jusqu'à présent les lettres capitales qui entrent dans les équations que nous avons intégrées, que comme des fonctions des deux seules variables $x$ et $y$ : mais s'il entrait dans les valeurs que représentent ces lettres capitales, la troisième variable $z$, alors les intégrales que nous avons données ne pourraient pas servir ; il est vrai que dans ce cas-là, et lorsqu'il n'entre dans l'équation proposée que les différentielles partielles de $z$ par rapport à une seule des deux variables, telles sont les équations (524), (528) et (536), on peut parvenir à trouver les valeurs de $z$ par l'intégration d'équations aux différentielles ordinaires du second ordre. En effet, consi-

dérant, par exemple, $x$ comme constante, on aura $\frac{d^2yz}{dy^2}=\frac{d^2z}{dy^2}$ et $\frac{d^yz}{dy}=\frac{dz}{dy}$, ce qui réduira respectivement les trois équations (524), (528) et (536) à celles différentielles ordinaires du second ordre.

$$d^2z=Hdy^2,\ d^2z=Ddzdy \text{ et } d^2z=Ddydz+Hdy^2,$$

qu'on cherchera à intégrer par les méthodes enseignées dans la troisième section; mais ayant toujours l'attention d'ajouter à la première intégrale et à l'intégrale finale, une fonction arbitraire de la variable $x$ qui a été prise comme constante.

Il est aisé de voir, 1° que la méthode d'intégration que nous venons d'indiquer, pourrait avoir de même lieu, si outre les trois variables $x$, $y$, $z$, les valeurs que représentent les lettres capitales, contenaient encore la quantité $\frac{dz}{dy}$. 2°. Qu'on pourrait se servir de la même méthode lors même que, comme dans les articles 505, 507 et 511, les valeurs représentées par les lettres capitales ne sont fonctions que de $x$ et de $y$; mais le calcul en serait bien plus long, puisqu'on aurait à intégrer des fonctions différentielles du second ordre, au lieu que par les méthodes enseignées dans les articles que nous venons de citer, il n'y a à effectuer que des intégrations de fonctions différentielles du premier ordre.

514. L'équation (538) ne pourrait, comme celle (536), s'intégrer par la méthode des intégrations des équations différentielles ordinaires du second ordre; si $E$ et $H$ étaient des fonctions des trois variables $x$, $y$ et $z$: mais cherchons du moins à intégrer l'équation

$$f^{y^2}z=Ef^zz+Hz\ldots\ldots(540),$$

dans laquelle $E$ et $H$ ne sont fonctions que de $x$ et $y$. Soit fait

$$z = \omega Z \ldots\ldots (a);$$

en représentant par $\omega$ une fonction quelconque et indéterminée de $x$ et $y$, et par $Z$ une fonction inconnue des deux mêmes variables.

Différentiant l'équation $(a)$, il vient $dz = \omega dZ + Z d\omega$. Mais $Z$ et $\omega$ étant fonctions de $x$ et de $y$, on a $dZ = \mathrm{f}^x Z dx + \mathrm{f}^y Z dy$, et $d\omega = \mathrm{f}^x \omega dx + \mathrm{f}^y \omega dy$; donc

$$\mathrm{f}^x z = \omega \mathrm{f}^x Z + Z \mathrm{f}^x \omega \ldots\ldots (b)$$

et $\mathrm{f}^y z = \omega \mathrm{f}^y Z + Z \mathrm{f}^y \omega$. De cette dernière équation, comme de celle $(b)$ on tire

$$\mathrm{f}^{yx} z = \mathrm{f}^y \omega \mathrm{f}^x Z + \omega\, \mathrm{f}^{yx} Z + \mathrm{f}^y Z \mathrm{f}^x \omega + Z \mathrm{f}^{yx} \omega.$$

Mettant cette valeur de $\mathrm{f}^{yx} z$, ainsi que celle de $\mathrm{f}^x z$ et de $z$ [équat. $(b)$ et $(a)$] dans la proposée (540), il vient

$$\omega\,[\mathrm{f}^{yx} Z - E \mathrm{f}^x Z - HZ] + [\mathrm{f}^{yx} \omega - E \mathrm{f}^x \omega] Z$$
$$+ \mathrm{f}^y \omega \mathrm{f}^x Z + \mathrm{f}^y Z \mathrm{f}^x \omega = 0 \ldots\ldots (c).$$

Mais d'après l'équation (540), il est clair que le trinome facteur de $\omega$ est $= 0$. Ainsi l'équation $(c)$ se réduit à celle

$$(\mathrm{f}^{yx} \omega - E \mathrm{f}^x \omega) Z + \mathrm{f}^y \mathrm{f}^x Z + \mathrm{f}^y \omega Z \mathrm{f}^x \omega = 0 \ldots\ldots (d):$$

or, puisque $\omega$ est une fonction quelconque et indéterminée de $x$ et $y$. Nous pouvons faire $\mathrm{f}^{yx} \omega - E \mathrm{f}^x \omega = 0$,

d'où $\quad \omega = \int^x dx e^{\int^y E dy} \omega(x) + \varphi'(y) \ldots (e)$ [éq. (531) art. 508]; donc la fonction représentée par $\omega$ étant actuellement déterminée, en donnant telle valeur qu'on voudra aux fonctions arbitraires $\varphi(x)$ et $\varphi'(y)$, on aura $\mathrm{f}^y \omega$ et $\mathrm{f}^x \omega$ qui seront aussi des fonctions déterminées de $x$ et de $y$ que je représente respectivement

par $\omega_1$ et $\omega_2$, ainsi l'équation ($d$) se réduira à celle aux différentielles partielles du premier ordre

$$\omega_1 f^x Z + \omega_2 f^y Z = 0 \ldots\ldots (f),$$

par le moyen de laquelle on trouvera la valeur de $Z$ en fonctions de $x$ et $y$ (art. 497). Mais cette valeur de $Z$ ainsi que celle de $\omega$ [équat. ($e$)], étant indépendante de $H$, il s'ensuit que si nous substituions ces deux valeurs dans l'équation ($a$), nous aurions aussi pour $z$ une valeur qui serait indépendante de $H$ et qui, conséquemment, ne satisferait pas à la proposée; nous substituerons donc seulement la valeur de $Z$ déduite de l'équation ($f$) dans le dernier terme de celle $f^{yx}Z - Ef^xZ - HZ = 0$, ce qui nous donnera une équation de la forme

$$f^{yx}Z - Ef^xZ - H' = 0 \ldots\ldots (g),$$

dans laquelle $H'$ n'est plus qu'une fonction de $x$ et de $y$, ainsi on pourra intégrer cette équation ($g$) par la méthode enseignée à l'article 512, ce qui donnera la vraie valeur de $Z$, qui substituée ainsi que celle de $\omega$ (*) dans l'équation ($a$), donnera la vraie intégrale de la proposée (540).

515. L'intégration dont nous venons de nous occuper, va nous servir à trouver l'intégrale de l'équation

$$f^{yx}z + Df^yz + Ef^xz = 0 \ldots\ldots (541),$$

dans laquelle $D$ et $E$ ne sont que des fonctions de $x$ et $y$.

En effet, soit fait

$$z = e^{\omega} Z \ldots\ldots (a),$$

(*) Cette valeur de $\omega$ reste toujours indépendante de H; mais cela n'influe en rien sur la vraie valeur de $z$, puisqu'elle n'a été introduite dans le calcul que comme une fonction quelconque de $x$ et $y$.

en représentant par $\omega$ une fonction quelconque et indéterminée de $x$ et $y$, et par $Z$ une fonction inconnue des mêmes variables. Différentiant l'équation $(a)$, il vient $dz = e^{\omega}[Zd\omega + dZ]$; mais $\omega$ étant fonction des deux variables $x$ et $y$, on a $d\omega = f^x\omega dx + f^y\omega dy$, et par la même raison on a $dZ = f^xZdx + f^yZdy$, donc $dz$ ou $f^xzdx + f^yzdy = e^{\omega}[Zf^x\omega + f^xZ]dx + e^{\omega}[Zf^y\omega + f^yZ]dy$, d'où l'on tire les deux équations

$$f^xz = e^{\omega}[Zf^x\omega + f^xZ]..(b) \text{ et } f^yz = e^{\omega}[Zf^y\omega + f^yZ]..(c).$$

Différentiant l'équation $(b)$ par rapport à $y$, ou celle $(c)$ par rapport à $x$, on a

$$f^{yx}z = e^{\omega}[Zf^y\omega f^x\omega + f^y\omega f^xZ + f^yZf^x\omega + Zf^{yx}\omega + f^{yx}Z]:$$

substituant cette valeur, ainsi que celles de $f^xz$ et $f^yz$ [équat. $(b)$ et $(c)$] dans la proposée (541), et divisant par $\omega$, on a l'équation

$$f^{yx}Z + (f^y\omega + E)f^xZ + [f^y\omega f^x\omega + f^{yx}\omega + Df^y\omega + Ef^x\omega]Z + (f^x\omega + D)f^yZ = 0 \ldots\ldots (d).$$

Or, puisque $\omega$ est une fonction quelconque et indéterminée de $y$ et $x$, on peut faire $f^x\omega + D = 0$, d'où

$$\omega = -\int^x Ddx + \varphi(y) \ldots\ldots (e),$$

ce qui réduit l'équation $(d)$ à celle

$$f^{yx}Z + [E - f^y\int^x Ddx + \varphi(y)]f^xZ - [f^yD + ED]Z = 0..(f).$$

Or, cette dernière équation étant exactement de la même forme que celle (540), on en déduira la valeur de $Z$ en fonctions de $x$ et $y$; ainsi substituant cette valeur ainsi que celle de $\omega$ [équat. $(e)$] dans l'équation $(a)$, on aura l'intégrale de la proposée (541).

Toutes ces différentes intégrations nous servent d'échelons pour nous élever à l'intégration de l'équation

à deux termes de la forme de celle (532), avec cette différence que le coefficient de $f^{2x}z$ y était considéré comme constant, et que nous le considérerons comme variable. Mais avant d'en venir à cette intégration, nous allons, d'après Euler, résoudre le problème suivant.

516. Etant donné la différentielle du second ordre $d^2z$ d'une fonction $z$ de deux variables $t$ et $u$ par rapport à ces variables ; trouver la valeur de la même différentielle $d^2z$ par rapport à deux nouvelles variables $x$ et $y$ qui ont avec celles $t$ et $u$ des relations semblables à celles qui existent entre ces deux dernières variables et celle $z$.

La relation de $z$ avec $t$ et $u$, donne

$$dz = f^t z dt + f^u z du \ldots\ldots (a).$$

De même, les relations de $t$ avec $x$ et $y$, et de $u$ avec les deux mêmes variables $x$ et $y$, donnent les deux équations.

$$(b) \ldots dt = f^x t dx + f^y t dy, \quad du = f^x u dx + f^y u dy \ldots (c).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(a)$, il vient

$$dz = f^t z f^x t dx + f^t z f^y t dy + f^u z f^x u dx + f^u z f^y u dy \ldots (d).$$

Cette équation résoudrait la question proposée, si elle ne s'étendait que jusqu'au premier ordre de différentielle. Mais pour étendre la solution jusqu'au second ordre, nous observons que de l'équation $(d)$, on tire les deux suivantes

$$(e) \ldots \frac{d^x z}{dx} = f^t z f^x t + f^u z f^x u \text{ et } \frac{d^y z}{dy} = f^t z f^y t + f^u z f^y u \ldots (f).$$

Différentiant l'équation $(e)$ par rapport à $x$, celle $(f)$ par rapport à $y$, ensuite différentiant l'équation $(e)$ par rapport à $y$, ou celle $(f)$ par rapport à $x$, on a

les trois équations

$$\frac{d^{2x}z}{dx^2} = f^{xt}zf^xt + f^tzf^{2x}t + f^{xu}zf^xu + f^uzf^{2x}u \ldots\ldots (g)$$

$$\frac{d^{2y}z}{dy^2} = f^{yt}zf^yt + f^tzf^{2y}t + f^{yu}zf^yu + f^uzf^{2y}u \ldots\ldots (h)$$

$$\frac{d^{xy}z}{dxdy} = f^{yt}zf^xt + f^tzf^{yx}t + f^{yu}zf^xu + f^uzf^{xy}u \ldots\ldots (i).$$

Mais $f^tz$ et $f^uz$ étant aussi des fonctions de $t$ et de $u$, les équations ($e$) et ($f$) prises relativement à $f^tz$ et $f^uz$ donneront celles

$$\frac{d^xf^tz}{dx}, \text{ ou } f^{xt}z = f^{2t}zf^xt + f^{ut}zf^xu$$

$$\frac{d^yf^tz}{dy}, \text{ ou } f^{yt}z = f^{2t}zf^yt + f^{ut}zf^yu$$

$$\frac{d^xf^uz}{dx}, \text{ ou } f^{xu}z = f^{ut}zf^xt + f^{2u}zf^xu$$

$$\frac{d^yf^uz}{dy}, \text{ ou } f^{uy}z = f^{ut}zf^yt + f^{2u}zf^yu.$$

Substituant ces valeurs dans les équations ($g$), ($h$) et ($i$), on a celles

$$\frac{d^{2x}z}{dx^2} \text{ ou } f^{2x}z = f^{2t}z(f^xt)^2 + 2f^{ut}zf^xuf^xt + f^tzf^{2x}t + f^{2u}z(f^xu)^2 + f^uzf^{2x}u \ldots\ldots (542)$$

$$\frac{d^{2y}z}{dy^2} \text{ ou } f^{2y}z = f^{2t}z(f^yt)^2 + 2f^{ut}zf^yuf^yt + f^tzf^{2y}t + f^{2u}z(f^yu)^2 + f^uzf^{2y}u \ldots (543)$$

$$\frac{d^{yx}z}{dydx} \text{ ou } f^{yx}z = f^{2t}zf^{yx}t + f^{ut}zf^xt + f^tzf^{yx}t + f^{ut}zf^ytf^xu + f^{2u}zf^{yx}u + f^uzf^{yx}u \ldots\ldots (544)$$

Or, la valeur de $d^2z$ par rapport à $x$ et $y$ ne se compose que des trois parties $f^{2x}zdx^2$, $f^{2y}zdy^2$ et $f^{yx}zdydx$,

donc on aura par le moyen des trois équations précédentes, toutes les parties qui entrent dans la différentielle seconde de $z$ par rapport aux deux nouvelles variables $x$ et $y$, ce qui est la solution de la question que nous nous étions proposé de résoudre.

517. Passons maintenant à l'intégration de l'équation

$$\lambda^2 f^{2x} z - f^{2y} z = 0 \ldots\ldots (545),$$

dans laquelle $\lambda^2$ représente une fonction déterminée de $x$ et $y$.

Faisons

$$\{u = \alpha y + px, \text{ et } t = \beta y + qx\} \ldots\ldots (a),$$

en représentant par $\alpha$ et $\beta$ des fonctions indéterminées de $x$ et $y$, et par $p$ et $q$ des constantes arbitraires. Prenons successivement les différentielles partielles de $u$ et de $t$ par rapport à $x$ et $y$, ce qui nous donnera

$$\begin{aligned} f^x u &= y f^x \alpha + p, & f^y u &= y f^y \alpha + \alpha, \\ f^x t &= y f^x \beta + q, & f^y t &= y f^y \beta + \beta, \\ f^{2x} u &= y f^{2x} \alpha, & f^{2y} u &= y f^{2y} \alpha + 2 f^y \alpha, \\ f^{2x} t &= y f^{2x} \beta, & f^{2y} t &= y f^{2y} \beta + 2 f^y \beta. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (542) et (543), ensuite mettant les valeurs de $f^{2x} z$ et $f^{2y} z$ que nous déduirons dans la proposée (545), nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} & f^{2t} z[\lambda^2 (y f^x \beta + q)^2 - (y f^y \beta + \beta)^2] + f^t z[\lambda^2 y f^{2x} \beta \\ & - (y f^{2y} \beta + 2 f^y \beta)] + 2 f^{ut} z[\lambda^2 (y f^x \alpha + p)(y f^x \beta + q) \\ & - (y f^y \alpha + \alpha)(y f^y \beta + \beta)] + f^u z[\lambda^2 y f^{2x} \alpha \\ & - (y f^{2y} \alpha + 2 f^y \alpha)] + f^{2u} z[\lambda^2 (y f^x \alpha + p)^2 \\ & - (y f^y \alpha + \alpha)^2] = 0 \ldots\ldots\ldots (b). \end{aligned}$$

Mais $\alpha$ et $\beta$ étant des fonctions indéterminées de $x$

et $y$, nous pouvons faire les facteurs de $f^{2t}z$ et de $f^{2u}z$ égaux à zéro, ce qui donne les deux équations aux differentielles partielles du premier ordre

$$\lambda y f^x \beta - y f^y \beta = \beta - q\lambda \ldots\ldots (c),$$
$$\lambda y f^x \alpha - y f^y \alpha = \alpha - p\lambda \ldots\ldots (d),$$

qui réduisent l'équation ($b$) à celle

$$[\lambda^2(yf^x\alpha + p)(yf^x\beta + q) - (yf^y\alpha + \alpha)(yf^y\beta + \beta)]f^{ut}z$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\lambda^2 y f^{2x}\beta - (yf^{2y}\beta + 2f^y\beta)]\, f^t z + \tfrac{1}{2}[\lambda^2 y f^{2x}\alpha$$
$$- (yf^{2y}\alpha + 2f^y\alpha)]f^u z = 0 \ldots\ldots (e).$$

Intégrant les deux équations ($c$) et ($d$) [art. 497], nous aurons

$$\{\alpha = F(x, y) \quad \text{et} \quad \beta = F_1(x, y)\} \ldots\ldots (f).$$

Substituant ces valeurs dans les équations ($a$), il viendra celles

$$\{u = yF(x, y) + px \text{ et } t = yF_1(x, y) + qx\} \ldots (g),$$

d'où l'on tirera

$$\{x = F_2(u, t) \quad \text{et} \quad y = F_3(u, t)\} \ldots\ldots (h).$$

Substituant ces valeurs de $x$ et $y$ dans celle de $\lambda$ et dans les équations ($f$), nous aurons

$$\lambda = F_4(u, t), \ \alpha = F_5(u, t) \text{ et } \beta = F_6(u, t).$$

Enfin substituant ces valeurs de $x$, $y$, $\lambda$, $\alpha$ et $\beta$ en $u$ et $t$ dans l'équation ($e$), elle deviendra de la forme

$$f^{ut}z - F_7(u, t)f^t z + F_8(u, t)f^u z = 0 \ldots\ldots (i)$$

et pourra par conséquent s'intégrer d'après la méthode enseignée à l'article 515; nous aurons donc la valeur de $z$ en fonctions de $t$ et de $u$, et par conséquent en fonctions de $x$ et $y$ d'après les équations ($g$). Ainsi nous aurons l'intégrale demandée de l'équation proposée (545).

518. Nous n'avons considéré dans l'article précédent la quantité $\lambda$ que comme fonction des deux seules variables $x$ et $y$ : mais si elle était en outre fonction de $f^x z$ et $f^y z$, c'est-à-dire, si on avait

$$\lambda = F(x, y, f^x z, f^y z) \ldots\ldots (a),$$

il faudrait opérer de la manière suivante.

Prenant successivement les différentielles partielles de l'équation $(a)$ par rapport à $x$ et $y$, on a $f^x\lambda = F'(x, y, f^{2x}z, f^{xy}z)$ et $f^y\lambda = F''(x, y, f^{xy}z, f^{2y}z)$ ; éliminant entre ces deux équations $f^{xy}z$, il vient

$$F'''(f^x\lambda, f^y\lambda, x, y, f^{2x}z, f^{2y}z) = 0 \ldots (b).$$

Si l'on peut ramener cette équation à la forme

$$\frac{f^{2y}z}{f^{2x}z} = F^{IV}(x, y, f^x\lambda, f^y\lambda) \ldots\ldots (c);$$

alors éliminant $\frac{f^{2y}z}{f^{2x}z}$ entre cette dernière équation et celle (545), on n'aura plus que l'équation aux différentielles du premier ordre

$$\lambda^2 = F^{IV}(x, y, f^x\lambda, f^y\lambda),$$

par le moyen de laquelle on trouvera la valeur de $\lambda$ en fonction des seules variables $x$, $y$, et l'intégration de l'équation (545) rentre dans le cas que nous avons traité précédemment (art. 517). Mais si l'équation $(b)$ ne peut être ramenée à la forme $(c)$, alors éliminant $f^{2x}z$ entre les équations $(b)$ et (545), il viendra

$$f^{2y}z = F^{V}(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2); \text{ d'où } d^y f^y z = dy(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2),$$

et intégrant en considérant $x$, $f^y\lambda$, $f^x\lambda$ et $\lambda^2$ comme des constantes, on aura

$$f^y z = F^{VI}(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2) + \varphi(f^y\lambda, f^x\lambda, x, \lambda^2) \ldots (d).$$

Actuellement

Actuellement éliminant $f^{2y}z$ entre les équations (545) et ($b$), il viendra $f^{2x}z = F^{\text{VIII}}(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2)$, d'où $d^x f^x z = dx F^{\text{VIII}}(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2)$, et intégrant par rapport à $x$ seule, en prenant $f^y\lambda$, $f^x\lambda$, $y$ et $\lambda^2$ constantes, on aura

$$f^x z = F^{\text{VIII}}(f^y\lambda, f^x\lambda, x, y, \lambda^2) + \varphi^{\text{I}}(f^y\lambda, f^x\lambda, y, \lambda^2) (e).$$

Substituant ces valeurs de $f^y z$ et $f^x z$ [équat. ($d$) et ($e$)] dans l'équation ($a$), le résultat sera une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre $\lambda$, $x$ et $y$, d'où l'on déduira la valeur de $\lambda$ en fonctions de $x$ et $y$, et la substituant dans l'équation (545), on rentrera dans le cas d'intégration que nous avons traité à l'article 517.

519. Occupons-nous enfin de l'intégration de l'équation (523) prise dans toute sa généralité, et les lettres capitales représentant des fonctions quelconques de $z$, $x$, $y$, $f^x z$ et $f^y z$ : mais pour simplifier le calcul, nous ferons

$$P = H - Df^y z - Ef^x z \ldots\ldots (a).$$

Ainsi l'équation que nous traiterons dans cet article, sera de la forme

$$Af^{2y}z + Bf^{2x}z + Cf^{yx}z = P \ldots\ldots (b).$$

Différentiant successivement les quantités $f^y z$ et $f^x z$,

on a $$df^y z = d^y f^y z + d^x f^y z = \frac{d^{2y}z}{dy} + \frac{d^{xy}z}{dy}$$

et $$df^x x = \frac{d^{2x}z}{dx} + \frac{d^{xy}z}{dx},$$ d'où l'on tire

$$f^{2y}z = \frac{df^y z dy - d^{xy}z}{dy^2} \quad \text{et} \quad f^{2x}z = \frac{df^x z dx - d^{xy}z}{dx^2}.$$

substituant ces valeurs dans l'équation ($b$), et mul-

tipliant le résultat par $dydx$, on a

$$Adf^{y}zdx + Bdf^{x}zdy - Pdydx = f^{yx}[Adx^{2} + Bdy^{2} + Cdxdy] \ldots\ldots (c).$$

Soit fait

$$df^{y}z = \pi df^{x}z \ldots\ldots (d) \quad \text{et} \quad dy = \omega dx \ldots\ldots (e),$$

en représentant par $\pi$ et $\omega$ deux fonctions indéterminées de $x$, $y$, $z$, $f^{x}z$ et $f^{y}z$; mais avec cette différence, que la dernière de ces fonctions peut être prise arbitrairement dans toutes les circonstances du calcul, et que la première $\pi$ ne doit jamais changer: en effet, si l'on a une équation $z = F(x, y)$ dans laquelle les variables $x$ et $y$ sont indépendantes l'une de l'autre, et F indique une fonction déterminée, il est clair que quelles que soient les relations arbitraires qu'on voudra successivement supposer entre les deux variables $x$ et $y$, la quantité $F(x, y)$ ne changera pas: or, à chaque changement de relation supposée entre $x$ et $y$, la valeur $\omega$ qui exprime le rapport des différentielles de ces variables [ équat. $(e)$] changera, au lieu que $F(x, y)$ restant toujours la même dans ces differens changemens arbitraires, la relation $\pi$ des quantités $df^{y}F(x, y)$ et $df^{x}F(x, y)$ [equat. $(d)$], n'éprouvera de meme aucun changement (*). Cela posé, substituant les valeurs hypothé-

(*) Pour rendre ceci plus sensible, supposons que $z = F(x, y)$ soit l'equation d'une surface courbe; il est clair qu'en faisant glisser d'une manière quelconque sur le plan des $xy$, et toujours parallèlement à l'axe des $z$, une droite dont la longueur varie suivant les valeurs numériques de $F(x, y)$ correspondantes aux differens points où l'une des extrémites de la droite rencontre le plan des $xy$, l'autre extrémite se trouvera toujours sur l'un des points de la surface courbe. Mais si au lieu de faire glisser arbitrairement la droite en question sur le plan des $xy$, on la fait successivement glisser le long de certaines lignes planes tracées arbitrairement sur le plan

tiques de $df^y z$ et de $dy$ [équat. $(d)$ et $(e)$] dans l'équation $(c)$, on aura celle

$$df^x z[A\pi + B\omega] - P\omega dx = f^{xy} z dx(A + B\omega^2 + C\omega) \ldots (f).$$

Or, $\omega$ étant une fonction arbitraire des quantités variables $x$, $y$, $z$, $f^x z$ et $f^y z$, on peut faire

$$A + B\omega^2 + C\omega = 0 \ldots\ldots (g),$$

ce qui réduira l'équation $(f)$ à celle

$$[A\pi + B\omega] df^x z = P\omega dx \ldots\ldots (h).$$

De l'équation $(g)$, on tire

$$\omega = F_1(x, y, z, f^x z, f^y z) \ldots\ldots (i).$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(e)$, il vient celle

$$\frac{dy}{dx} = F_2(x, y, z, f^x z, f^y z) \ldots\ldots (k) :$$

mais on a généralement

$$\frac{dz}{dx} = f^x z + f^y z \frac{dy}{dx} \ldots\ldots (l) ;$$

donc combinant les deux équations $(k)$ et $(l)$, en y considérant $f^x z$ et $f^y z$ comme deux inconnues, on aura

$$f^y z = F_3\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) \ldots\ldots (m),$$

et $$f^x z = F_4\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) \ldots\ldots (n).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(i)$, faisant at-

---

des $xy$, alors on établira pour chacune de ces lignes planes une nouvelle relation entre les coordonnées horizontales $x$ et $y$ qui, évidemment, ne change en rien l'expression analytique $F(x, y)$ de la coordonnée verticale $z$.

tention que $\frac{dy}{dx}$ étant égal à $\omega$, le second membre sera affecté de $\omega$, et résolvant l'équation résultante par rapport à $\omega$, on aura

$$\omega = F_5\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) \ldots\ldots (o).$$

Différentiant l'équation $(m)$ par rapport à $y$, divisant par $dy$, et faisant attention que $d^y \frac{dz}{dx} = \frac{d^y d^y z}{dx} + \frac{d^y d^x z}{dx} = \frac{(f^{2y}z + f^{xy}z)dy^2}{dx}$, on aura

$$f^{2y}z = F_6[x, y, z, f^y\omega, f^y z, (f^{2y}z + f^{yx}z)\omega] \ldots\ldots (p).$$

Par un raisonnement semblable on trouvera que

$$f^{2x}z = F_7[x, y, z, f^x\omega, f^x z, (f^{2x}z + f^{yx}z)\omega] \ldots\ldots (q),$$

et différentiant l'équation $(m)$ par rapport à $x$, ensuite divisant par $dx$, ou différentiant celle $(n)$ par rapport à $y$ et divisant par $dy$, on aura

$$f^{xy}z = F_8[x, y, z, f^x z, f^x\omega, (f^{xy}z + f^{2x}z)\omega] \ldots\ldots (r).$$

Mais l'équation $(i)$ étant successivement différentiée par rapport à $x$ et $y$, en divisant à la première différentiation par $dx$ et à la seconde par $dy$, donne

$$\left.\begin{array}{l} f^x\omega = F_9[x, y, z, f^x z, f^{2x}z, f^{yx}z] \\ f^y\omega = F_{10}[x, y, z, f^y z, f^{2y}z, f^{yx}z] \end{array}\right\} \ldots\ldots (s).$$

Substituant ces valeurs de $f^x\omega$, $f^y\omega$ ainsi que celle de $\omega$ [équat. $(i)$] dans les équations $(p)$, $(q)$ et $(r)$, on aura celles

$$f^{2y}z = F_{11}(x, y, z, f^y z, f^{2y}z, f^{xy}z)$$
$$f^{2x}z = F_{12}(x, y, z, f^x z, f^{2x}z, f^{xy}z)$$
$$f^{xy}z = F_{13}(x, y, z, f^x z, f^{2x}z, f^{xy}z)$$

Considérant dans ces trois équations, $f^{2x}z$, $f^{2y}z$ et $f^{xy}z$ comme trois inconnues dont on veut avoir les valeurs, on trouvera par les méthodes ordinaires de l'Algèbre, les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} f^{2y}z = F_{14}(x, y, z, f^{y}z, f^{x}z) \\ f^{2x}z = F_{15}(x, y, z, f^{y}z, f^{x}z) \\ f^{xy}z = F_{16}(x, y, z, f^{y}z, f^{x}z) \end{array}\right\} \ldots\ldots (t).$$

Substituant ces trois valeurs dans l'équation ($b$), ou si l'on veut dans l'équation générale (523), et ensuite mettant dans l'équation résultante les valeurs de $f^{y}z$ et de $f^{x}z$[équat. ($m$) et ($n$)], on aura une équation différentielle ordinaire du premier ordre entre les trois variables $z$, $x$ et $y$ qui sera immédiatement intégrable, ou intégrable par la multiplication d'un facteur, si l'équation (329), ou celle (330) [art. 359] est satisfaite, et en supposant que cela soit, on aura par l'intégration, l'équation

$$z = F'(x \quad y) \ldots\ldots\ldots (u),$$

dans laquelle $F'(x, y)$ n'est pas la vraie valeur cherchée de $z$ que doit donner l'équation générale (523), puisque la valeur que nous venons de trouver à $z$ [éq. ($u$)], dépend absolument de la relation arbitraire $\omega$ qu'on a supposée entre les différentielles des deux variables indépendantes l'une de l'autre $x$ et $y$, et change avec cette relation dont elle dépend. Mais à cause, comme nous l'avons démontré ci-dessus, que la fonction $\pi$ reste toujours la même indépendamment des valeurs analytiques qu'on peut donner arbitrairement à $\omega$, et par conséquent aussi indépendamment de $F'(x, y)$ qui dépend de $\omega$, il s'ensuit qu'on pourra se servir de cette dernière fonction de $x$ et $y$ pour trouver $\pi$, ce qu'on obtiendra de la manière suivante.

Par le moyen de l'équation $(u)$, on aura, par une suite de différentiations partielles, les équations

$$\{f^x z = F''(x, y),\ f^y z = F'''(x, y),\ f^{xy} z = F^{iv}(x,y)$$
$$\text{et } F^{2x} z = F^{v}(x, y)\} \ldots\ldots\ldots (v).$$

Substituant les valeurs de $f^x z$ et $f^y z$ dans les valeurs de $A$, $B$, $P$ et $\omega$ [équat. $(u)$ et $(i)$], l'équation $(h)$ se changera en celle

$$F^{vi}(x, y)\pi + F^{vii}(x, y)]df^x z = F^{viii}(x, y)dx \ldots (x),$$

mais $df^x z = d^y f^x z + d^x f^x z = f^{yx} z dy + f^{2x} z dx$; donc substituant cette valeur dans l'équation $(x)$, et divisant par $dx$, on aura

$$F^{vi}[(x, y)\pi + F^{vii}(x,y)](f^{yx} z\omega + f^{2x} z) = F^{viii}(x,y):$$

enfin mettant dans cette dernière équation la valeur de $\omega$ ainsi que celles de $f^{yx} z$ et $f^{2x} z$ données par les deux dernières équations en $(v)$, on aura une équation entre les trois quantités $\pi$, $x$, $y$, d'où l'on tirera

$$\pi = F^{ix}(x, y) \ldots\ldots (y).$$

Mais intégrant l'équation $(d)$ en prenant $\pi$ constante, on aura $f^y z = \pi f^x z + \varphi(\pi)$, et substituant la valeur de $\pi$ donnée par l'équation $(y)$, il viendra l'équation aux différentielles partielles du premier ordre

$$F^{ix}(xy) f^x z - f^y z = -\varphi[F^{ix}(x, y)] \ldots\ldots (z),$$

qui étant intégrée par la méthode enseignée à l'article 497, donnera l'intégrale demandée de l'équation générale (523).

# CHAPITRE VI.

*Quelques notions sur les intégrations des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au second, et sur les solutions particulières des équations aux différentielles partielles de tous les ordres.*

520. Le premier soin qu'on doit avoir lorsqu'on veut intégrer des équations aux différentielles partielles des ordres supérieurs, est de chercher à les rabaisser au plus petit ordre possible; ce qui quelquefois n'offre aucune difficulté; telle est par exemple l'équation de l'ordre $m+n$

$$F(x, y, f^{nx}z, f^{(nx)(y)}z, f^{(nx)(2y)}z, \ldots f^{(nx)(my)}z) = 0 \ldots (a),$$

qui se réduit à une équation du $m^{ième}$ ordre, en faisant

$$f^{nx}z = u \ldots\ldots\ldots (b),$$

puisque généralement $f^{(nx)(py)}z = f^{py}f^{nx}z$, et que d'après l'équation $(b)$, on aura $f^{(nx)(py)}z = f^{py}u$; ainsi l'équation $(a)$ se réduira à celle

$$F(x, y, u, f^{y}u, f^{2y}u \ldots f^{my}u) = 0 \ldots\ldots (c):$$

Ayant intégré cette dernière équation, et supposant que son intégrale est $u = F'(x, y)$, l'équation $(b)$ donnera $f^{nx}z = F'(x, y)$, ou $d^{x}f^{(n-1)x}z = dxF'(x, y)$, d'où $f^{(n-1)x}z = \int^{x}dxF'(x, y) + \varphi(y)$ ou $dxf^{(n-2)x}z = dx\int^{x}dxF'(x, y) + \varphi(y)dx$, et par conséquent

$$f^{(n-2)x}z = \int^{x}dx\int^{x}dxF'(x, y) + \varphi(y)x + \varphi'(y).$$

On trouvera pareillement

$$f^{(n-3)x}z = \int^x dx \int^x dx \int^x dx F'(x, y) + \frac{\varphi(y)}{2} x^2 + \varphi'(y)x + \varphi''(y).$$

Continuant de même jusqu'à ce qu'on ait au premier membre la seule variable $z$, et de plus se rappelant de la formule (403)[art. 409], on aura

$$z = \int^{nx} F'(x,y)dx^n + \varphi(y)x^{n-1} + \varphi'(y)x^{n-2} \ldots + \varphi^{(n-1)'}(y) \ldots (d),$$

ce qui est l'intégrale de la proposée ($a$).

521. Toutes les équations aux différentielles partielles d'un ordre quelconque à trois variables, dans lesquelles il n'entre que les différentielles partielles de la variable principale par rapport à une seule des variables secondaires, pourront s'intégrer par les équations aux différentielles ordinaires du même ordre que les proposées. Telle est, par exemple, l'équation $F(x, y, z, f^x z, f^{2x} z, f^{3x} z \ldots f^{nx} z) \ldots (a)$ qui, en y considérant $y$ comme constante, prendra la forme suivante

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3} \ldots \frac{d^nz}{dx^n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Mais au lieu d'ajouter à chaque intégrale dans les intégrations successives, une simple constante arbitraire, on ajoutera une fonction arbitraire de $y$, ce qui donnera dans l'intégrale finale, une série de termes semblables à celle qui se trouve dans l'équation ($d$) de l'article 520, et dont les termes sont affectés de fonctions arbitraires de $y$.

522. Si dans une équation primitive

$$z = F(x, y, a, b) \ldots\ldots (a);$$

les deux constantes $a$ et $b$ sont combinées avec les deux variables $x$ et $y$ par voie de multiplication ou de division, indépendamment de ce qu'elles peuvent

encore l'être par simple voie d'addition ou de soustraction, je dis qu'on pourra toujours par le moyen de la proposée ($a$) et de sa différentielle

$$dz = Pdx + Qdy \ldots\ldots (b),$$

éliminer les deux constantes $a$ et $b$, et que le résultat de l'élimination sera une équation aux différentielles partielles du premier ordre. En effet, $a$ et $b$ étant combinées avec les deux variables $x$ et $y$ par voie de multiplication ou de division, il est clair que ni $P$ ni $Q$ ne seront absolument dépourvues de ces constantes $a$ et $b$; mais on a

$$(c) \ldots P = f^x z \quad \text{et} \quad Q = f^y z \ldots (d);$$

donc tirant de ces deux équations les valeurs de $a$ et $b$, il viendra

$$(e) \ldots a = F_1(x, y, f^x z, f^y z) \text{ et } b = F(x, y, f^x z, f^y z) \ldots (f).$$

Enfin substituant ces valeurs dans l'équation proposée ($a$), on aura celle aux différentielles partielles du premier ordre

$$z = F_3(x, y, f^x z, f^y z) \ldots\ldots (g),$$

qui, évidemment, a pour intégrale l'équation ($a$), puisqu'étant ce que devient cette dernière équation lorsqu'on a éliminé $a$ et $b$ entre les trois équations ($a$) ($c$) et ($d$), elle doit reproduire la proposée lorsqu'on y substitue à la place de $f^x z$ et $f^y z$ leurs valeurs respectives $P$ et $Q$. Par exemple, soit l'équation

$$z = a^2xy - by^2 \ldots\ldots (h),$$

dont la différentielle est $dz = a^2ydx + (a^2x - 2by)dy$; donc $P = a^2y$ et $Q = a^2x - 2by$ : substituant ces valeurs dans les équations ($c$) et ($d$), il vient celles $a^2y = f^x z$ et $a^2x - 2by = f^y z$, d'où on tire $a^2 = \frac{f^x z}{y}$ et

$b = \frac{xf^x z - yf^y z}{2y^2}$. Mettant ces valeurs de $a^2$ et $b$ dans la proposée ($h$), on a l'équation aux différentielles partielles

$$z = \tfrac{1}{2} xf^x z + \tfrac{1}{2} yf^y z \ldots\ldots (i),$$

qui a pour intégrale l'équation ($h$). Si l'on intègre directement l'equation ($i$) par la méthode enseignée à l'article 497, on a celle $z = x^2 \varphi \left(\frac{y}{x}\right)$ qui reproduit la proposée lorsqu'on fait $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\left(a^2 - b\frac{y}{x}\right)$.

523. Observons actuellement que si en supposant $a$ et $b$ variables dans la différentiation de l'équation

$$z = F(x, y, a, b) \ldots\ldots (a),$$

cette hypothèse ne change en rien l'équation

$$dz = Pdx + Qdy \ldots\ldots (b),$$

l'élimination de $a$ et de $b$ qui conduit à l'équation aux différentielles partielles

$$z = F_3(x, y, f^x z, f^y z) \ldots (g),$$

se fera de même que dans l'article précédent, et cette équation ($g$) ne sera pas altérée. Or, en différentiant l'équation ($a$) par rapport à $x$, $y$, $a$ et $b$, on a celle

$$dz = f^x z dx + f^y z dy + f^a z da + f^b z db,$$

ou $$dz = Pdx + Qdy + f^a z da + f^b z db,$$

qui devient identique avec l'équation ($b$), si l'on a

$$f^a z da + f^b z db = 0 \ldots\ldots (h);$$

et à cause qu'on satisfait à cette dernière équation en faisant simultanément

$$(i) \ldots f^a z = 0 \quad \text{et} \quad f^b z = 0 \ldots\ldots (k),$$

il s'ensuit que les valeurs de $a$ et $b$ en fonctions de $x$ et $y$ déduites de ces deux dernières équations, étant

substituées dans la proposée ($a$) donneront une équation essentiellement différente de cette dernière, et qui cependant satisfera à l'équation aux différentielles partielles ($g$), puisque cette équation étant indépendante de $a$ et de $b$, et l'équation ($b$) n'étant point altérée d'après celle ($h$) ou celles ($i$) et ($k$), les quantités $f^x z$ et $f^y z$ placées dans l'équation ($g$) resteront les mêmes, et toujours respectivement égales à celles $P$ et $Q$ qui n'ont pas changé. Ainsi toutes les fois que les calculs que nous venons d'indiquer seront possibles, et ne mèneront à aucune absurdité, alors on en conclura que l'équation aux différentielles partielles proposée a une ou plusieurs solutions particulières, suivant qu'on a tiré des équations ($i$) et ($k$), une ou plusieurs valeurs admissibles de $a$ et de $b$ en fonctions de $x$ et $y$.

Prenons pour exemple l'équation aux différentielles partielles

$$z = x f^x z + y f^y z + A[1 + (f^x z)^2 + (f^y z)^2] \ldots (l)$$

dont l'une des intégrales déterminées est

$$z = ax + by + A(1 + a^2 + b^2) \ldots (m).$$

De cette dernière équation on tire $f^a z = x + 2Aa$ et $f^b z = y + 2Ab$; donc les équations ($i$) et ($k$) donneront $a = -\frac{x}{2A}$ et $b = -\frac{y}{2A}$. Substituant ces valeurs dans l'équation ($m$), on a celle $z = A - \frac{(x^2+y^2)}{4A}$, qui est la seule solution particulière que puisse avoir la proposée ($l$).

L'équation ($i$) de l'article précédent n'a pas de solutions particulières, car de son intégrale ($h$) on tire $f^a z = 2axy$ et $f^b z = -y^2$, et ces quantités égalées à zéro, ne peuvent donner les valeurs de $a$ et de $b$ en fonctions de $x$ et $y$.

# SECTION V.

## *Application du Calcul intégral à la Géométrie.*

## CHAPITRE Ier.

### *Quelques Problèmes et Théorèmes relatifs aux développées et développantes des courbes planes.*

524. Les équations

$$dy = Rds \ldots (112) \quad \text{et} \quad dx = Rdc \ldots (113),$$

démontrées à l'article 185, et que je rappelle ici avec les mêmes n$^{os}$ qu'elles ont dans cet article, donnent un moyen bien simple de trouver par le seul secours de la valeur du rayon osculateur $R$ d'une courbe en fonctions des lignes trigonométriques $s$ (le sinus), $c$ (le cosinus), $t$ (la tangente) de l'angle formé par la normale avec l'axe des abscisses, l'équation de cette courbe entre ses coordonnées rectangulaires $x$ et $y$; car tout se réduira à substituer cette valeur de $R$ dans les deux équations précédentes, ensuite à les intégrer, et enfin à éliminer entre les deux intégrales, les lignes trigonométriques qui les affectent, ce qui est toujours

possible, puisque toutes les lignes trigonométriques peuvent être réduites à une seule. La courbe trouvée de cette manière sera algébrique si les intégrations pouvant s'effectuer exactement, les intégrales ne renferment point de quantités transcendantes. Elle sera mécanique ou transcendante dans les cas contraires.

EXEMPLE I. *Etant donné le rayon osculateur*

$$R = \frac{q}{c^3} \ldots\ldots (a)$$

*d'une courbe inconnue, et en représentant par* q *une quantité constante connue, on demande l'equation de cette courbe.*

Substituant la valeur donnée de $R$ dans les équations (112) et (113), on a celles

$$dy = \frac{qds}{c^2} = qdt \quad \text{et} \quad dx = \frac{qdc}{c^3};$$

intégrant ces deux équations, il vient

$$(b) \ldots y = qt + \text{const.} \quad \text{et} \quad x = -\frac{q}{2c^2} + \text{const.} . (c)$$

Pour déterminer les constantes, j'observerai que lorsqu'on fait $s = 0$, l'équation donnée $(a)$ se réduit à $R = q$, donc la courbe cherchée coupe l'axe des $x$; ainsi prenant l'origine des coordonnées à ce point de section, on aura $y = 0$ lorsque $t = 0$; donc const. $= 0$, ce qui donne complètement pour l'équation $(b)$ celle

$$y = qt \ldots\ldots (d).$$

Quant à l'équation $(c)$, j'observe que $x$ étant $= 0$ lorsque $s = 0$, et par consequent $c = 1$, on a const. $= \frac{q}{2}$; donc on a complètement

$$x = -\frac{q}{2c^2} + \frac{q}{2} = -\frac{q}{2} t^2 \ldots\ldots (e).$$

Mais de l'équation ($d$), on tire $t^2 = \frac{y^2}{q^2}$, donc $x = -\frac{y^2}{2q}$, d'où $y^2 = -2qx$, équation qui ne peut donner de valeurs réelles à $y$ que du côté des $x$ négatives, ainsi on a $y^2 = 2qx$, ce qui est l'équation demandée de la courbe cherchée qui, conséquemment, est la parabole vulgaire ayant pour paramètre $2q$.

Exemple II. *On demande l'équation entre les coordonnées rectangulaires de la courbe dont le rayon osculateur est* $= \frac{1}{cs^2}$.

Nous avons $dy (= Rds) = \frac{ds}{cs^2} = \frac{dL}{s^2}$, en représentant par $L$ l'angle de la normale ; donc $y = -\cot L + \text{const.}$ Or, en faisant $L = 100°$, la valeur donnée de $R$, donne $R = \infty$, donc 1° l'angle $L$ est toujours $> 100°$, ce qui rend $\cot L$ négatif, et change la valeur de $y$ en celle $y = \cot L + \text{const.}$ 2°. Puisque $L > 100°$ la valeur de $R$ est negative, par conséquent la courbe cherchée tourne sa convexité vers l'axe. 3°. L'axe des abscisses est assymptote de la courbe, par conséquent $y = 0$ lorsque $L = 100°$, ce qui alors réduit l'équation $y = \cot L + \text{const.}$ à celle $\text{const.} = 0$ ; on a donc complètement

$$y = \cot L \ldots\ldots (a).$$

Actuellement mettant la valeur de $R$ dans l'équation $dx = Rdc$, on a $dx = \frac{dc}{cs^2} = -\frac{dL}{c^2 t} = -\frac{dt}{t}$ ; donc $x = -lt$ ou $x = l \cot L + \text{const.}$ Mais l'angle $L$ étant $> 100°$, on a $x = l(-\cot L) + \text{const.}$ Or, si nous prenons l'origine des coordonnées au point de l'axe où $L = 150°$, nous aurons $0 = l(-\tang 50°) + \text{const.}$, d'où $\text{const.} = -l(-1)$ ; donc $x = l(-\cot L) - l(-1)$, et par conséquent nous aurons complète-

ment $x = l \cot L$, mais $y = \cot L$ [équat. $(a)$], donc $x = ly$; ainsi la courbe demandée est la logarithmique naturelle.

525. Représentant par $\xi$ et $\gamma$ les coordonnées rectangulaires $Aq$ et $qb$ du centre $b$ de l'osculation en un point B de la développante $AmBm'B'm''B''\ldots$ dont les coordonnées AQ, BQ sont respectivement représentées par $x$ et $y$, je dis qu'on aura toujours les deux équations Fig. 1.

$$(546)\ldots.\ d\gamma = sdR \quad \text{et} \quad d\xi = -cdR\ldots.(547).$$

En effet, dans le triangle rectangle $aqb$, on a

$$bq = ab \sin baq = ab \sin BaX,$$

et $$aq = ab \cos baq = -ab \cos BaX.$$

Mais $bq = -\gamma$, $ab = Bb - Ba = R - N$, (en représentant par $N$ la normale) $= R - \frac{y}{\sin BaQ} = R - \frac{y}{\sin BaX}$; donc

$$\gamma = -R \sin BaX + y \text{ ou } \gamma = y - Rs\ldots.(a).$$

De même $aq = Aq - AQ - Qa = \xi - x - N \cos BaQ = \xi - x + N \cos BaX$; donc $\xi - x + N \cos BaX = -R \cos BaX + N \cos BaX$, d'où

$$\xi = x - Rc\ldots\ldots(b).$$

Différentiant les équations $(a)$ et $(b)$ par rapport à toutes les lettres, on aura celles

$$d\gamma = dy - Rds - sdR\ldots,(c),$$

et $d\xi = dx - Rdc - cdR$ qui, d'après les équations (112) et (113), se réduisent aux deux équations (546) et (547) que nous voulions démontrer.

526. Problème. *Etant donné l'équation d'une courbe, trouver celle de sa développée.*

Solution. Par le moyen de l'équation de la courbe

donnée, on cherchera la valeur du rayon osculateur en fonctions de lignes trigonométriques de l'angle de la normale avec l'axe des abscisses (art. 186), et différentiant cette quantité, on en substituera la différentielle dans les équations (546) et (547); ensuite intégrant, on aura, si la courbe donnée est algébrique, deux équations finies et algébriques qui, combinées ensemble pour faire disparaître les lignes trigonométriques, donneront l'équation de la développée entre ses coordonnées rectangulaires.

EXEMPLE. *Trouver l'équation de la développée de la parabole vulgaire dont le paramètre est* P.

On sait que la sous-normale de la parabole est $\frac{1}{2}P$, donc $N = -\frac{P}{2c}$, mais $R = \frac{N^3}{\frac{1}{4}P^2}$ [équat. (111)], donc $R = -\frac{P}{2c^3}$ (*); d'où

$$dR = \frac{3Pdc}{2c^4} = -\frac{3PtdL}{2c^3} = -\frac{3Ptdt}{2c}.$$

Substituant cette valeur dans les équations (546) et (547), on a $d\gamma = \frac{3Pt^2dt}{2}$ et $d\xi = \frac{3Ptdt}{2}$; d'où

$$\gamma = \frac{Pt^3}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{3Pt^2}{4} \ldots (a):$$

éliminant $t$ entre ces deux équations, on a celle $\xi^3 = \frac{27}{16}P\gamma^2$, ce qui est l'équation de la courbe de-

(*) Quoique les valeurs de $R$ et de $N$ se présentent sous la forme négative, elles sont positives, puisque dans la parabole, l'angle $L$ de la normale est toujours $> 100°$, en prenant la courbe comme dans la figure 1 se prolongeant du côté des $x$ positives.

mandée.

mandée. Donc la parabole vulgaire a pour développée une parabole cubique dont le paramètre et les $\frac{27}{10}$ de celui de la développante. En comparant l'équation ($a$) avec celle $x = \frac{Pt^2}{4}$ (*voyez* le renvoi de l'article 186, tome I, page 243), on a $\xi = 3x$, ce qui est déjà connu, et procure un moyen extrêmement simple pour trouver le centre du cercle osculateur d'un point quelconque de la première parabole.

On a le rayon osculateur $b\mathrm{B} = \text{arc } b\mathrm{D} + \mathrm{AD}$, donc en supposant que la courbe ABB′B″.... est une parabole, on aura $R = \text{arc } b\mathrm{D} + \frac{1}{2}P$; d'où Fig. 1.

$$\text{arc } b\mathrm{D} = R - \tfrac{1}{2}P = \frac{-P}{2c^3} - \tfrac{1}{2}P = -\tfrac{1}{2}P(1+t^2)^{\frac{3}{2}};$$

mais l'équation ($a$) donne $t^2 = \frac{4\xi}{3P}$, donc arc $b\mathrm{D} =$

$$-\frac{(3P+4\xi)}{\gamma\sqrt{3P}};$$

ainsi on voit que la développée de la parabole est une courbe algébrique et rectifiable.

527. De ce que nous avons dit précédemment, il suit 1°. qu'on peut successivement déterminer les développées de tous les ordres d'une courbe algébrique, en tant qu'on n'est pas arrêté par la difficulté attachée à la résolution des équations d'un degré trop élevé, inconvénient qui doit être entièrement rapporté à l'insuffisance de la simple algèbre sur cet objet; 2°. que les développées de tous les ordres d'une courbe algébrique, sont elles-mêmes des courbes algébriques; mais que l'inverse de cette proposition peut n'avoir pas lieu; c'est-à-dire que la développée d'une courbe algébrique peut être une courbe transcendante; 3°. qu'étant donnée l'équation d'une courbe algébrique, on peut connaître si la développante de cette courbe est géométrique ou mécanique, et que même dans le pre-

mier de ces cas, on peut déterminer l'équation de la developpante. En effet, représentant par $R'$ les rayons osculateurs de la développante inconnue d'une courbe connue dont les coordonnées sont $\gamma$ et $\xi$, soit qu'on considère cette dernière courbe comme tournant sa concavité vers l'axe des abscisses, soit qu'on la considère comme convexe vers le même axe; de plus, représentant toujours par $s$ et $c$ les sinus et cosinus de l'angle correspondant de la normale avec l'axe des abscisses de la développée, on aura toujours les formules

$$dR' = -\frac{d\gamma}{c} \ldots (548) \quad \text{et} \quad dR' = \frac{d\xi}{s} \ldots\ldots (549),$$

qui, évidemment, dérivent de celles (546) et (547), en faisant attention que le rayon osculateur de la développée est perpendiculaire à celui de la développante. Integrant celle de ces deux équations qui offre le moins de difficulté dans cette opération, on obtiendra la valeur du rayon osculateur de la développante en fonction de lignes trigonométriques, d'où par la méthode enseignée à l'article 524, on pourra conclure l'équation de cette dernière courbe, en tant du moins que l'intégrale de l'équation (548) ou de celle (549) est exacte et algébrique : mais si le cas contraire a lieu, on en conclura que la courbe proposée n'est pas rectifiable, et que par conséquent sa développante est transcendante.

Exemple. *Trouver la développante de la seconde parabole cubique ayant pour paramètre l'unité, et dont conséquemment l'équation est*

$$\gamma^2 = \xi^3 \ldots\ldots (a).$$

On a (S.$n$) $\left[= \frac{\gamma d}{d\xi}\right]$ [formule (94) art 116] $= \frac{3}{2}\xi^2$;

donc $\gamma\,[=(S.n)t] = \frac{3}{2}\xi^2 t$ et $\gamma^2 = \frac{9}{4}\xi^4 t^2$; égalant cette valeur de $\gamma^2$ avec celle donnée par l'équation $(a)$, on a $\xi = \frac{4}{9}\cot^2 L'$, en représentant par $L'$ l'angle de la normale de la développée, d'où $\gamma = \frac{8}{27}\cot^3 L'$; donc $dR'\left[=\frac{d\xi}{s}\right]$[équat. (549)] $= \frac{8}{9}\frac{\cot L' d\cot L'}{s} = -\frac{8}{9}\frac{ds}{s^4}$; et intégrant il vient $R' = \frac{8}{27s^3} + \text{const.}$ Prenant $R' = \frac{8}{27}$ lorsque ce rayon osculateur est perpendiculaire à l'axe des $x$, c'est-à-dire que $L' = 100°$, on aura complètement l'équation $R' = \frac{8}{27s^3}$, dans laquelle $s$ représente le sinus de l'angle formé par la normale de la développée avec l'axe des $x$; ainsi si nous considérons l'angle $L$ formé par la normale de la developpante avec l'axe des $x$, nous aurons $R' = -\frac{8}{27c^3}$, donc $dy[=R'ds]$ $= -\frac{8dL}{27c^2}$, et $dx\,[=R'dc] = -\frac{8dc}{27c^3}$, et intégrant, on a complètement $y = -\frac{8}{27}t$ et $x = \frac{4}{27}t^2$ : car lorsque $L = 0$ on a $y = 0$ et $x = 0$. Eliminant $t$ entre ces deux dernières équations, on a celle $y^2 = \frac{16}{27}x$, qui est l'équation demandée. Ainsi la developpante de la seconde parabole cubique, est une parabole vulgaire dont le paramètre est les $\frac{16}{27}$ de celui de la développée, ce que nous savions déjà par l'inverse (art. 526).

EXEMPLE II. *Proposons-nous maintenant de trouver la developpante de la parabole vulgaire ayant pour paramètre l'unité.*

De l'équation $\gamma = \xi^2$ on déduit $\gamma = \frac{\cot^2 L'}{4}$ et $\xi = -\frac{1}{2}\cot L'$ [renvoi de l'art. 186], donc $dR' = \frac{dL'}{2s^3}$ [éq. (549)];

et intégrant par le moyen de la formule (252) [article 290], on aura $R' = \frac{1}{2}\left[\frac{\cot L'}{\sin L'} + l \cot \frac{1}{2} L'\right]$: ainsi $R'$ étant une quantité transcendante, on en conclura que la développante de la parabole appollonienne est une courbe transcendante ; ce qu'au reste on aurait pu conclure *à priori*, en faisant attention que la parabole en question n'est pas rectifiable, ainsi qu'on l'enseigne dans les Elémens de Géométrie analytique, et que nous le démontrerons par le calcul intégral dans le chapitre suivant.

Les équations (112, (113), (546) et (547) sont utiles dans la physique céleste, j'ai employé les deux premières dans mon Traité de Navigation à la note première sur la figure de la terre ; mais l'angle $L$ de la normale qui indiquait la latitude, était toujours pris du côté de l'axe dont s'approchait le plus la normale.

528. Retranchant respectivement les équations (546) et (547) de celles (112) et (113), on a

$$dy - d\gamma = Rds + sdR \text{ et } dx - d\xi = Rdc + cdR,$$

et intégrant, il vient celles

(550) $\gamma = y - Rs + \text{const.}$ et $\xi = x - Rc + \text{const.}$ (551),

qui, au reste, ne sont autre chose que les équations ($a$) et ($b$) de l'article 525, et qui par leurs formes primitives, sont presque toujours plus utiles que celles (546) et (547) pour les mêmes recherches que celles qui nous ont occupé dans les articles 526 et 527, puisqu'elles épargnent des intégrations qui quelquefois peuvent présenter beaucoup de difficultés. Nous ne nous arreterons pas à faire des applications de ces formules remarquables par leur simplicité, et l'usage

dont elles peuvent être, même pour découvrir les propriétés de certaines courbes, parce qu'ayant été données par l'analyse ordinaire, et n'exigeant dans leurs applications que de l'algèbre, elles ne font plus partie des objets que nous traitons dans cet Ouvrage. Mais nous engageons les jeunes analystes de s'en occuper pour s'exercer à résoudre des problèmes relatifs aux développées et développantes.

---

# CHAPITRE II.

## *De la rectification des courbes planes et à double courbure, et de la quadrature des courbes planes.*

529. On sait que la *rectification* des courbes consiste à trouver la longueur absolue d'un arc de cette courbe compris entre deux ordonnées, ou depuis l'origine de la courbe jusqu'à une ordonnée quelconque.

Soit donc considéré la courbe $AmBm'B'm''B''\ldots$ et cherchons l'expression générale de la longueur absolue de l'arc $AmBm'B'$, en prenant le point A pour origine de la courbe. Fig. 1.

Soit mené les ordonnées QB, $cB'$, $eB''$ à des distances AQ, Qc, $ce$ égales entre elles; menons les cordes AB, $BB'$, $B'B''$ et la droite $GB'E$ parallèle à l'axe AX des abscisses. Cela posé, représentons par $y$ et $x$ les coordonnées $B'c$, Ac qui limitent l'arc $AmBm'B'$ qu'on veut mesurer; par $\lambda$ la longueur de cet arc, et par $\lambda'$ la longueur de la portion $ABB'$ du polygone

Fig. 1. inscrit ; ce qui donnera $B''E = \Delta y$, $B'E = ce = \Delta x$ ; $B'B'' = \Delta\lambda'$ on aura donc dans le triangle rectiligne rectangle $B'EB''$ ; l'équation

$$\Delta\lambda' = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}, \text{ ou } \frac{\Delta\lambda'}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1} \ldots . (a).$$

Or, si nous concevons maintenant qu'entre le point A et l'ordonnée $cB'$ de position invariable, les distances égales entre les ordonnées diminuent de longueur, et que celle $ce$ diminue de même et en meme quantité, il résultera 1°. que le nombre des côtés de la portion de polynome inscrite à l'arc $AmBm'B'$ augmentera; que par conséquent le périmètre $\lambda'$ de cette portion de polynome augmentant de longueur, se rapprochera sans cesse de celui $\lambda$ de l'arc $AmBm'B'$ ; 2° que cette variation s'opèrera en même intensité que la diminution de $ce$, et par conséquent que le rapprochement de l'ordonnée movible $B''e$ de celle fixe $B'c$ ; de manière qu'à l'instant où la première de ces deux ordonnées se confondra avec la seconde, on aura rigoureusement

$$\lambda' = \lambda \ldots\ldots (b).$$

Mais l'ordonnée $B''e$ s'identifiant avec celle $B'c$, on a $\Delta y = 0$, $\Delta x = 0$ et $\Delta\lambda'$ ou $\Delta\lambda$ [équat. $(b)$] $= 0$ ; donc d'après la notation du Calcul différentiel (art. 4) l'équation $(a)$ deviendra $\frac{d\lambda}{dx} = \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1}$, d'où

$$\lambda = \int dx \sqrt{\left[\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right]} + \text{const.} \ldots (552).$$

Telle est la formule générale des rectifications des courbes, et comme l'équation de la courbe donne $y = F(x)$ ; d'où $\frac{dy^2}{dx^2} = X$, en représentant par $X$ une

fonction de $x$, il s'ensuit que la rectification des courbes planes rapportées à leurs coordonnées, dépend seulement de l'intégration des fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable. Fig. 1.

Pour déterminer la constante de l'équation (552), on observera que si l'arc qu'on veut rectifier est pris à l'origine A de la courbe, on a pour $x = 0$, $\lambda = 0$; mais si l'arc qu'on veut rectifier ne commence qu'au point B dont l'abscisse AQ est je suppose $a$, alors pour $x = a$ on fera $\lambda = 0$, et on déterminera la constante d'après cette condition; ou bien on pourra calculer la longueur absolue de l'arc d'après la condition que pour $x = 0$ on a $\lambda = 0$, ensuite mettre dans la formule résultante $a$ pour $x$, ce qui donnera la longueur absolue de l'arc AB, et retranchant ce résultat du premier trouvé, on aura celle d'un arc quelconque de la courbe à partir du point B. Enfin si l'arc qu'on veut rectifier, est compris entre deux limites BQ et $B'c$, dont les abscisses respectives sont $x$ et $x'$; alors la rectification de la courbe dépend de l'intégration des fonctions variables prises entre des limites, que nous avons traité au chapitre VI de la première section du Calcul intégral.

Il est évident que la courbe proposée n'est rectifiable que si l'intégration indiquée dans l'équation (552) peut s'effectuer exactement, ou si dans l'intégrale il n'entre pas des quantités transcendantes. Dans le cas contraire, on ne peut avoir le rapport de la longueur absolue de l'arc à une longueur de mesure rectiligne, tel qu'un mètre, que par approximation. Nous allons faire quelques applications aux courbes les plus connues, et nous commencerons par celles du second degré, dont nous savons que l'équation générale est

$$y^2 = Px + Qx^2 \ldots\ldots (c) \text{ (art. 104)},$$

dans laquelle $P$ représente le paramètre et

$$Q \text{ est} \left\{ \begin{array}{l} = 0 \\ \text{positif} \\ \text{négatif} \\ = -1 \end{array} \right\} \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} \text{la parabole} \\ \text{l'hyperbole} \\ \text{l'ellipse} \\ \text{le cercle} \end{array} \right\} \ldots\ldots\ldots (d).$$

De plus, représentant respectivement par $2A$ et par $2B$ l'axe transverse et le second axe de ces courbes, on a

$$\left\{ P = \frac{2B^2}{A} \quad \text{et} \quad Q = \pm \frac{B^2}{A^2} \right\} \ldots\ldots (e).$$

En opérant immédiatement sur l'équation générale ($c$) pour former celle des rectifications (552), on aurait l'équation

$$\lambda = \int \frac{dx \sqrt{[P^2 + 4P(Q+1)x + 4Q(Q+1)x^2]}}{2\sqrt{[Px + Qx^2]}} + \text{const} \ldots (f);$$

dont l'intégration rentre dans les cas traités au chapitre III de la première section, particulièrement à l'article 251, et offre beaucoup trop de difficultés lorsqu'on la considère dans toute sa généralité; ainsi nous nous contenterons d'examiner successivement les cas indiqués dans le groupe ($d$).

Le cas de $Q = 0$ qui est le caractère de la parabole, réduit l'équation ($f$) à celle

$$\lambda = \int dx \sqrt{\frac{a+x}{x}} \ldots\ldots (g),$$

dans laquelle $a$ représente la quantité $\frac{1}{4} P$. Soit fait pour effectuer l'intégration

$$\frac{a+x}{x} = -z^2 \ldots\ldots (h),$$

d'où $x = \frac{-a}{z^2+1}$ et $dx = \frac{2azdz}{(z^2+1)^2}$, ce qui transforme le second membre de l'équation ($g$) en la formule

$$2a\sqrt{-1}\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}\ldots\ldots\ldots(i).$$

Mais l'équation (150) donne $\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{z}{z^2+1} + \int\frac{dz}{(z^2+1)^2}$, et celle (167) donne $\int\frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}$ arc (tang $= z$) $+ \frac{z}{2(z^2+1)}$; donc la formule ($i$) devient $a\sqrt{-1}$ arc (tang $= z$) $+ \frac{az\sqrt{-1}}{z^2+1}$, et substituant dans cette dernière formule la valeur de $z = \sqrt{\frac{a+x}{x}}\sqrt{-1}$ [équat. ($h$)], on aura

$$\lambda = a\sqrt{-1}\,\text{arc}\left[\text{tang} = \sqrt{\frac{a+x}{x}}\sqrt{-1}\right] + x\sqrt{\frac{a+x}{x}} + \text{const.}$$

Or, la formule (187) donne $\sqrt{-1}$ arc $\left[\text{tang} = \sqrt{\frac{a+x}{x}}\sqrt{-1}\right] = \frac{1}{2}l\left[2\sqrt{ax+x^2} - 2x - a\right]$; donc remettant à la place de $a$ sa valeur $\frac{1}{4}P$, et faisant attention que prenant l'origine de l'arc à celui de la courbe, on a pour $x = 0$, d'où $\lambda = 0$, const. $= -\frac{1}{4}Pl\left[-\frac{1}{4}P\right]$, il viendra complètement

$$\lambda = \frac{P}{8}l\left[1 + \frac{8x}{P} - \frac{4x}{P}\sqrt{\frac{P+4x}{x}}\right] + \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{P+4x}{x}}\,(k),$$

d'où l'on voit que la parabole vulgaire ne peut se rectifier qu'avec approximation. Mais il y a un nombre

infini de paraboles des ordres et genres supérieurs qui sont rectifiables. En effet, de l'équation générale à toutes ces courbes qui est $y = Px^a$, en représentant par $a$ un nombre réel, positif et fractionnaire, on tire $\lambda = \int dx \sqrt{1 + P^2 a^2 x^{2(a-1)}}$. Or, cette formule différentielle est exactement et algébriquement intégrable si l'on a $2(a-1) = 1$, ou $a = \frac{3}{2}$ (art. 213); ainsi $b$ représentant un nombre entier et positif, toutes les paraboles de l'équation $y^{2b} = Px^{3b}$ sont rectifiables.

Mettant dans la formule $(f)$ les valeurs de $P$ et de $Q$ en fonctions des axes [équat. $(e)$], et représentant par $E$ l'excentricité, laquelle est égale à $\sqrt{A^2+B^2}$ dans l'hyperbole, et à $\sqrt{A^2-B^2}$ dans l'ellipse; enfin prenant pour plus de simplicité l'origine des coordonnées au centre, on aura pour l'hyperbole

$$\lambda = \frac{1}{A}\int dx \sqrt{\left[\frac{E^2x^2 - A^4}{x^2 - A^2}\right]} + \text{const.}\ldots(l),$$

et pour l'ellipse

$$\lambda = \frac{1}{A}\int dx \sqrt{\left[\frac{A^4 - E^2x^2}{A^2 - x^2}\right]} + \text{const.}\ldots(m).$$

Faisant dans cette dernière équation $E = 0$, ce qui est le caractère du cercle, on a pour cette courbe

$$\lambda = A\int \frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2)}} = A \text{ arc}\left(\sin = \frac{x}{A}\right) [\text{form. } (134)].$$

L'intégrale indiquée qui entre dans cette équation, ainsi que celles des équations $(l)$ et $(m)$ ne pouvant s'effectuer qu'avec approximation, et nous rappelant de ce que nous avons dit ci-dessus relativement à la parabole, nous en conclurons qu'on ne peut rectifier exactement les courbes du second degré.

Nous avons démontré à l'article 112, que prenant

l'origine des coordonnées rectangulaire de la cycloïde à celle de la courbe, et représentant par $\omega$ l'arc développé du cercle générateur, relativement au point de la cycloïde ayant pour coordonnées $x$ et $y$, on avait les deux équations

$$x = \omega - \sin\omega \quad \text{et} \quad y = r - \cos\omega,$$

dans lesquelles $r$ représente le rayon du cercle générateur ; donc

$$\lambda\left[=\int\sqrt{dy^2+dx^2}\right]=\int d\omega\sqrt{\sin^2\omega+(r-\cos\omega)^2}$$
$$=2\int d\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

et par conséquent $\lambda = -4\cos\frac{1}{2}\omega + \text{const.}$; mais lorsque $\omega = 0$ on a $\lambda = 0$, donc const. $= 4r$, ce qui donne complètement

$$\lambda = \frac{8\sin^2\frac{1}{4}\omega}{r}\ldots\ldots\ldots\ldots(n);$$

ainsi lorsque $\omega = 400°$, c'est-à-dire pour la cycloïde entière, on a sa circonférence totale $= 8r = 4$ diamètres du cercle générateur.

530. Cherchons maintenant la formule de rectifications des courbes telle que celles $AmBm'B'm''B''\ldots$ Fig. 2. considérées par rapport au pôle P.

Soit $AmBm'B'$ l'arc dont on veut avoir le rapport de la longueur absolue avec l'unité de mesure rectiligne. Menons les deux rayons vecteurs PA, PB′ le premier passant par l'origine A de l'arc qu'on peut regarder comme l'origine de la courbe ; le second que nous représenterons par $v$, passant par le point quelconque B′ de la courbe, et formant avec le premier PA un angle d'anomalie que nous représenterons par $\alpha$ : de plus, tirons entre ces deux rayons vecteurs un nombre quelconque $n$ d'autres rayons vecteurs tels que celui PB, de manière que les angles interceptés

soient tous égaux entre eux, et par conséquent égaux à

Fig. 2. $\frac{\alpha}{n+1}$; ensuite menons en dehors du rayon PB′ qui limite l'arc qu'on veut mesurer, celui PB″ qui forme avec PB′ un angle $B'PB'' = \frac{\alpha}{n+1}$. Enfin tirons les cordes AB, BB′, B′B″; nous formerons par ce moyen une portion de polynome ABB′ que nous représenterons par $\lambda'$, qui sera inscrite à la portion d'arc de courbe $AmBm'B'$, que nous représenterons par $\lambda$. Cela posé, Prenant $Pa = PB'$, et menant $B'a$, nous aurons $B''a = \Delta\nu$, $B'B'' = \Delta\lambda'$, $B'Pa = \Delta\alpha$, $B'a = 2\nu \sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$ et $B'aB'' = 100° + \frac{1}{2}\Delta\alpha$; donc le triangle rectiligne $B'aB''$ donnera

$$\Delta\lambda' = \sqrt{4\nu^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\alpha + \Delta\nu^2 + 4\nu \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\alpha\,\Delta\nu},$$

ou développant $\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$, et divisant par $\Delta\alpha$, il viendra

$$\frac{\Delta\lambda'}{\Delta\alpha} = \sqrt{\left[\nu^2 - \frac{\nu^2\Delta\alpha^2}{2.2.3} + \text{etc.} + \frac{\Delta\nu^2}{\Delta\alpha^2} + \nu\Delta\nu + \frac{\nu\Delta\nu\Delta\alpha^2}{2.2.3} + \text{etc.}\right]} \ldots (a).$$

Mais si on augmente le nombre $n$ des rayons vecteurs entre ceux PA et PB′, alors le périmètre de la portion ABB′ de polygone inscrit augmente et se rapproche en longueur de celle de l'arc $Amm'B'$, et comme cet accroissement se fait à mesure que $\frac{\alpha}{n+1}$ ou $\Delta\alpha$ diminue, et que par conséquent le rayon vecteur PB″ se rapproche de celui PB′, il s'ensuit que lorsqu'il se confondra avec ce dernier rayon vecteur, et que conséquemment $\Delta\alpha$ et $\Delta\nu$ s'évanouiront, on aura rigoureusement $\lambda' = \lambda$, donc $\Delta\lambda'$ qui alors devient $\Delta\lambda$ sera $= 0$, et d'après la notation du Calcul différentiel (art. 4), l'équation $(a)$ se réduira à celle $\frac{d\lambda}{d\alpha} = \sqrt{\left(\nu^2 + \frac{d\nu^2}{d\alpha^2}\right)}$.

d'où l'on tire

$$d\lambda = \sqrt{v^2 d\alpha^2 + dv^2} \ldots\ldots (553).$$

Telle est la formule différentielle de la rectification des arcs de courbe rapportées à leurs coordonnées polaires.

Pour faire quelques applications de ces formules, considérons d'abord les spirales de tous les genres dont l'équation est

$$v = p\alpha^b \ldots\ldots (b),$$

$b$ pouvant représenter un nombre entier ou fractionnaire, et dans ce dernier cas ayant son numérateur positif ou négatif. De cette équation on tire

$$dv^2 = b^2 p^2 \alpha^{2(b-1)} d\alpha^2 \text{ et } v^2 = p^2 \alpha^{2b}; \text{ donc}$$

$$d\lambda = p\alpha^{b-1} d\alpha \sqrt{\alpha^2 + b^2} \ldots\ldots (c),$$

ce qui est la formule différentielle de la rectification des spirales paraboliques et hyperboliques de tous les genres; et à cause que l'intégrale de l'équation ($c$), soit qu'elle s'obtienne immédiatement, ce qui a toujours lieu lorsque $b$ est un nombre entier, positif et pair [art. 213], soit qu'elle ne puisse s'obtenir que par les séries, ou par des fonctions transcendantes de $\alpha$, renferme toujours une fonction de l'arc de cercle $\alpha$ qui n'est pas rectifiable, nous en conclurons que généralement les spirales ne peuvent se rectifier que par approximation.

Dans la spirale logarithmique dont l'équation est log. $v = \alpha$ (art. 142), en représentant par *log.* le logarithme dans un système quelconque ayant pour module $m$, on a $v^2 = e^{2m\alpha}$, $dv^2 = m^2 e^{2m\alpha} d\alpha^2$. Substituant ces valeurs dans l'équation (553), on a

$d\lambda = e^{m\alpha} d\alpha \sqrt{1+m^2}$ d'où

$$\lambda = \frac{e^{m\alpha}}{m}\sqrt{1+m^2} + \text{const.} \ldots\ldots (d) :$$

et si l'on prend l'origine de la courbe à l'extrémité du rayon du cercle directeur, qui est le premier rayon vecteur, on aura $\lambda = 0$ lorsque $\alpha = 0$, ce qui donne const. $= -\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$; on a donc complètement

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{m\alpha}-1) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(\nu-1) \ldots\ldots (e).$$

Dans la spirale logarithmique naturelle dont l'équation est $l\nu = \alpha$, l'équation de rectification $(e)$ se réduit à celle

$$\lambda = (\nu - 1)\sqrt{2} \ldots\ldots (f),$$

d'où l'on voit qu'un arc quelconque de la spirale logarithmique naturelle, est égal à la diagonale du quarré formé sur la partie du rayon vecteur correspondant, comprise depuis l'intersection de ce rayon avec le cercle directeur, puisque dans une telle spirale le rayon du cercle directeur est évidemment $= 1$. Donc, quoique la spirale logarithmique tourne à l'infini autour de son pôle où $\nu = 0$, cependant toute la longueur de la partie négative de la courbe, c'est-à-dire de celle comprise dans le cercle directeur n'est égale qu'à celle du quarré inscrit à ce cercle ; en effet, $\nu = 0$ réduit l'équation $(f)$ à celle $\lambda = -\sqrt{2}$.

Si l'on fait $\nu = 2$, ce qui donne $\alpha = l2 = 44°, 127$, alors l'équation $(f)$ devient $\lambda = \sqrt{2}$; donc la longueur absolue de l'arc positif de la spirale logarithmique naturelle qui correspond à une anomalie de $44°, 127$ est sensiblement égale à celle de toute la partie négative de cette courbe.

531. Une courbe à double courbure étant donnée par ses équations de projections

$$(a)\ldots\ldots y = F(x) \quad \text{et} \quad z = F'(x)\ldots\ldots(b)$$

sur les plans des $xy$ et des $xz$, imaginons qu'à partir d'un point quelconque de cette courbe, qu'on peut considérer comme son origine et celle des coordonnées en y plaçant le sommet de l'angle trièdre des trois plans coordonnés, on prenne des longueurs égales $\Delta x$, et qu'on joigne par des cordes tous les points de la courbe correspondans aux coordonnées $\Delta x$, $F(\Delta x)$, $F'(\Delta x)$, ensuite $2\Delta x$, $F(2\Delta x)$, $F'(2\Delta x)$ et ainsi de suite jusqu'au point qui a pour coordonnées $x+\Delta x$, $F(x+\Delta x)$ et $F'(x+\Delta x)$, en représentant par $x$, $F(x)$, $F'(x)$, ou $x, y, z$ les coordonnées du point extrême de l'arc qu'on veut rectifier; on aura donc par cette construction une portion de polygone inscrit à l'arc à double courbure terminé en $x$, $y$, $z$ dont trois côtés contigus ne seront plus dans le même plan, et dont la différence $\Delta\lambda'$ (en représentant par $\lambda'$ la longueur absolue de la portion de polygone inscrit terminé en $x$, $y$, $z$) sera la corde sous-tendant l'arc compris entre $x$, $y$, $z$ et $x+\Delta x$, $F(x+\Delta x)$, $F'(x+\Delta x)$ ou $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Or, on sait que la longueur d'une droite considérée dans l'espace est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés de sa projection sur les trois axes des coordonnées, donc

$$\frac{\Delta\lambda'}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} + 1}\ldots\ldots(c).$$

Mais la perpendiculaire abaissée du point $x$, $y$, $z$ sur le plan des $xy$ restant fixe, et celle abaissée du point $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ sur le même plan, se rapprochant sans cesse de la première, à mesure que $\Delta x$ diminue et que par conséquent le nombre des côtés de la portion du

polygone inscrit augmente, ce qui rapproche la grandeur du périmètre de la portion du polygone inscrit, de celui de l'arc circonscrit ; il s'ensuit que lorsque la perpendiculaire mobile se confondra avec la fixe qui limite l'arc à double courbure que je représente par $\lambda$, ce qui donne $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ et $\Delta\lambda = 0$; on aura $\lambda' = \lambda$, d'où $\Delta\lambda' = \Delta\lambda = 0$; donc, d'après la notation du Calcul différentiel, l'équation ($c$) se réduira à la forme $\frac{d\lambda}{dx} = \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} + 1}$, ou

$$d\lambda = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \ldots\ldots(554),$$

ce qui est l'expression de la différentielle des arcs de courbe à double courbure, et par le moyen de laquelle on pourra obtenir la rectification d'une pareille courbe donnée par ces équations ($a$) et ($b$), en intégrant une simple formule différentielle du premier ordre à une seule variable, puisque des équations ($a$) et ($b$) on tire respectivement $dy^2 = F_1(x)dx^2$ et $dz^2 = F'_1(x)dx^2$ : substituant ces valeurs dans l'équation (554), on a $d\lambda = dx\sqrt{F_1(x) + F'_1(x) + 1}$.

Ainsi la rectification des courbes à double courbure n'offre guère plus de difficultés que celle des courbes planes.

532. La *quadrature* des courbes planes consiste, comme on le sait, à trouver le rapport de l'unité de mesure de surface plane tel, par exemple, que le mètre quarré, à l'aire comprise entre un arc de la courbe qu'on veut quarrer, les deux ordonnées qui limitent cet arc et la partie de l'axe des abscisses interceptée entre ces deux coordonnées. Ainsi la quadrature de la courbe $AmBm'B'$ depuis, par exemple, l'ordonnée BQ jusqu'à celle $B'c$ consiste à trouver l'expression analytique de l'aire du quadrilatère mixtiligne

Fig. 1.

ligne $BmB'cQB$, de manière qu'en substituant ensuite les nombres aux lettres que représentent ces dernières, on ait le rapport de cette aire au mètre quarré. Lorsque l'expression analytique qu'on trouve est limitée et algébrique, alors la courbe proposée est quarrable; dans le cas contraire, elle est dite *inquarrable*, c'est-à-dire, qu'on ne peut trouver la mesure de sa surface qu'avec approximation. Fig. 1.

Nous allons dans cet article chercher la formule générale des quadratures.

Soit $AmBm'B'cQA$ l'espace courbe qu'on veut quarrer; faisons la même construction qu'à l'article 529, et représentons respectivement par $\varpi$ et $\varpi'$ l'espace courbe que nous voulons quarrer et l'espace polygonal $ABB'cA$ de la portion de polygone $ABB'$ inscrit; nous aurons donc $\Delta\varpi' =$ au trapèze $cB'B''e$, dont les deux côtés paralleles $B'c$ et $B''e$ sont $y$ et $y + \Delta y$, et dont la hauteur $ce$ est $\Delta x$; donc $\Delta\varpi' = y\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x\Delta y$, d'où l'on tire

$$\frac{\Delta\varpi'}{\Delta x} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y \ldots\ldots (a).$$

Mais en diminuant $\Delta x$, ce qui rapproche l'ordonnée variable $B''e$ de la fixe $B'c$, le nombre des côtés de la portion de polygone inscrit augmente, et par conséquent son aire augmentant, se rapproche sans cesse en grandeur de celle de l'espace courbe; et comme toutes ces variations ont lieu simultanément, il s'ensuit que lorsque l'ordonnée mobile $B'e$ se confondra avec la fixe $B'c$, ce qui donnera $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ et $\Delta\varpi' = 0$, on aura $\varpi = \varpi'$, d'où $\Delta\varpi = \Delta\varpi' = 0$; donc d'après la notation du Calcul différentiel (art. 4), l'é-

Fig. 71. quation ($a$) se réduira à celle $\frac{d\varpi}{dx} = y$, d'où

$$d\varpi = ydx \ldots\ldots (555);$$

et comme $y$ est donné en fonction de $x$ par l'équation de la courbe, il s'ensuit que la quadrature des courbes est donnée par la simple intégration de fonctions différentielles du premier ordre à une seule variable.

Si la quadrature de la courbe doit commencer à son origine A, alors la constante indéterminée ajoutée à l'intégrale de l'équation (555), doit se déterminer d'après la condition que $x = 0$ donne $\varpi = 0$. Si au contraire la quadrature ne doit commencer que depuis une ordonnée BQ dont l'abscisse AQ est, je suppose $a$; alors l'intégrale de l'équation (555) étant $\varpi = F(x) + \text{const.}$, on y fera $\varpi = 0$ pour $x = a$, ce qui donnera const. $= -F(a)$, et par conséquent on aura complètement $\omega = F(x) - F(a)$. Enfin si la quadrature doit être prise entre deux limites ayant respectivement pour abscisses $x$ et $x'$, alors il est clair que la constante $F(a)$ disparaîtra, et représentant par $\varpi$ et $\varpi_1$ les aires prises depuis l'origine de la courbe qui ont ces limites, on aura $\varpi_1 - \varpi = F(x') - F(x)$, ou

$$\Delta\varpi = \frac{dF(x)}{dx}\Delta x + \frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \text{etc.} \text{[form.(39)art.38]}$$

ce qui est conforme à ce que nous avons dit à l'article 314.

I. Pour faire quelques applications de la formule (555) des quadratures, proposons-nous d'abord de quarrer les courbes du second degré, dont l'équation générale est, comme on le sait,

$$y = \sqrt{Px + Qx^2}, \ldots\ldots (b).$$

Substituant cette valeur de $y$ dans l'équation (555), il vient

$$d\varpi = dx\sqrt{Px + Qx^2} \ldots\ldots\ldots (c):$$

or, si l'on fait dans cette équation $Q = 0$, ce qui est le caractère de la parabole, on a celle $d\varpi = dx\sqrt{Px}$, dont l'intégrale complète, en prenant l'origine du segment qu'on veut quarrer à celle de la courbe, est

$$\varpi = \tfrac{2}{3}\, x\sqrt{Px} = \tfrac{2}{3}\, xy \ldots\ldots (d):$$

donc la parabole vulgaire est exactement quarrable, et l'aire d'un segment quelconque de cette courbe, est égale aux deux tiers du rectangle formé sur ses coordonnées.

Mettant à la place de $P$ et de $Q$ leurs valeurs respectives $\frac{2B^2}{A}$ et $\pm\frac{B^2}{A^2}$ [équation ($e$) article 529] dans l'équation ($c$), on a pour l'hyperbole et l'ellipse

$d\varpi = \frac{B}{A}\, dx\ \sqrt{2Ax \pm x^2}$, d'où

$$\varpi = \frac{B}{A}\int dx\sqrt{2Ax \pm x^2} + \text{const.} \ldots (e).$$

Or, $A = B$ étant le caractère de l'hyperbole équilatère et du cercle, on a pour ces deux courbes

$$\varpi = \int dx\sqrt{2Ax \pm x^2} + \text{const.} \ldots\ldots (f);$$

donc les aires des segmens d'hyperbole et d'ellipse, sont respectivement aux aires des segmens correspondans d'hyperbole équilatère et de cercle décrits sur l'axe transverse $2A$, comme le second axe $2B$ est au premier $2A$.

Intégrant l'équation ($c$) par la méthode enseignée à l'article 234, avec la condition que $\varpi = 0$ lorsque

$x = 0$, en prenant l'origine du segment qu'on veut quarrer à celle de la courbe, on aura complètement

$$\varpi = \frac{(2Qx + P)\sqrt{Px + Qx^2}}{4Q} - \frac{P^2}{8Q\sqrt{Q}}$$
$$\times l\left[\frac{2Q}{P}x + 1 + \frac{2\sqrt{Q}}{P}\sqrt{(Px + Qx^2)}\right] \ldots\ldots (g).$$

Prenant $Q$ positif, et substituant à la place de $P$ et de $Q$ leurs valeurs respectives $\frac{2B^2}{A}$ et $\frac{B^2}{A^2}$, on a pour l'hyperbole

$$\varpi = \frac{B}{A}\left\{\frac{x + A}{2}\sqrt{2Ax + x^2} - \frac{A^2}{2}l\left[\frac{x + A + \sqrt{2Ax + x^2}}{A}\right]\right\} (h).$$

Or, cette équation étant affectée d'une quantité transcendante par les logarithmes, qui ne peut s'évanouir qu'en faisant $x = 0$, nous en conclurons que l'hyperbole ne peut se quarrer que par approximation.

De même pour l'ellipse, substituant dans l'équation ($g$) les valeurs respectives $\frac{2B^2}{A}$ et $-\frac{B^2}{A^2}$ de $P$ et de $Q$, et faisant attention que

$$-\sqrt{-1}\,l\left\{1 - \frac{x}{A} + \sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{x}{A}\right)^2\right]}\sqrt{-1}\right\}$$
$$= \text{arc}\left(\cos = 1 - \frac{x}{A}\right) [\text{équat. (189) art. 247}],$$ on aura

$$\varpi = \frac{B}{A}\left\{\frac{A^2}{2}\,\text{arc}\left(\cos = \frac{A - x}{2}\right) - \frac{(A - x)\sqrt{2Ax - x^2}}{2}\right\} (i)$$

Ainsi les quadratures du cercle et de l'ellipse dépendent de la rectification du cercle, et par conséquent ne peuvent s'obtenir que par approximation.

Fig. 3. Prenant l'origine des coordonnées au centre C de l'ellipse AQP et du cercle circonscrit AMN, la for-

mule ($i$) se réduit à celle Fig. 3.

$$\varpi = \frac{B}{A}\left\{\frac{A^2}{2}\text{ arc }(\cos = x) - \frac{x\sqrt{A^2 - x^2}}{2}\right\}\ldots\ldots(k).$$

Or, il est évident que le triangle MDC a pour expression de son aire $\frac{x\sqrt{A^2 - x^2}}{2}$; de même l'expression de l'aire du triangle QDC est $\frac{B}{A}\frac{x\sqrt{A^2 - x^2}}{2}$, d'où il suit, 1°. que le secteur circulaire AMC $= \frac{1}{2}A^2 \times$ arc ( $\cos = x$ ) $= \frac{1}{2}A$ arc AM, ce qui se démontre dans les premiers élémens de Géométrie ; 2°. que le secteur elliptique AQC $= \frac{B}{2} \times A$ arc ( $\cos = x$ ) $= \frac{1}{2}B$ arc AM : donc l'aire d'un secteur elliptique s'obtient en multipliant l'arc correspondant du cercle circonscrit par le quart du petit axe de l'ellipse ; ainsi l'aire entière de l'ellipse est $= AB\pi$, en représentant par $\pi$ le rapport de la circonférence du cercle au diamètre.

Actuellement prenant pour l'hyperbole AB, que nous supposons avoir les mêmes axes que l'ellipse AQP, l'origine des coordonnées au centre C, l'équation ($h$) se réduira à celle

$$\varpi = \frac{B}{A}\left\{\frac{x\sqrt{x^2 - A^2}}{2} - \frac{A^2}{2}\,l\left[\frac{x + \sqrt{x^2 - A^2}}{A}\right]\right\}\ldots(l).$$

Or, l'aire du triangle BEC est évidemment

$$\frac{x}{2} \times \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2},$$

donc le secteur hyperbolique ACB a pour expression de son aire $\frac{AB}{2}\,l\left[\frac{x + \sqrt{x^2 - A^2}}{A}\right]$; et faisant la quantité qui est sous le lien de $l$ égale à la base $e$ du système des logarithmes naturels, ce qui donne

$x = \frac{A^2(e^2+1)}{2A}$, on aura l'aire du secteur hyperbolique correspondant à celle du triangle rectangle formé par les deux demi-axes et une asymptote.

II. Nous avons vu précédemment que la parabole vulgaire est quarrable ; il en est de même des paraboles de tous les genres. En effet, l'équation générale de ces courbes est $y = Px^a$, d'où l'on tire $ydx = Px^a dx$ et $\varpi = \frac{Px^{a+1}}{a+1} = \frac{yx}{a+1}$, donc etc.

III. L'équation générale aux hyperboles de tous les genres étant $yx^a = M$, d'où $ydx = Mx^{-a}dx$, on aura $\varpi = -\frac{M}{(a-1)x^{a-1}} + \text{const.}$ ; ainsi hors le cas de $a = 1$, qui est celui de l'hyperbole vulgaire considérée entre ses asymptotes et pour lequel on a

$$\varpi = Mlx + \text{const.}\ldots\ldots(m),$$

toutes les autres hyperboles sont quarrables.

Pour déterminer la constante de l'équation $(m)$, il
Fig. 3. ne faudra prendre l'origine des aires qu'au point de la courbe où $x = 1$, ce qui donnera complètement $\varpi = Mlx$, et prenant la puissance $M = 1$, il viendra simplement $\varpi = lx$ ; d'où il suit que chaque espace asymptotique AFGK, AFHL etc. est le logarithme naturel de l'abscisse correspondante CG, CH, etc. Ces logarithmes ne sont naturels que dans l'hyperbole équilatère, et dans les autres hyperboles ils ont pour module la cosécante de l'angle des asymptotes. En effet, espaçant également les ordonnées AF, KG, LH, MI, menant les cordes AK, KL, LM, et du point M la droite M$b$ parallèle à l'asymptote C$x$ prise pour axe des $x$ ; enfin représentant par $\omega$ l'angle des asymptotes, et

par $\varpi'$ l'aire de l'espace polygonal AFHL$a'$K$a$A, on aura le trapèze $LHIMa''L = \frac{(HL+IM)HI \sin LHI}{2}$, ou Fig. 3.

$\Delta\varpi' = (y - \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x \sin\omega$ ; d'où

$$\frac{\Delta\varpi'}{\Delta x} = y \sin\omega - \frac{\Delta y \sin\omega}{2} \ldots\ldots (n).$$

Mais si l'ordonnée LH restant fixe ainsi que celle AF, on diminue les espaces $\Delta x$ entre les ordonnées, alors le nombre des côtés du polygone limité par AF et LH augmente, son aire diminue et par conséquent se rapproche sans cesse de celle $\varpi$ de l'espace asymptotique ; et à cause que cette variation se fait avec la meme intensité que le rapprochement de l'ordonnée mobile MI de la fixe HL, il s'ensuit que lorsque $\Delta x$ sera $= 0$, c'est-à-dire que les ordonnées IM, LH se confondront, on aura $\varpi = \varpi'$, d'où $\Delta\varpi = \Delta\varpi' = 0$ ; ce qui, d'après la notation du Calcul différentiel, réduira l'équation $(n)$ à celle $d\varpi = ydx \sin\omega$ ; mais la puissance de l'hyperbole étant $= 1$, on a $y = \frac{1}{x}$, donc $d\varpi = \sin\omega \times \frac{dx}{x}$, d'où on tire complètement $\varpi = \sin\omega\, lx$, ou $\varpi = \frac{lx}{\text{coséc}\,\omega}$, ce que nous voulions démontrer.

IV. Dans la logarithmique dont l'équation est $x = (L_b)y$ ou $y = b^x$ [art. 107], on a $d\varpi = b^x dx$, d'où $\varpi = \frac{b^x}{m}$ + const. en représentant par $m$ le module du système logarithmique qui a pour base $b$ ; or si l'on prend l'origine des aires depuis l'ordonnée $y = 1$ qui correspond à $x = 0$, on aura const. $= -\frac{1}{m}$, d'où il suit qu'on a complètement

$$\varpi = \frac{b^z - 1}{m} \text{ ou } \varpi = \frac{y - 1}{m} \ldots\ldots (o).$$

Faisant $y = o$, l'équation précédente se réduit à $\varpi = -\frac{1}{m}$, ce qui est l'aire de l'espace infiniment long compris depuis l'origine de la logarithmique entre cette courbe et son asymptote.

V. Pour quarrer la cycloïde, nous pourrions nous servir de son équation différentielle entre ses coordonnées rectangulaires, qui, comme nous l'avons démontré à l'article 114, est

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(2ry - y^2)}} \text{ d'où } \varpi = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ry - y^2)}} + \text{const.};$$

mais l'intégration à effectuer exigeant d'assez longs calculs, il est plus simple de se servir des équations trigonométriques de la courbe qui, comme nous l'avons démontré à l'article 112, sont $y = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega}{r}$, et $x = \omega - \sin \omega$; d'où $dx = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega d \frac{1}{2} \omega}{r}$, et par conséquent $d\varpi = ydx = \frac{8}{r^2} \sin^4 \frac{1}{2} \omega d \frac{1}{2} \omega$; et intégrant par le moyen de la formule (237)[art. 281], on aura

$$\varpi = \frac{r}{4} \sin 2\omega - 2r \sin \omega + \tfrac{3}{2} r\omega \ldots (p),$$

sans constantes, si l'on prend l'origine du segment qu'on veut quarrer, à l'origine de la courbe; car pour $\omega = o$ on aura $\varpi = o$.

Faisant $\omega = 2r\pi$, c'est-à-dire, = à toute la circonférence du cercle générateur, en représentant par $\pi$ le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, on aura l'équation ($p$) qui se réduira à celle $\varpi = 3r^2\pi$.

Mais $r^2\pi$ est l'aire du cercle générateur; donc l'aire de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur.

533. Considérons maintenant la courbe quelconque $AmBm'B'm''B''\ldots$ rapportée à son pôle P, et cherchons l'expression générale de l'aire de l'espace $AmBm'B'PA$ que nous représenterons par $\varpi$, compris entre le rayon vecteur PA, qu'on peut toujours considérer comme passant par l'origine A de la courbe, et celui $PB'(v)$ formant avec le premier un angle d'anomalie $APB'(\alpha)$. Cela posé, du point P menons un nombre quelconque de rayons vecteurs PB, PB′, PB″ formant entre eux des angles égaux APB, BPB′, B′PB″($\Delta\alpha$), et joignons les points A, B, B′, B″ par les cordes AB, BB′, B′B″. Nous aurons d'après cette construction, un espace polygonal ABB′P ($\varpi'$) inscrit à celui courbe $\varpi$, et dont la différence $\Delta\varpi'$ est le triangle PB′B″; Or, si nous prenons pour base de ce triangle le côté $PB''(=v+\Delta v)$, il est clair que sa hauteur sera $B'P \times \sin B'PB''$ ou $v \sin \Delta\alpha$; donc l'aire de ce triangle ou $\Delta\varpi' = \frac{v+\Delta v}{2} \times v \sin \Delta\alpha$. Fig. 2.

Développant $\sin \Delta\alpha$, et divisant par $\Delta\alpha$, nous aurons

$$\frac{\Delta\varpi'}{\Delta\alpha} = \frac{v^2+v\Delta v}{2} - \frac{v^2+v\Delta v}{2}\,\frac{\Delta\alpha^2}{2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots(a)$$

Mais si on diminue la grandeur des angles égaux $\Delta\alpha$, alors le nombre des côtés du polygone inscrit augmentant, il est clair que l'aire $\varpi'$ de l'espace polygonal s'agrandissant, s'approche sans cesse de l'espace courbe $\varpi$, et comme le rayon vecteur PB″ se rapproche sans cesse de celui fixe PB′ à mesure que $\Delta\alpha$ diminue, il s'ensuit que lorsque $\Delta\alpha$ étant devenu $=0$, le rayon vecteur PB″ se confond avec celui PB′, d'où $\Delta v = 0$, on aura $\varpi = \varpi'$,

d'où $\Delta\varpi = \Delta\varpi' = 0$ ; donc d'après la notation du Calcul différentiel, l'équation ($a$) se réduira à celle $\frac{d\varpi}{d\alpha} = \frac{v^2}{2}$, d'où

$$d\varpi = \tfrac{1}{2} v^2 d\alpha \ldots\ldots (556),$$

ce qui est la formule demandée de la différentielle des quadratures des courbes polaires.

Appliquant cette formule aux spirales de tous les genres dont l'équation générale est

$$v = p\alpha^b \ldots\ldots (b),$$

on aura $d\varpi = \frac{1}{2}p^2\alpha^{2b}d\alpha$, d'où intégrant, on aura complètement

$$\varpi = \frac{p^2\alpha^{2b+1}}{2(2b+1)} \ldots\ldots (c),$$

en prenant l'origine des aires à celle du rayon vecteur PA qui passe par l'origine A de la courbe. Cette valeur de $\varpi$ étant affectée de la quantité transcendante $\alpha$, nous en conclurons que les espaces spiraux ne sont quarrables que par approximation.

Dans la spirale logarithmique dont l'équation est log. $v = \alpha$ (art. 142), en représentant par log. le logarithme dans un système qui a pour module $m$, on a $v^2 = e^{2m\alpha}$, d'où $d\varpi = e^{2m\alpha}d\alpha$ ; et intégrant, il vient $\varpi = \frac{e^{2m\alpha}}{2m} +$ const. Or, si on prend l'origine des aires au rayon vecteur qui aboutit au point d'intersection de la spirale et du cercle directeur, lequel est le rayon de ce cercle ; on aura $\varpi = 0$ lorsque $\alpha = 0$, donc const. $= -\frac{1}{2m}$, ce qui donne complètement $\varpi = \frac{e^{2m\alpha} - 1}{2m}$

ou $\varpi = \frac{v^2 - 1}{2m}$, puisque de la proposée on tire $v = e^{m\alpha}$. Dans la spirale logarithmique naturelle on a $m = 1$, et par conséquent $\varpi = \frac{v^2 - 1}{2}$. Faisant $v = 0$, il vient $\varpi = -\frac{1}{2}$; donc l'aire de l'espace spiral compris dans le cercle directeur, est égale à celle du triangle rectangle formé par deux rayons perpendiculaires de ce cercle et la corde de 100° qui joint leurs extrémités. Mais nous avons vu à l'article 530 que la longueur entière de la partie intérieure au cercle directeur de la spirale logarithmique était égale à cette corde; donc l'aire de l'espace spiral intérieur est égal à son périmètre multiplié par $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ou si l'on veut, à son périmètre multiplié par le rayon vecteur qui forme en dessous du premier rayon vecteur, un angle dont la valeur est à moins d'un dix-millième près 66°, 1968.

---

# CHAPITRE III.

## *De la quadrature des surfaces courbes, et de la cubature des volumes terminés par de pareilles surfaces.*

534. Soit BKI la partie d'une surface courbe contenue dans l'un des huit angles trièdres formés par les trois plans coordonnés rectangulaires, et que nous supposerons être celui où toutes les coordonnées sont Fig. 4.

Fig. 4. positives ; soit de plus un segment BC$a$M de cette surface, limité par les deux plans des $xz$, $yz$ et par deux autres plans CcG, M$m$N respectivement parallèles aux deux premiers : représentons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point $a$, et par $S$ l'aire du segment BC$a$M de la surface courbe. Nous nous proposons dans cet article de trouver l'expression analytique de $S$, ce qui constitue la solution générale du problème des quadratures des surfaces courbes.

Divisant respectivement les deux coordonnées A$m$ ou $x$ et A$c$ ou $y$ du point $a$, en un nombre quelconque de parties égales $\Delta x$ et $\Delta y$, portant l'une de ces premières parties de $m$ en $e$ sur l'axe des $x$, et l'une des secondes de $c$ en $f$ sur l'axe des $y$ ; ensuite faisant passer par tous les points de division $\Delta x$, des plans parallèles à celui des $yz$, et par tous les points de division $\Delta y$, des plans parallèles à celui des $xz$, il est clair que les intersections de ces plans avec la surface courbe, détermineront sur le segment BC$a$M des quadrilatères courbes pareils à celui $abqp$ qui est extérieur au segment qu'on veut quarrer, mais qui correspond comme les petits quadrilatères intérieurs à l'intersection de quatre plans parallèles de deux à deux, et dont les distances respectives sont $\Delta x$ et $\Delta y$. Maintenant supposons que par le sommet de l'un des quatre angles de chaque petit quadrilatère, et placé d'une manière semblable par rapport au sommet B de la surface courbe, par exemple, le sommet d'angle le plus voisin de B, tel est celui $a$ relativement au quadrilatère $abqp$, ou fasse passer un plan tangent à la courbe ; il est évident que la partie d'un tel plan tangent interceptée entre les quatre plans qui déterminent sur la surface courbe le quadrilatère courbe correspondant, sera un parallélogramme rectangle, puisque, prenant pour exemple le quadri-

latère *abqp*, les deux côtés du quadrilatère plan, tangent en *a* à la surface courbe, qui sont tangens aux arcs *ap*, *ab* appartenant aux plans respectifs perpendiculaires entre eux CcG, M*m*N, forment un angle droit, et que les deux plans CcG, F*f*H étant parallèles entre eux, la partie de la tangente à l'arc *ab* comprise entre ces deux plans, sera égale à la partie de la trace du plan tangent en *a* sur le plan E*e*D interceptée entre les plans CcG et F*f*H; on aura donc par cette construction la surface BC*a*M couverte d'un système de petits parallélogrammes rectangles plans, dont le nombre sera égal à celui des petits quadrilatères courbes; et la même chose aura lieu pour l'espace CF*ba* et pour celui M*bq*E dans lequel est compris le petit quadrilatère courbe *abqp*. Représentons par $S'$ la surface de tout le système de petits parallèlogrammes rectangles qui couvre le segment de surface courbe BC*a*M, ou $S$, et par $P$ le parallélogramme qui couvre le quadrilatère courbe *abqp*. Fig. 4.

Cela posé, il est évident que $S'$ étant une fonction de $x$ et $y$, puisque sa grandeur dépend de celles de chacune de ces deux variables, on aura en faisant varier $S'$ par rapport à $x$ et $y$ des quantités respectives $\Delta x$ et $\Delta y$, la surface du système de tous les parallélogrammes rectangles qui couvrent l'espace courbe BF*q*E qui, d'après la formule (57) (art. 73), sera égal à

$$S' + \Delta^y S' + \Delta^x S' + \frac{d^x d^y S'}{dx dy}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{d^{2x} d^y S'}{dx^2 dy}\,\frac{\Delta x^2 \Delta y}{2}$$
$$+ \frac{d^x d^{2y} S'}{dx dy^2}\,\frac{\Delta x \Delta y^2}{2} + \text{etc.}\ldots(a)[*].$$

(*) Il faut faire attention que toute la première ligne horizontale de la formule (57) est $= \omega + \Delta^y \omega$, et que toute la seconde ligne ho-

Fig. 4. Mais si l'on ne fait varier $S'$ que par rapport à $x$ de $\Delta x$, on aura *la surface du système de parallélogrammes rectangles qui couvrent l'espace courbe* BCpE $= S' + \Delta^x S'$.

Et si l'on ne fait varier $S'$ que par rapport à $y$ de $\Delta y$, on aura *la surface du système de parallélogrammes rectangles qui couvrent l'espace courbe* BF$b$M $= S' + \Delta^y S'$.

Ajoutant ces deux dernières égalités, et retranchant de la somme l'égalité *surface du système de parallélogrammes qui couvrent l'espace courbe* BC$a$M $= S'$, on aura, *surface du système de parallélogrammes* qui couvrent l'espace courbe BF$bap$EB $= S' + \Delta^x S' + \Delta^y S'$ : enfin retranchant cette dernière égalité de celle ($a$), il viendra le parallélogramme qui couvre le quadrilatère courbe $abqp$, c'est-à-dire

$$P = \frac{d^x d^y S'}{dx dy}\,\Delta x \Delta y + \frac{d^{2x} d^y S'}{dx^2 dy}\,\frac{\Delta x^2 \Delta y}{2} + \frac{d^x d^{2y} S'}{dx dy^2}\,\frac{\Delta x \Delta y^2}{2} + \text{etc.} \ldots\ldots (b).$$

Mais $x$, $y$, $z$ étant les coordonnées du point $a$, et représentant par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du plan tangent en $a$, et dans lequel se trouve $P$, on aura pour équation de ce plan

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \ldots\ldots (c);$$

donc $A$ est la tangente trigonométrique de l'angle que forme la trace du plan tangent en $a$ sur le plan des $xz$ avec l'axe des $x$, et $B$ est la tangente trigonométrique de l'angle que forme la trace du plan tan-

---

rizontale est $= \Delta^x \omega$; ainsi cette formule pourrait s'écrire sous la forme $\omega' = \omega + \Delta^y \omega + \Delta^x \omega +$ tous les termes inférieurs aux deux premières lignes horizontales.

gent en $a$ sur le plan des $yz$ avec l'axe des $y$; donc Fig 4.
d'après l'équation (92), on aura

$$(d)\ldots\ldots A=\frac{d^x z}{dx} \quad \text{et} \quad B=\frac{d^y z}{dy}\ldots(e)[*],$$

et par conséquent le cosinus de l'angle formé par le

---

[*] Pour rendre plus sensible la vérité de ces deux équations, concevons que par le point $a$ on a abaissé une perpendiculaire sur le plan des $xz$, ce qui déterminera sur ce plan la projection du point $a$ qui, conséquemment, aura les mêmes coordonnées $z$ et $x$ que le point $a$. Faisons passer par la perpendiculaire un plan qui, évidemment, sera perpendiculaire au plan des $xz$, en le faisant tourner autour de sa directrice jusqu'à ce que sa trace sur le plan des $xz$ soit parallèle à celle sur le même plan du plan tangent. Ainsi représentant par $x''$, $y''$ et $z''$ les coordonnées de ce nouveau plan, il est clair que sa trace sur le plan des $xz$ formant avec l'axe des $x$ un angle égal à celui formé avec le même axe par la trace du plan tangent, on aura pour équation du nouveau plan

$$z''-z=A(x''-x)+B'(y''-y)\ldots\ldots(\alpha),$$

$$\text{donc } A=\frac{dz''}{dx''}\ldots\ldots(\zeta)\ [\text{équat. }(92)].$$

Mais $A$ étant une quantité constante dans toute la longueur de la trace du plan de l'équation ($\alpha$), et la projection du point $a$ sur le plan des $xz$ étant placée sur la trace en question, il s'ensuit qu'on a aussi

$$A=\frac{dz}{dx}\ldots\ldots(\gamma).$$

Or, si par le point $a$ on fait passer un plan parallèle à celui de $xz$, et dont conséquemment l'équation sera $y=$ const.; et si ensuite on fait mouvoir le long de la verticale qui passe par $a$, un plan parallèle à celui des $xy$, il est clair que les intersections du plan de l'équation $y=$ const. avec les deux plans perpendiculaires à celui des $xz$, l'un parallèle au plan des $xy$, l'autre ayant pour directrice la perpendiculaire abaissée de $a$ sur le plan des $xz$, formeront un angle dont les deux côtés seront parallèles chacun à chacun avec ceux de l'angle dont la tangente est $A$; ainsi il ne faut différentier $z$ dans l'équation ($\gamma$) que par rapport à $x$, ce qui donne l'équation ($d$). Il est clair que l'équation ($e$) se démontre exactement de même que celle ($d$).

Fig. 4. plan tangent en $a$ avec le plan des $xy$ sera $\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{d^xz}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^yz}{dy}\right)^2\right]}}$ (Biot, art. 65). Or, l'aire du parallélogramme rectangle $P$ se composant du produit de ses deux côtés respectivement tangens en $a$ aux arcs $ap$, $ab$, et le premier de ces deux côtés étant égal au quotient de sa projection $ng$ ou $\Delta x$ sur le plan des $xy$ divisée par le cosinus de l'angle que forme ce dernier plan avec celui tangent en $a$; de même le côté de $P$ tangent en $a$ à l'arc $ab$, étant égal à sa projection $no$ ou $\Delta y$ sur le plan des $xy$, divisée par le cosinus de l'angle formé par le plan tangent en $a$ avec le plan des $xy$, on aura

$$P=\Delta x\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{d^xz}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^yz}{dy}\right)^2}.$$

Substituant cette valeur de $P$ dans l'équation ($b$), et divisant l'équation résultante par $\Delta x\Delta y$, il viendra celle

$$\sqrt{\left[1+\left(\frac{d^xz}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^yz}{dy}\right)^2\right]}=\frac{d^xd^yS'}{dxdy}+\frac{d^{2x}d^yS'}{dx^2dy}\Delta x$$
$$+\frac{d^xd^{2y}S'}{dxdy^2}\Delta y+\text{etc.}\ldots\ldots(f).$$

Mais si maintenant nous faisons décroître $\Delta x$ et $\Delta y$ dans une même proportion à leurs grandeurs respectives, alors il est évident qu'à mesure que cette diminution aura lieu, le nombre des parallélogrammes rectangles tels que $P$ qui couvrent la surface courbe BC$a$M augmentera, et l'aire de ce système de parallélogrammes se rapprochera sans cesse de celle de la surface courbe; de manière que quand les deux plans E$e$D, F$f$H se seront simultanément réunis avec ceux M$m$N, C$c$G à qui ils sont respectivement parallèles, et

et qui terminent la surface courbe qu'on veut quarrer, Fig. 4.
ce qui donnera $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$, l'aire $S$ de cette dernière surface sera rigoureusement la meme que celle $S'$ du système des petits parallélogrammes rectangles qui la couvrait; ainsi l'équation $(f)$ se réduira à celle

$$\frac{d^x d^y S}{dx dy} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d^x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^y z}{dy}\right)^2\right]}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par $dxdy$, et intégrant successivement par rapport à $y$ et $x$, ou l'inverse, suivant que le premier calcul présente moins ou plus de difficulté que le second, on aura

$$\left.\begin{aligned} S &= \int^x dx \int^y dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d^x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^y z}{dy}\right)^2\right]} \\ \text{ou } S &= \int^y dy \int^x dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d^x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^y z}{dy}\right)^2\right]} \end{aligned}\right\} (557)$$

535. Dans les surfaces de révolution, les formules précédentes se réduisent à une seule qui ne renferme qu'une intégrale simple. En effet, la surface BCKDIMB étant considérée comme engendrée par la revolution de la courbe BMI tournant autour de l'axe $AX$, toutes les courbes, telles que celles BCK, M$a$N, E$p$D seront des arcs de cercle ayant respectivement pour rayons les droites AK, $m$N, $e$D qui sont les ordonnées de la courbe génératrice IHK, et qui conséquemment sont des fonctions des abscisses $x$. Soit donc représenté par $X$ une telle ordonnée N$m$, on aura, d'après la propriété du cercle et relativement au point $a$, l'équation $\overline{an}^2 = (Nm + mn)(Nm - mn)$ ou $z^2 = (X + y)(X - y) = X^2 - y^2$, donc $\frac{d^x z}{dx} = \frac{X}{\sqrt{X^2 - y^2}} \frac{dX}{dx}$, et

Fig. 4. $\frac{dz}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{X^2 - y^2}}$ : substituant ces valeurs dans la première des deux équations (557), il vient

$$S = \int^x \sqrt{[dx^2 + dX^2]} X \int^y \frac{dy}{\sqrt{[X^2 - y^2]}} \ldots (a) :$$

mais le dernier facteur intégral est $= \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{X}\right)$; ainsi substituant cette valeur dans l'équation ($a$), on aura la valeur de S relative au seul quadrilatère courbe BC$a$M, et si l'on veut avoir l'aire de tout le segment BKNM, il faudra faire $y = mN = X$, ce qui donnera $\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{X}\right) = \text{arc}\ (\sin = 1) = \frac{\pi}{2}$ : or cette bande courbe BKNM comprise dans l'angle droit formé par les plans des $xz$ et $xy$, n'est que le quart de la zône faisant tout le tour de la surface de révolution et correspondante à l'abscisse $x = \text{A}m$; donc pour avoir la surface de cette zône, il faudra mettre à la place de $\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{X}\right)$ la quantité $2\pi$; ainsi la formule ($a$) se réduira à celle $S = 2\pi \int X \sqrt{dX^2 + dx^2}$, ou représentant par $y$ les ordonnées M$m$ ou N$m$ de la génératrice de la surface courbe, à la place de les représenter comme précédemment par $X$, nous aurons

$$S = 2\pi \int y \sqrt{dy^2 + dx^2} \ldots\ldots (558);$$

ce qui est la formule générale des quadratures des surfaces de révolution.

Pour faire une application de cette formule, proposons-nous de trouver l'aire de l'ellipsoïde alongé de révolution, ayant son centre à l'origine des coordonnées. L'équation de l'ellipse génératrice rapportée à

son centre est $y=\frac{B}{A}\sqrt{A^2-x^2}$, donc $dy^2=\frac{B^2}{A^2}\frac{x^2dx^2}{(A^2-x^2)}$,

d'où $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=\frac{dx\sqrt{A^4-(A^2-B^2)x^2}}{A\sqrt{[A^2-x^2]}}$

$=\frac{dx\sqrt{[A^4-E^2x^2]}}{A\sqrt{A^2-x^2}}$, en représentant par $E$ l'excentricité. Substituant ces valeurs dans l'équation (558), il vient $S=\frac{2B\pi}{A^2}\int dx\sqrt{[A^4-E^2x^2]}=2A^2B\pi\int\frac{dx}{\sqrt{A^4-E^2x^2}}$

$-\frac{2BE^2\pi}{A^2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[A^4-E^2x^2]}}$; effectuant les intégrations par le moyen des formules (134) [art. 206] et (151) [art. 220] : on a

$$S=2B\pi\left\{\frac{A^2}{E}\text{arc}\left(\sin=\frac{Ex}{A^2}\right)+\frac{E}{A^2}x\sqrt{A^4-E^2x^2}\right\}(b),$$

sans constantes, puisque pour $x=0$ on a $S=0$. Faisant $x=A$, ensuite doublant le résultat, on trouvera que l'aire de l'ellipsoïde entier de révolution est égale à $4B\pi\left\{\frac{A^2}{E}\text{arc}\left(\sin=\frac{E}{A}\right)+EB\right\}$.

En faisant $A=B$, d'où $E=0$, ce qui est le caractère de la sphère, l'équation ($b$) dans laquelle le dernier terme s'évanouit, se réduit à $S=\frac{0}{0}$. Mais par la méthode enseignée à l'article 60, on trouvera en différentiant le numérateur et le dénominateur du premier terme du second membre de l'équation ($b$), qu'il se réduit à $\frac{2B\pi x}{\sqrt{\left(1-\frac{E^2x^2}{A^2}\right)}}$, quantité qui est égale à $2A\pi x$ lorsqu'on fait $A=B$, d'où $E=0$; ainsi prenant $x=A$,

Fig. 4. et ensuite doublant, on a, pour l'expression de l'aire de la sphère entière dont le rayon est $A$, la quantité $4A^2\pi$, ce qu'on sait déjà par les premiers principes de Géométrie.

536. Nous occupant maintenant de la cubature des volumes terminés par des surfaces courbes, représentons par $V$ la solidité du volume BC$a$MA$cnm$, et cherchons l'expression analytique de $V$ en fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$ du point $a$ par où passent les deux plans CcG, M$m$N qui, respectivement parallèles aux plans des $xz$ et $yz$, terminent ce volume.

Faisant la même construction qu'à l'article 534, il est évident que nous formerons entre les quatre plans qui limitent $V$, une suite de petits volumes dont le nombre sera égal à celui des $\Delta x$ multiplié par le nombre des $\Delta y$, respectivement compris entre $A$ et $m$, et entre $A$ et $c$ : tous ces petits volumes ayant même base $\Delta x \Delta y$, auront chacun pour face supérieure le petit parallélogramme rectangle qui couvre le petit quadrilatère courbe correspondant; la même chose aura lieu pour le volume CE$bacfon$ et pour celui ME$qbmeho$, dans lequel est compris le petit solide à faces planes correspondant au petit volume à face supérieure courbe $abqpnohg$. Cela posé, représentant par $V'$ la solidité du système des petits solides à faces planes correspondant à $V$, et par $U$ le petit solide à faces planes ayant pour base $nohg$, on trouvera par un raisonnement parfaitement semblable à celui employé à l'article 534, que

$$U = \frac{d^x d^y V'}{dx dy} \Delta x \Delta y + \frac{d^{2x} d^y V'}{dx^2 dy} \Delta x^2 \Delta y$$
$$+ \frac{d^x d^{2y} V'}{dx dy^2} \Delta x \Delta y^2 + \text{etc} \ldots\ldots (a)$$

Or, il est évident que $U < \Delta x \Delta y \times an$, et $> \Delta x \Delta y \times qh$; mais $an = z$ et $qh$ est ce que devient $z$ lorsque $x$ et $y$ ont simultanément varié de leurs différences respectives $\Delta x$ et $\Delta y$; donc le volume $U$ est compris entre $z \Delta y \Delta x$ et $(z - \Delta z) \Delta y \Delta x$; ainsi $U = z \Delta y \Delta x - \frac{\Delta y \Delta x \Delta z}{n}$, en représentant par $n$ un nombre positif et réel $> 1$. Egalant cette valeur de $U$ avec celle donnée par l'équation $(a)$, et divisant par $\Delta y \Delta x$, on aura

$$z - \frac{\Delta z}{n} = \frac{d^x d^y V'}{dxdy} + \frac{d^{2x} d^y V'}{dx^2 dy} \Delta x + \frac{d^x d^{2y} V'}{dxdy^2} \Delta y + \text{etc.} \ldots\ldots (b).$$

Faisant $\Delta x = 0$, d'où $\Delta y = 0$ et $\Delta z = 0$, nous avons vu à l'article 534 que la surface du système des petits parallélogrammes qui couvrent le segment de surface courbe BC$a$M s'identifie avec cette dernière surface; donc alors on aura $V$ et $V'$ qui ne différaient que par cette face, qui seront égaux, et par conséquent tous les termes de l'équation $(b)$ affectés de $\Delta x$, $\Delta y$ et $\Delta z$ s'évanouissant, cette équation se reduira à celle

$$z = \frac{d^x d^y V}{dxdy}, \text{ d'où } d^x d^y V = zdxdy, \text{ et}$$

$$\left\{ V = \int^x dx \int^y zdy \quad \text{ou} \quad V = \int^y dy \int^x zdx \right\} \ldots (559).$$

Substituant dans celle de ces deux équations qu'on choisira, la valeur de $z$ en fonctions des $x$ et $y$ donnée par l'équation de la surface proposée, on aura par deux simples intégrations successives de formules différentielles du premier ordre et à une seule variable, puisque chacune des deux intégrations proposées est partielle, la cubature du volume proposé.

Fig. 4. 537. Dans les solides de révolution, nous avons vu à l'art. 535, que $\overline{an}^2$ ou $(z^2) = \overline{Nm}^2 - \overline{nm}^2 = (X^2 - y^2)$, donc $\int^y z dy = \int^y dy \sqrt{X^2 - y^2} = X^2 \int^y \frac{dy}{\sqrt{X^2 - y^2}}$

$$- \int^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{X^2 - y^2}} = \tfrac{1}{2} X^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{X}\right) + \tfrac{1}{2} y \sqrt{X^2 - y^2}$$

[équat. (134) et (150)] : substituant cette valeur dans la première des deux équations (559), et ensuite intégrant par rapport à $x$, on aura la solidité du segment BC$a$MA$cnm$ du volume de révolution ; mais pour avoir le volume de BAKN$m$M, il faudra faire $y = m\text{N} = X$, ce qui réduira l'équation précédente à celle $\int^y z dy = \frac{1}{2} X^2 \times \operatorname{arc}(\sin = 1) = \frac{1}{4} \pi X^2$, donc $V = \frac{1}{4} \pi \int X^2 dx$ ; mais cette cubature étant rapportée aux fonctions des seules coordonnées N$m$ ($y$) et A$m$ ($x$) de la courbe génératrice ; nous aurons, pour la tranche entière du volume de révolution correspondant à l'abscisse $x$, et qui est quadruple de la partie que nous considérions,

$$V = \pi \int y^2 dx \ldots\ldots (560),$$

ce qui est la formule générale de cubature des solides de révolution.

Application. L'équation générale aux courbes du second degré étant $y^2 = Px + Qx^2$, on aura pour tous les volumes de révolution du second degré

$$V = \pi P \int x dx + \pi Q \int x^2 dx \text{ ou}$$

$$V = \pi \left[ \frac{Px^2}{2} + \frac{Qx^3}{3} \right] \ldots\ldots (a),$$

sans constantes, puisque pour $x = 0$, on a $V = 0$.

Faisant $Q = 0$, ce qui est le caractère de la parabole, il vient pour le paraboloïde de révolution

$V = \pi \frac{Px^2}{2} = \frac{xy^2\pi}{2}$; mais $y^2\pi$ est la surface du cercle engendré par $y$ dans la révolution de la parabole autour de son axe, et $x$ est la hauteur du cylindre droit circonscrit au segment de paraboloïde qu'on cube; donc la solidité du segment de paraboloïde de révolution est égale à la moitié de celle du cylindre circonscrit.

Dans l'ellipsoïde alongé, de révolution, dont les caractères sont $P = \frac{2B^2}{A}$ et $Q = -\frac{B^2}{A^2}$, l'équation $(a)$ se réduit à celle

$$V = \frac{B^2}{A^2} x\pi \left[ Ax - \frac{x^2}{3} \right] = \frac{\pi x}{3} \frac{B^2}{A^2} (2Ax - x^2)$$
$$+ \frac{B^2}{A} \frac{\pi x^2}{3} = \frac{xy^2\pi}{3} + \frac{P\pi x^2}{6} \ldots\ldots (b):$$

donc le volume d'un segment d'ellipsoïde de révolution est égal au tiers de celui du cylindre inscrit, plus le sixième de celui qui aurait pour base un cercle du rayon $x$, et pour hauteur le paramètre de l'ellipse de révolution. Si l'on fait $x = 2A$, ce qui donne $y = 0$, la valeur précédente de $V$ donnera pour l'expression du volume entier de l'ellipsoïde alongé de révolution $\frac{4AB^2\pi}{3}$; donc le volume de ce solide est les deux tiers de celui du cylindre circonscrit.

Faisant $B = A$, ce qui est le caractère de la sphère, la formule $(b)$ se réduit à $V = \frac{xy^2\pi}{3} + \frac{A\pi x^2}{3}$; donc la différence du volume d'un segment d'ellipsoïde de révolution à celui correspondant de la sphère circonscrite, est $\frac{E^2}{A} \frac{\pi x^2}{3}$, en représentant par $E$ l'excen-

tricité de l'ellipsoïde. Faisant $x = 2A$, la valeur précédente de $V$ donne pour le volume de la sphère entière $\frac{4A^3\pi}{3}$, ce qu'on sait déjà par les premiers élémens de Géométrie.

Dans l'hyperboloïde de résolution, dont les caractères sont $P = \frac{2B^2}{A}$ et $Q = \frac{B^2}{A^2}$, on parviendra de même à l'équation ($b$). Nous ne nous arrêterons pas sur la discussion de ce volume.

---

# CHAPITRE IV.

## *Application du Calcul intégral à quelques questions et théories générales de Géométrie.*

538. On appelle généralement en Géométrie *trajectoire*, une courbe qui coupe sous un même angle une famille de courbes d'un même genre dont les individus résultent de la variation d'une constante arbitraire, ou paramètre qui entre dans l'équation de cette courbe; ainsi représentant par $p$ une constante arbitraire, ou paramètre variable d'une courbe à l'autre, et par $F(x, y, P) = 0$ l'équation de cette famille de courbes semblables; leur trajectoire sera une courbe telle, que les angles que formeront successivement ses tangentes avec celles des courbes semblables et variables de paramètre, aux points où elles sont coupées par la trajectoire, seront tous égaux. Le

problème des *trajectoires* consiste à déduire de l'équation donnée

$$F(x, y, P) = 0 \ldots (a),$$

d'une famille de courbes semblables, celle

$$\varphi(x', y') = 0 \ldots (b)$$

de leur trajectoire. Pour parvenir à la solution de ce problème, on observera que représentant par $a$ la tangente trigonométrique de l'angle sous lequel la trajectoire coupe toutes les courbes semblables de paramètre différent, on aura pour l'une quelconque de ces dernières courbes, $a = \dfrac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy'}{dx'}}{1 + \dfrac{dydy'}{dxdx'}}$; or, d'après l'équation donnée $(a)$, on a $\dfrac{dy}{dx} = f(x, P)$; donc

$$a[dx' + f(x, P)dy'] = f(x, P)dx' - dy' \ldots (c).$$

Mais au point où la trajectoire coupe l'une des courbes semblables de paramètre variable, on a $y = y'$ et $x = x'$, ainsi l'équation $(c)$ prendra la forme de celle

$$(af(x, P) + 1)dy = [f(x, P) - a]dx \ldots (d),$$

qui est particulière à l'une des courbes variables, mais qu'on rendra générale à toutes les courbes de l'équation donnée $(a)$, en éliminant entre cette dernière équation et celle $(d)$, la quantité $P$, ce qui donnera une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$F_1(x, y, dx, dy) = 0 \ldots (e),$$

qui étant intégrée, donnera l'équation demandée de la trajectoire.

La trajectoire est dite *orthogonale* lorsqu'elle doit couper toutes les lignes de paramètre variable, sous un angle droit, et puisqu'alors $a$ doit être $= \frac{1}{0}$, l'équation $(d)$ se réduira à celle

$$F(x, P)dy + dx = 0 \ldots\ldots (f).$$

Le reste de l'opération comme précédemment.

EXEMPLE I. *Trouver la trajectoire des courbes du second degré.*

L'équation générale de ces courbes étant

$$y^2 = Px + Qx^2 \ldots\ldots (g),$$

on aura $f(x, P)\left[= \frac{dy}{dx}\right] = \frac{P + 2Qx}{2y}$. Substituant ces valeurs dans l'équation $(d)$, on a celle

$$(aP + 2aQx + 2y)dy = (P + 2Qx - 2ay)dx,$$

et éliminant $P$ entre cette dernière équation et la proposée $(g)$, il vient, toutes réductions faites, l'équation différentielle

$$(ay^2 + aQx^2 + 2xy)dy = (y^2 + Qx^2 - 2ayx)dx \ldots\ldots (h)$$

qui, étant homogène, se séparera aisément par la méthode enseignée à l'article 339 : mais cette séparation nous menant à intégrer l'équation différentielle et rationnelle

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(az^2 + 2z + aQ)dz}{az^3 + z^2 + (aQ + 2a)z - Q} \ldots\ldots (i),$$

dans laquelle $z = \frac{y}{x}$ [équat. (285)], nous n'entreprendrons pas, à cause de la longueur des calculs, de l'intégrer généralement ; nous nous occuperons donc seulement des trajectoires orthogonales des courbes du second degré, ce qui réduit l'équation $(h)$ à celle

$$(y^2 + Qx^2)dy = -2yxdx \ldots (k),$$

et sa transformée ($i$) à celle

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(z^2+Q)dz}{2(z^2+Q+2)} = -\frac{zdz}{z^2+Q+2} - \frac{Q}{Q+2}\frac{dz}{z}$$
$$+\frac{Q}{2(Q+2)}\left[\frac{dz}{z+\sqrt{(Q+2)}\sqrt{-1}} + \frac{dz}{z-\sqrt{(Q+2)}\sqrt{-1}}\right]$$

dont l'intégrale est $x = \frac{c}{\sqrt[Q+2]{[z^Q(z^2+Q+2)]}}$, en représentant par $c$ une constante arbitraire. Remettant pour $z$ sa valeur $yx^{-1}$, divisant les deux membres de l'équation par $x$, chassant le dénominateur et élevant les deux membres de l'équation à la puissance $Q+2$, en représentant toujours par $c$ la constante arbitraire $\sqrt[Q+2]{c}$, on a

$$y^Q[y^2+(Q+2)x^2] = c \ldots\ldots (l),$$

ce qui est l'équation générale des trajectoires orthogonales des sections coniques.

Faisant $Q=0$, ce qui est le caractère de la parabole, on a pour traiectoire orthogonale de cette courbe, la courbe de l'équation

$$y^2 + 2x^2 = c \ldots\ldots\ldots (m),$$

laquelle est un ellipse ayant son centre à l'origine commune des paraboles du paramètre $P$ variable de l'une à l'autre, le petit axe $= \sqrt{2c}$ dans le sens de l'axe des $x$ et le grand axe $= 2\sqrt{c}$ dans le sens de l'axe de $y$; et comme $c$ est une constante arbitraire qu'il faut seulement prendre toujours positive, il s'ensuit que le système des paraboles de paramètres différens $P$, a pour trajectoires orthogonales un nombre

infini d'ellipses dont le rapport du grand au petit axe est $= \sqrt{2}$; ainsi ces deux systèmes de courbes sont réciproquement trajectoires orthogonales l'un de l'autre.

Pour vérifier ce résultat, observons que dans la parabole de l'équation $y^2 = Px$, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2y}$, ce qui est la tangente trigonométrique de l'angle que forme la tangente de la parabole avec l'axe des $x$ au point de la courbe dont les coordonnées sont $x$ et $y$; donc la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe des abscisses avec la droite perpendiculaire au point $x$ et $y$ à la tangente de la parabole, doit être $-\frac{2y}{P}$. Or, en différentiant l'équation $y^2+2x^2 = c$ de l'ellipse, on a $ydy = -2xdx$, d'où $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$. Mais au point où l'ellipse coupe la parabole, on a $x = \frac{y^2}{P}$; donc la tangente trigonométrique de l'angle que forme la tangente de l'ellipse au point $x$ et $y$, avec l'axe des $x$, est $-\frac{2y}{P}$, et par conséquent les tangentes des deux courbes à ce point, sont perpendiculaires entre elles, donc etc.

Faisant $Q = -\frac{B^2}{A^2}$, ce qui est le caractère de l'ellipse, il semble, d'après ce que nous venons de dire, que l'équation ($k$) devrait nous donner celle d'un système indéfini de paraboles de paramètres différens; c'est cependant ce qui n'arrive pas; car dans le cas de $Q = -\frac{B^2}{A^2}$, l'équation ($l$) se change en celle

$$y^2 + \left(2 - \frac{B^2}{A^2}\right)x^2 = cy^{\frac{B^2}{A^2}} \ldots\ldots (m),$$

dont il est impossible de déduire l'équation d'une parabole, et même de toute autre section conique, tant qu'on prendra $B$ différent de $A$. La raison en est qu'il n'y a qu'une espèce d'ellipse qui a pour trajectoires orthogonales des paraboles, c'est celle dont le quarré $B^2$ du demi-grand axe pris sur l'axe des $y$, est double du quarré $A^2$ du demi-petit axe pris sur l'axe des $x$; or, dans ce cas de $B^2 = 2A^2$, l'équation $(m)$ se réduit à celle $y^2 = cy^2$ à laquelle on ne peut satisfaire par les valeurs de $y$, qu'en faisant $y = 0$. Mais l'équation $(m)$ prise dans toute sa généralité, et reprenant l'ellipse dans l'état naturel où elle est ordinairement considérée, c'est-à-dire ayant son grand axe $2A$ dans le sens de l'axe des $x$, est celle d'une courbe algébrique d'un degré supérieur au second, et qui est la trajectoire orthogonale des ellipses de paramètres différens.

Faisant $B = A$, ce qui est le caractère du cercle, l'équation $(l)$, en y faisant $Q = -1$, se réduit à celle

$$y^2 + x^2 = cy \ldots\ldots (n),$$

ce qui est l'équation d'un cercle décrit sur l'axe des $y$, comme les premiers cercles de paramètres ou diamètres $2A$ variables d'un cercle à l'autre, sont décrits sur l'axe des $x$; et à cause que $c$ reste arbitraire, il s'ensuit que les premiers cercles ont un nombre indéfini de trajectoires orthogonales, et que conséquemment les deux systèmes de cercles ayant respectivement leurs centres sur l'axe des $x$ et sur l'axe des $y$, et l'origine commune à celle des coordonnées, sont respectivement trajectoires orthogonales l'un de l'autre.

Faisant $Q = \frac{B^2}{A^2}$, ce qui est le caractère des hyperboles, l'équation ($l$) donnera pour trajectoire orthogonale de ces courbes, une courbe algébrique d'un degré supérieur au second; cette trajectoire ne sera que du troisième degré pour les hyperboles équilatères, puisqu'alors $Q = 1$.

EXEMPLE II. *Une droite tournant dans un même plan autour d'un point fixe, on demande l'équation de la courbe qui coupe cette droite dans toutes ses positions, sous un même angle donné.*

Prenant l'origine des coordonnées au point fixe autour duquel tourne la droite, on aura pour équation de cette droite

$$y = Px \ldots\ldots (o),$$

$P$ représentant la tangente trigonométrique de l'angle que forme la droite avec l'axe des abscisses, et qui conséquemment varie d'une position à l'autre de la droite. De l'équation ($o$) on tire $\frac{dy}{dx}$ ou $f(x,p) = P$. Substituant cette valeur dans l'équation ($d$), il vient $(aP + 1)dy = (P - a)dx$; mais $P = \frac{y}{x}$; donc $(ay + x)dy = (y - ax)dx$, équation qui intégrée d'après la méthode enseignée à l'article 339, donne

$$al\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) = 0 \ldots (p),$$

ce qui est l'équation de la trajectoire demandée. Si l'on veut passer de l'équation de cette courbe rapportée à ses coordonnées rectangulaires, à son équation polaire, alors se servant des équations de trans-

formation (99), on aura $al\frac{v}{c}=\alpha$ ou $alv-alc=\alpha$. Prenant $v=1$ lorsque $\alpha=0$, on aura complètement $alv=\alpha$, ce qui est l'équation de la spirale logarithmique dans le système qui a pour module $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire la cotangente de l'angle constant sous lequel la courbe doit couper tous les rayons vecteurs; ce qui est conforme à ce que nous avons dit de cette courbe à l'article 142. Faisant dans l'équation $(p)$ $a=\frac{1}{0}$, elle se réduit à celle $l\sqrt{x^2+y^2}=lc$, d'où $x^2+y^2=c$; ce qui est l'équation du cercle ayant pour rayon $\sqrt{c}$; ainsi, comme cela est évident de soi-même, la circonférence de cercle est la trajectoire orthogonale de ses rayons.

539. On appelle en Géométrie, *tractoire* la courbe qui a la propriété d'avoir toutes ses tangentes constantes. Cherchons l'équation de cette courbe qui, d'après sa propriété, a pour équation différentielle

$$\frac{y\sqrt{dy^2+dx^2}}{dy}=a\ldots.(a)[\text{éq.}(95)],$$

en représentant par $a$ une constante déterminée. De cette équation $(a)$ on tire celle

$$dx=\frac{dy\sqrt{a^2-y^2}}{y}\ldots\ldots\ldots(b),$$

qui est l'équation différentielle de la tractoire, et ne peut s'intégrer que par approximation. Pour opérer cette intégration, observons que l'équation précédente peut se mettre sous la forme de $dx=dly\sqrt{a^2-y^2}$, et faisant

$$(c)\ldots.ly=z,\quad \text{d'où}\quad y=e^z\ldots.(d),$$

la formule précédente deviendra

$$dx = dz\sqrt{a^2 - e^{2z}} \ldots\ldots (e).$$

Comparant le dernier membre de l'équation ($e$) avec $X^p dx$ (art. 257), on a $p = \frac{1}{2}$ et $X = a^2 - e^{2z}$, d'où $X' = -2e^{2z}$, $X'' = -4e^{2z}$, $X''' = -8e^{2z}$ etc.; et substituant ces valeurs dans la formule (200), il vient

$$\int dz\sqrt{a^2 - e^{2z}} \text{ ou } x = \text{const.} - \frac{(a^2 - e^{2z})^{\frac{3}{2}}}{3e^{2z}}\left[1 - \frac{2(a^2 - e^{2z})}{5e^{2z}} - \frac{16(a^2 - e^{2z})^2}{5.7e^{4z}} - \text{etc.}\right].$$

Mais $e^{2z} = y^2$, donc

$$x = \text{const.} - \frac{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3y^2}\left[1 - 2\frac{(a^2 - y^2)}{5y^2} - \frac{16(a^2 - y^2)^2}{5.7\,y^2} - \text{etc.}\right] \ldots\ldots\ldots (f).$$

Pour déterminer la constante, reprenons l'équation ($b$) que nous mettrons sous la forme $dx = \frac{a^2 dy}{y\sqrt{(a^2 - y^2)}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, et intégrant il vient $x = \sqrt{a^2 - y^2} + a^2\int\frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} + \text{const.}$ Faisant $x = 0$, on a $a^2\int\frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} + \text{const.} = -\sqrt{a^2 - y^2}$, et différentiant, il vient $\frac{a^2 dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, d'où $a^2 = y^2$, et $y = a$, donc $x = 0$ lorsque $y = a$, ainsi const. $= 0$, et on a complètement

$x = -$

$$x = -\frac{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3y^2}\left[1 - \frac{2(a^2-y^2)}{5.y^2} - \frac{16(a^2-y^2)^2}{5.7\,y^4} - \text{etc.}\right] (g).$$

Faisant $y = 0$ on a $x = \infty$, donc la tractoire est une courbe asymptotique, et son asymptote est l'axe des $x$.

De l'équation $(a)$ on tire $\int\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, ou $\lambda = al(yc)$ (formule 552), en représentant par $c$ une constante indéterminée; or, si l'on prend l'origine de l'arc $\lambda$ à celui de la courbe où $x = 0$ et $y = a$, on aura à ce point $0 = l(ac)$, d'où $ac = 1$ et $c = \frac{1}{a}$; ainsi on a complètement

$$\lambda = al\left(\frac{y}{a}\right) \ldots\ldots (h),$$

ce qui est la formule de rectification de la tractoire; donc cette courbe n'est pas exactement rectifiable. De l'équation $(b)$ on tire $\int ydx$ ou $\varpi = a^2\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$ $-\int\frac{y^2dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$ [form. (555)] $= \frac{1}{2}a^2$ arc$\left(\sin = \frac{y}{a}\right)$ $+ \frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} +$ const., et prenant l'aire de la tractoire à commencer de l'origine de la courbe où $y = a$, on aura const. $= -\frac{1}{2}a^2\frac{\pi}{2}$; donc on aura complètement

$$\varpi = \tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc}\left(\text{co}\quad \sin\frac{y}{a}\right) \ldots\ldots (i).$$

Faisant $y = 0$ on a $\varpi = -\frac{1}{4}a^2\pi$; donc l'aire de l'espace entier et se prolongeant à l'infini, compris entre la tractoire et l'axe des abscisses, est égal au quart de l'aire du cercle décrit avec la tangente constante $a$ comme rayon.

Multipliant les deux membres de l'équation ( $b$ ) par $\pi y^2$, et intégrant, on aura $\int \pi y^2 dx$ ou $V = \pi \int y dy \sqrt{a^2 - y^2} +$ const. [form. (560)], et effectuant l'intégration [form. (142), art. 212], on aura complètement

$$V = -\tfrac{1}{3}\pi (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (k) ;$$

en prenant la solidité du volume de révolution à l'origine du volume où $y = a$. Faisant $y = 0$, on a le volume entier et d'une longueur infinie $= -\frac{1}{3} a^3 \pi$, et par conséquent égal au quart de la sphère ayant pour rayon la tangente constante $a$.

540. PROBLÈME. *Etant donnée une équation de relation entre la rectification d'un arc de courbe inconnue et les coordonnées correspondantes à l'extremité de cet arc, trouver l'équation de la courbe.*

SOLUTION. L'énoncé de ce problème n'est évidemment que la traduction géométrique de celui d'analyse que nous avons résolu à l'article 398; car l'équation donnée étant $F(\lambda, x, y) = 0$, on sait qu'on a d'ailleurs $d\lambda^2 = dy^2 + dx^2$ [équat. (552)]; il ne s'agira donc que de déduire de ces deux équations celle de la courbe; c'est ce qui a été l'objet de nos recherches à l'article 398 auquel nous renvoyons le lecteur.

541. Nous avons vu à l'article 347 qu'une même intégrale telle que l'équation $x^p y^n =$ const., qui appartient aux hyperboles de tous les genres, pouvait satisfaire à un nombre infini d'équations différentielles de la forme de celle

$$axdy + \frac{ap}{n} ydx + x^c y^m (nxdy + pydx) = 0 \ldots (a) ,$$

en y faisant varier à volonté les quantités $a$, $m$ et $c$ dont l'intégrale $x^p y^n =$ const. est indépendante. Ce

fait analytique qui a toujours lieu lorsque l'équation différentielle proposée se compose du produit d'une équation primitive par une équation différentielle, ne prouve pas pour cela, ce qu'on pourrait croire au premier aspect, que par un même point de la courbe dont l'équation est l'intégrale de la différentielle proposée, on puisse mener un nombre infini de tangentes différentes : car en prenant dans l'équation différentielle proposée, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ qui est l'expression générale des sous-tangentes (art. 102), il est évident que cette valeur doit avoir pour facteur commun de son numérateur et dénominateur, la fonction primitive qui renferme les lettres dont est indépendante l'intégrale ; ainsi en réduisant cette valeur à sa plus simple expression, on n'aura pour expression de la sous-tangente de la courbe, que celle qu'on aurait en opérant directement sur l'équation de cette courbe. Par exemple de l'équation $(a)$ on tire $\frac{ydx}{dy} = -\frac{anx + n^2x^{c+1}y^m}{ap + npx^cy^m}$. Or, les deux termes de cette fraction ont pour facteur commun $a + nx^cy^m$ ; ainsi en réduisant la fraction à sa plus simple expression, il ne reste que $\frac{ydx}{dy} = -\frac{nx}{p}$, qui est la même valeur de la sous-tangente de la courbe $x^py^n =$ const., que celle qu'on déduit immédiatement de cette dernière équation, en la différentiant et prenant dans l'équation différentielle résultante la valeur de $\frac{ydx}{dy}$.

542. Nous terminerons ce chapitre par un exemple des solutions particulières des problèmes de Géométrie, c'est-à-dire de celles dont les expressions analytiques

et primitives, satisfont à l'équation différentielle dont l'intégrale complète donne la solution générale du problème, quoique ces expressions soient absolument indépendantes et étrangères à l'intégrale complète.

*Trouver l'équation d'une ligne telle, que si d'un point déterminé on abaisse des perpendiculaires sur toutes les droites qui touchent la ligne cherchée en un point quelconque, sans la couper, toutes les perpendiculaires ainsi menées, soient égales entre elles.*

Une droite qui en touche une autre sans la couper, étant de la nature des tangentes, l'équation de cette droite sera

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) \ldots\ldots (a)$$ [équat. (88) art. 99];

donc prenant l'origine des coordonnées au point d'où sont abaissées les perpendiculaires, l'équation de la perpendiculaire abaissée au point $y$ et $x$ commun à la ligne cherchée et à celle de l'équation $(a)$, sera

$$y' = -\frac{dx}{dy}x' \ (b),$$

et d'après la condition du problème, toutes ces perpendiculaires devant être d'une longueur constante que je représente par $a$, on aura

$$\sqrt{y'^2 + x'^2} = a \ldots\ldots (c).$$

Eliminant $y'$, $x'$ entre les trois équations $(a)$, $(b)$ et $(c)$, on a, toutes réductions faites,

$$ydx - xdy = a\sqrt{(dy^2 + dx^2)} \ldots\ldots (d).$$

Or, nous avons vu à l'article 401 que cette dernière équation qui y est indiquée par la lettre $(f)$, avait pour intégrale complète

$$y - Cx = a\sqrt{(C^2 - 1)} \ldots\ldots (e),$$

en représentant par $C$ une constante arbitraire, et pour solution particulière l'équation

$$y^2 + x^2 = a^2 \ldots\ldots (f).$$

Donc il y a un nombre infini de lignes droites qui satisfont à l'énoncé de la question, et ces droites sont celles placées autour de l'origine des coordonnées, de manière que leur plus courte distance à ce point soit $= a$; mais il n'y a qu'une courbe (le cercle) qui satisfait à la question ; ainsi cette courbe dont l'équation $(f)$ est absolument étrangère à l'intégrale complète $(e)$, est une solution particulière du problème géométrique proposé : cependant elle a un point de commun avec toutes les solutions données par l'intégrale complète $(e)$, puisqu'il est évident que toutes les droites qu'on obtient de cette dernière équation, en faisant varier de l'une à l'autre la quantité $C$, sont tangentes au cercle de l'équation $(f)$.

# SECTION VI.

## *Calcul des variations.*

## CHAPITRE PREMIER.

### INTRODUCTION.

543. Soit $y = \varphi(x)$, la caractéristique $\varphi$ indiquant une fonction variable pour une même valeur de $x$, c'est-à-dire passant de sa forme primitive $\varphi(x)$ à une autre que je représente par $\varphi'(x)$; de plus, représentons par $y_1$, ce que devient $y = \varphi(x)$ dans cette variation de $\varphi(x)$, et représentons respectivement par $y'$ et $y_1'$, ce que deviennent $y$ et $y_1$ lorsque $x$ croît ou décroît de sa différence constante $\Delta x$. Cela posé, nous aurons, abstraction faite des signes qui peuvent affecter $\Delta x$, les quatre équations

$$\{y = \varphi(x),\ y' = \varphi(x + \Delta x)\} \ldots (a)$$
$$\{y_1 = \varphi'(x),\ y_1' = \varphi'(x + \Delta x)\} \ldots (b).$$

De la seconde des deux équations $(a)$ retranchant la première on a, $y' - y = \Delta y_1 = \Delta\varphi(x)$; ainsi $\Delta y$ est la différence de grandeur de $y$, provenant de celle $\Delta x$ qu'éprouve $x$ dans une même fonction $\varphi$ de $x$ et de

$v+\Delta x$. Mais si de la première des deux équations ($b$) on retranche la première en ($a$), on a $y_1-y=\varphi'(v)-\varphi(x)$ qui est une quantité absolument différente de celle $y'-y=\Delta y$, puisque celle-ci provient du changement qu'éprouve $x$ dans une même fonction de $x$, et que celle $y_1-y$ résulte de la variation de la fonction $\varphi$ pour une même valeur de $x$ : nous appellerons *variation* de $y$ cette dernière quantité $y_1-y$, et l'indiquerons, comme l'a fait Lagrange (*) par la caractéristique $\delta$ qui, conséquemment, est dans le calcul des variations l'analogue de la caractéristique $\Delta$ employée dans le calcul des différences.

544. On a, d'après cette notation, les équations

$$\{y'-y=\Delta y,\ y_1-y=\delta y,\ y'_1-y_1=\Delta y_1,\ y'_1-y'=\delta y'\}\ldots(c)$$

De la seconde équation on tire $y_1=y+\delta y$, d'où $\Delta y_1=\Delta y+\Delta\delta y$. Substituant cette valeur dans la troisième équation en ($c$), on a $y'_1=y_1+\Delta y+\Delta\delta y$, et éliminant $y_1$, il vient

$$y'_1=y+\delta y+\Delta y+\Delta\delta y\ldots\ldots(d).$$

La quatrième équation en ($c$) donne $y'_1=y'+y\delta'=y+\Delta y+\delta(y+\Delta y)$, ou $y'_1=y+\Delta y+\delta y+\delta\Delta y$ : comparant cette dernière équation avec celle ($d$), on a

$$\Delta\delta y=\delta\Delta y\ldots\ldots(e).$$

Cette équation donne celle $\Delta\delta(\Delta y)=\delta\Delta(\Delta y)$, ou $\Delta\delta\Delta y=\delta\Delta^2 y$ ; donc d'après la même équation ($e$), on a $\Delta^2\delta y=\delta\Delta^2 y$, et continuant de même, on trouvera que généralement

$$\Delta^n\delta y=\delta\Delta^n y\ldots\ldots(561).$$

---

(*) On sait que c'est cet illustre Géomètre qui est l'inventeur de la Méthode générale des variations.

545. La variation $\delta y$ étant aussi une fonction de $x$, nous aurons, en substituant dans le théorème de Taylor [form. (39)], $\delta y$ à la place de $y$,

$$\Delta\delta y = \frac{d\delta y}{dx}\Delta x + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{d^3\delta y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc},$$

ou mettant dans le premier membre $\delta\Delta y$ à la place de $\Delta\delta y$ [équat. (561), et divisant par $\Delta x$, il viendra

$$\frac{\delta\Delta y}{\Delta x} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\frac{\Delta x}{2} + \text{etc.}$$

Donc pour une même valeur de $x$, ce qui donne simultanément $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$, on aura, d'après la notation du Calcul différentiel

$$\frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \text{ou} \quad \delta dy = d\delta y \ldots (562);$$

donc *la variable de la différentielle d'une variable, est égale à la différentielle de sa variation ;* et on démontrera par un raisonnement exactement semblable à celui qui, dans l'article précédent, nous a conduit de l'équation ($e$) à celle (561), que généralement on a

$$d^n\delta y = \delta d^n y \ldots\ldots (563).$$

Ainsi on peut à volonté faire passer la caractéristique $\delta$ des variations en avant, ou après celle $d$ des différentielles.

546. Représentant par $U$ une fonction différentielle quelconque, soit $\int U = U'$, d'où $U = dU'$ et $\delta U = \delta dU' = d\delta U'$; donc $\int\delta U = \delta U'$, et mettant à la place de $U'$ sa valeur $\int U$, il vient

$$\int\delta U = \delta\int U \ldots\ldots (564);$$

donc $\int[\int\delta U] = \int[\delta\int U] = \int\delta(\int U) = \delta\int(\int U)$, ou $\int^2\delta U = \delta\int^2 U$, et ainsi de suite, on démontrera que généralement

$$\int^n\delta U = \delta\int^n U \ldots\ldots (565);$$

d'où l'on voit que dans les intégrales redoublées des quantités variées, on peut mettre à volonté la caractéristique des variations en avant ou après celle des intégrations.

547. Il est clair, d'après ce qui précède, que si nous représentons par $U$ une fonction différentielle d'un ordre quelconque $n$ entre les variables $x$, $y$, $z$..., dans laquelle nous supposons pour le moment et pour plus de généralité que se trouvent les différentielles de tous les ordres des variables jusqu'à celui $n$ de $U$, on aura la variation, en différentiant à l'ordinaire $U$, et mettant seulement la caractéristique $\delta$ à la place de la nouvelle caractéristique qu'il faudrait introduire $d$, et plaçant $\delta$ immédiatement en avant de la variable correspondante, afin de n'avoir dans tout le cours de la variation de $U$, que des différentielles des quantités variées $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.....Nous ne nous arrêterons pas plus long-temps sur les détails de cette opération, parce que nous en avons déjà parlé au chapitre III de la quatrième section.

---

## CHAPITRE II.

*Méthodes des variations dans les questions de* maximis *et* minimis, *lorsque la fonction différentielle proposée n'est qu'entre deux variables, et qu'une de ces variables varie pour une même valeur de l'autre.*

548. Soit la formule différentielle de l'ordre $n$.

$$U = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} \ldots + \Pi\frac{d^ny}{dx^n} \ldots\ldots (566),$$

dans laquelle $dx$ étant considérée comme constante, les lettres $A$, $B$...$H$ représentant des fonctions de $x$, $y$ et des différentielles du premier ordre de ces variables élevées à des puissances quelconques, mais telles cependant, que la somme des indices des ordres et puissances des différentielles de $x$ et $y$ est la même dans tous les termes; puisque, ainsi que nous l'avons démontré au commencement de cet Ouvrage, le terme qui se soustrairait à cette loi serait $= 0$ ou $= \infty$. Cela posé, il est clair que représentant par $u$ l'intégrale de $U$, cette intégrale ne peut être significative et déterminée qu'en tant qu'on a d'ailleurs, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'à présent, une relation déterminée entre $x$ et $y$ donnée par une équation

$$f(x, y) = 0 \ldots\ldots (a),$$

dans laquelle f représente la caractéristique d'une fonction déterminée. Cette équation $(a)$ étant donnée, on pourra aisément par les méthodes ordinaires enseignées au chapitre IX de la première partie de cet Ouvrage, trouver les extrêmes grandeurs (*maxima et minima*) de l'intégrale $u$ de $U$, mais s'il n'y a pas de relation connue entre les variables $x$ et $y$, ce qu'on peut exprimer analytiquement par l'équation

$$y = \varphi(x) \ldots\ldots\ldots (b),$$

en représentant par $\varphi$ la caractéristique d'une fonction variable pour une même valeur de $x$; alors l'intégrale $u$ de $U$ est vague, indéterminée, et il paraît au-dessus des forces de l'esprit humain de pouvoir dans ce cas-là, déterminer les extrêmes grandeurs de l'intégrale $u$ de $U$ entre certaines valeurs fixes de $x$, comme nous les considérerons dans ce chapitre, ou variables, comme nous le considérerons dans le chapitre suivant. Cependant les Newton, Bernoulli frères, et Euler

avaient résolu des questions semblables dans plusieurs cas particuliers, lorsque Lagrange, par un effort de génie qui fera époque dans l'histoire des sciences, inventa la méthode générale pour résoudre toutes ces questions : cette méthode est celle des variations dans laquelle plusieurs grands Géomètres, tels que Legendre et Poisson, ont fait de nouvelles et belles découvertes.

La méthode des variations ne s'applique pas seulement aux qnestions de *maximis* et *minimis* de Géométrie et de Mécanique, mais elle s'applique aussi à d'autres parties de cette dernière science. En effet, il est aisé de concevoir, par exemple, que si un corps de figure donnée et soumise aux lois de la Géométrie, parcourt dans l'espace une trajectoire dont la figure est donnée par le genre et la direction des puissances qui agissent sur le mobile, il y aura deux choses à considérer, savoir, 1°. les points du projectile ; 2°. les points de la trajectoire. Or, si les premiers points, ou les seconds considérés entre eux, admettent les différences, il est clair que les premiers points considérés avec les seconds admettront les variations, ce qui est conforme à ce que nous avons dit dans le chapitre précédent. Cependant, afin de ne pas dépasser les limites entre lesquelles doit être restreint cet Ouvrage, nous ne considérerons la méthode des variations que relativement aux questions de *maximis* et *minimis*.

549. L'intégrale $u$ de $U$ étant une fonction de $x$, nous aurons, en représentant par $u'$ ce que devient $u$ lorsque $x$ augmente de $\Delta x$, l'équation

$$u' = u + \mathrm{f}'x\,\Delta x + \mathrm{f}''x\frac{\Delta x^2}{2} + \mathrm{f}'''x\frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc.} \ldots\ldots (a)$$

[form. (1), art. 3].

Or, si la relation entre $x$ et $y$ était connue, alors $\varphi$ indiquant dans l'équation $y=\varphi(x)$ une fonction de forme constante, on aurait $f'x=\frac{du}{dx}$, $f''x=\frac{d^2u}{dx^2}$ etc., et par conséquent $f'x=0$ ferait connaître l'extrême grandeur de $u$ qui serait un *minimum* ou un *maximum*, suivant que la valeur de $f''x$ serait positive ou négative, (art. 69). Mais lorsque la relation $y=\varphi(x)$ entre $y$ et $x$ est inconnue, alors la fonction $u$ n'est donnée que par celle $U$ dont elle est l'intégrale, et les quantités $f'x$, $f''x$.... n'étant prises dans ce cas que par rapport à $\Delta x$ dont $x$ est supposé augmenter dans $\varphi(x)$, il faut, pour obtenir les caractères d'extrêmes grandeurs entre certaines limites de la valeur indéterminée de $u$ en fonctions de la seule variable $x$, recourir à la formule proposée (566).

550. Le théorème de Taylor donne

$$y'=y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3}+\text{etc...}(a),$$

$$\text{ou}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^2}{2.3}+\text{etc...}(b);$$

équation qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $\Delta x$, a encore lieu lorsque $\Delta x=0$; donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}\ldots\ldots(c):$$

or, il est évident que si dans l'équation $y=\varphi(x)$, $\varphi$ indiquait une fonction de forme constante, on aurait $\Delta y=0$ lorsque $\Delta x=0$; mais à cause de la forme variable indiquée par $\varphi$, la variable $y$ varie pour une même valeur de $x$, c'est-à-dire, lorsque $\Delta x=0$, et alors cette variation étant dénotée par $\delta y$, l'équation

(*c*) deviendra

$$\frac{\delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots (d).$$

Mais lorsque $\Delta x = 0$, il est clair que $dx$ qui n'est autre chose que la représentation de $\Delta x$ dans cet état d'absolue nullité, lui est identique ; c'est-à-dire, que le rapport des zéros respectivement représentés par $\Delta x$ et $dx$, est l'unité, ce qui réduit l'équation ($d$) à celle $dy = \delta y$ : cela posé, la formule ($a$) dans laquelle les deux premiers termes du second membre sont $y + \frac{\delta y}{dx}\Delta x$, étant mise sous la forme

$$y' = y + \frac{\delta y}{dx}\Delta x + f''x\frac{\Delta x^2}{2} + f'''x\frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots(e),$$

nous en conclurons, d'après la théorie des suites, développée à l'article 3, que chaque quantité représentée par f$x$ accentuée, se composant de celle qui la précède de la même manière que cette dernière se compose elle-même de celle qui la précède, on aura

$$f''(x) = \frac{\delta\left(\frac{\delta y}{dx}\right)}{dx} = \frac{\delta^2 y}{dx^2}, \text{ et de même } f'''(x) = \frac{\delta^3 y}{dx^3},$$

$$f^{\text{IV}}x = \frac{\delta^4 y}{dx^4}, \text{ etc., donc}$$

$$y' = y + \frac{\delta y}{dx}\Delta x + \frac{\delta^2 y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\delta^3 y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc.}\ldots(f).$$

Cette formule ($f$) étant démontrée, on en conclura sans peine, que représentant respectivement par $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'$...ce que deviennent les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$..., lorsque $x$ devient $x + \Delta x$, on

aura, relativement aux variations de ces quantités,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{dy}{dx} + \frac{\delta\frac{dy}{dx}}{dx}\Delta x + \frac{\delta^2\frac{dy}{dx}}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \text{etc}\ldots\ldots(g)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)' = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\delta\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}\Delta x + \frac{\delta^2\frac{d^2y}{dx^2}}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \text{etc}\ldots.(h).$$

etc.

Accentuant $U$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. dans l'équation (566), et y substituant les valeurs de ces quantités accentuées déduites des équations $(f)$, $(g)$, $(h)$... on aura, après les développemens et les réductions nécessaires, l'équation

$$U' = U + \frac{\delta U}{dx}\Delta x + \frac{\delta^2 U}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\delta^3 U}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc.}(i).$$

Or, nous observerons que $u$ étant l'intégrale de $U$ lorsque $y = \varphi(x)$, la quantité $\varphi(x)$ représentant une fonction indéterminée de $x$, elle le sera encore lorsqu'on considérera $x$ accrue de sa différence constante $\Delta x$, donc $u' = \int U'$; et mettant à la place de $u'$ et de $\int U'$ leurs valeurs respectives [équat. $(a)$ art. 549 et équat. $(i)$], on aura celle

$$u + \mathrm{f}'x\,\Delta x + \mathrm{f}''x\frac{\Delta x^2}{2} + \text{etc.} = \int\left[U + \frac{\delta U}{dx}\Delta x + \frac{\delta^2 U}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \text{etc.}\right]\ldots\ldots(k),$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $\Delta x$, aura encore lieu lorsque $\Delta x = 0$, donc $u = \int U$, ce qui est conforme avec l'hypothèse, et réduit l'équation précédente à celle

$$\mathrm{f}'x + \mathrm{f}''x\frac{\Delta x}{2} + \text{etc.} = \int\left[\frac{\delta U}{dx} + \frac{\delta^2 U}{dx^2}\frac{\Delta x}{2} + \text{etc.}\right],$$

qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de de $\Delta x$, aura encore lieu lorsque $\Delta x = 0$, donc $f'x = \int \frac{\delta U}{dx}$. On démontrera par un raisonnement semblable, que $f''x = \int \frac{\delta^2 U}{dx^2}$, et enfin que généralement $f^{m'}x = \int \frac{\delta^m U}{dx^m}$. Or, je dis qu'on a généralement $f'x = \frac{\delta u}{dx}$, $f''x = \frac{\delta^2 u}{dx^2} \ldots f^{m'}x = \frac{\delta^m u}{dx^m}$, ce qu'on pourrait démontrer d'une manière semblable à celle que nous avons employée ci-dessus pour parvenir à l'équation $(f)$, mais que nous démontrerons encore plus simplement de la manière suivante. Si l'équation $(a)$ de l'article 549 était considérée par rapport aux différences, on aurait $f'x = \frac{du}{dx} = \frac{U}{dx}$, d'où $df'x = \frac{dU}{dx}$; mais nous venons de trouver que $f'x = \int \frac{\delta U}{dx}$, d'où $df'x = \frac{\delta U}{dx}$; donc égalant les deux valeurs de $dfx'$, on a l'équation $dU = \delta U$ qui ne peut exister généralement, celle $f'x = \int \frac{\delta U}{dx}$ étant démontrée, qu'en tant que la caractéristique $d$ du premier membre se change en celle $\delta$ des variations, donc $f'x = \frac{\delta u}{dx}$; et puisque $f''x$ dérive de $f'x$ comme cette dernière quantité dérivait de $u$, on aura $f''x = \frac{\delta \frac{\delta u}{dx}}{dx} = \frac{\delta^2 u}{dx^2}$, et ainsi de suite; donc $\delta u = \int \delta U$, $\delta^2 u = \int \delta^2 U \ldots \delta^m u = \int \delta^m U$.

551. Cela posé, il est clair que le caractère des extrêmes grandeurs de $u$ étant, comme nous l'avons dit,

$f'x = 0$ ou $\delta u = 0$ ; il sera aussi indiqué par $\int \delta U = 0$, ou $\delta U = 0$ ; ainsi, variant l'équation proposée (566), on aura pour caractère des extrêmes grandeurs de $u$ l'équation

$$\delta U = A'\delta y + \frac{B'd\delta y}{dx} + \frac{C'd^2\delta y}{dx^2} + \frac{D'd^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} = 0 (a).$$

Mais $d[B'\delta y] = B'd\delta y + dB'\delta y$, d'où

$$B'd\delta y = d[B'\delta y] - dB'\delta y \ldots\ldots (b) :$$

de même $C'd^2\delta y = d[C'd\delta y] - dC'd\delta y$, et $dC'd\delta y = d[dC'\delta y] - d^2C'\delta y$, donc

$$C'd^2\delta y = d[C'd\delta y] - d[dC'\delta y] + d^2C'\delta y \ldots (c).$$

De cette dernière équation on conclura celle $D'd^3\delta y = d[D'd^2\delta y] - d[dD'd\delta y] + d^2D'd\delta y$ ; mais $d^2D'd\delta y = d[d^2D'\delta y] - d^3D'\delta y$ ; donc

$$D'd^3\delta y = d[D'd^2\delta y] - d[dD'd\delta y] + d[d^2D'\delta y] - d^3D'\delta y \ldots\ldots (d),$$

et ainsi de suite. Substituant ces valeurs [équat. $(b)$, $(c)$, $(d)\ldots$] dans l'équation $(a)$, on aura

$$\delta U = \left[A' - \frac{dB'}{dx} + \frac{d^2C'}{dx^2} - \frac{d^3D'}{dx^3} + \text{etc.}\right]\delta y$$

$$+ d\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{B'}{dx} - \frac{dC'}{dx^2} + \frac{d^2D'}{dx^3} - \text{etc.}\right]\delta y \\ + \left[\frac{C'}{dx^2} - \frac{dD'}{dx^3} + \text{etc.}\right]d\delta y \\ + \left[\frac{D'}{dx^3} - \text{etc.}\right]d^2\delta y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0 \ldots (e) ;$$

donc représentant par $\lambda$ le coefficient de $\delta y$ dans la première ligne horizontale, et par $\varpi$ tout ce qui est renfermé entre les accolades sous le lien de $d$, on aura

$\delta U$

$\delta U = \lambda \delta y + d\varpi = 0$ ; or $d\varpi$ étant une différentielle exacte, et $\lambda \delta y$ ne pouvant l'être que pour des valeurs particulières de $\delta y$, il s'ensuit que l'équation précédente ne peut avoir généralement lieu qu'en faisant

$$\lambda = 0 \ldots\ldots (f) ;$$

d'où $\delta U = d\varpi = 0$. Mais $\delta u = \int \delta U$, ainsi que nous l'avons démontré à l'article 550, donc

$$\delta u = \varpi + c \ldots\ldots (g).$$

Remettant dans ces équations $(f)$ et $(g)$, les valeurs respectives que représentent $\lambda$ et $\varpi$, on aura celles

$$A' - \frac{dB'}{dx} + \frac{d^2C'}{dx^2} - \frac{d^3D'}{dx^3} + \text{etc.} = 0 \quad (567)$$

$$\delta u = \left[\frac{B'}{dx} - \frac{dC'}{dx^2} + \frac{d^2D'}{dx^2} - \text{etc.}\right]\delta y + \left[\frac{C'}{dx^2} - \frac{dD'}{dx^3} + \text{etc.}\right] d\delta y + \left[\frac{D'}{dx^3} - \text{etc.}\right] d^2\delta y + \text{etc} + c \ldots (568).$$

L'équation (567) contient la relation nécessaire entre $x$ et $y$ pour l'existence de l'extrême grandeur de $u$, et peut d'après cela, comme l'a fait Lagrange, s'appeler équation générale du *maximum* ou *minimum*. Cette équation appartient en géométrie à la ligne qui, parmi le nombre infini de celles qui ont pour caractère général la formule (566), satisfait de plus au *maximum* ou *minimum* entre les limites données.

552. Quant à l'équation (568), il est aisé de voir que celle (567) donnant la relation entre $x$ et $y$ qui doit satisfaire à la question, tout sera déterminé dans l'équation (568) : or, l'intégrale $\delta u$ de $\delta U$ devant être prise entre les limites données, et $\delta u$ devant etre $= 0$ entre ces limites, il est clair qu'à la première et dernière limite, la différence des valeurs respec-

tives de $\delta u$ sera nulle ; donc si nous représentons par $\delta u_1$ et $\delta u_2$ les valeurs respectives de $\delta u$ aux première et dernière limites, nous aurons l'équation

$$\delta u_1 - \delta u_2 = 0 \ldots\ldots (569) ;$$

et indiquant d'une manière semblable les quantités qui appartiennent respectivement à la première et à la dernière limite, nous aurons d'après l'équation (568), celle

$$\left[\left(\frac{B'}{dx}\right)_1 - \left(\frac{dC'}{dx^2}\right)_1 + \text{etc.}\right]\delta y_1 + \left[\left(\frac{C'}{dx^2}\right)_1 - \text{etc.}\right]d\delta y_1$$
$$+ \text{etc.} - \left[\left(\frac{B'}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dC'}{dx^2}\right)_2 + \text{etc.}\right]\delta y_2 - \left[\left(\frac{C'}{dx^2}\right)_2$$
$$- \text{etc.}\right]d\delta y_2 - \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (570)$$

qui s'appelle l'*équation des limites*.

553. L'équation (567) est la condition d'intégrabilité de $U$ pour résoudre la question de *maximis* ou *minimis* proposée ; mais nous observerons qu'à cause de la coexistence des deux équations (567) et (568), on pourra déduire une autre équation de condition d'intégrabilité de $U$ pour la solution en question, qui sera indépendante de $B'$. En effet, représentant dans l'équation (568), le coefficient de $\delta y$ par $P$, celui de $d\delta y$ par $Q$, celui de $d^2\delta y$ par $R$, etc., on aura

$$\delta u = P\delta y + Q\, d\delta y + R d^2\delta y + \text{etc} + c.$$

Mais, conformément aux équations ($b$), ($c$).... de l'article 551, on a

$$Qd\delta y = d(Q\delta y) - dQ\delta y$$
$$Rd^2\delta y = d(Rd\delta y) - d(dR\delta y) + d^2R\delta y$$
$$\text{etc.}$$

donc $\delta u = (P - dQ + d^2R - \text{etc.})\delta y + d\{(Q - dR$

$+$ etc.)$\delta y + (R -$ etc.)$d\delta y +$ etc.$\} + c$, et remettant les valeurs de $P$, $Q$, $R$... il vient

$$\delta u = \left(\frac{B'}{dx} - \frac{2dC'}{dx^2} + \frac{3d^2D'}{dx^3} - \text{etc.}\right)\delta y + d\left\{\left(\frac{C'}{dx^2} - \frac{2dD'}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta y + \left(\frac{D'}{dx^3} - \text{etc.}\right)d\delta y + \text{etc.}\right\} + c.$$

Or, pour que $\delta u$ soit $= 0$, ce qui doit avoir lieu dans les extrêmes grandeurs de $u$, on voit, comme nous l'avons démontré relativement à l'équation ($e$) de l'article 551, qu'on doit avoir

$$\frac{B'}{dx} - \frac{2dC'}{dx^2} + \frac{3d^2D'}{dx^3} - \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (a).$$

et
$$\int \delta u = \left(\frac{C'}{dx^2} - \frac{2dD'}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta y + \left(\frac{D'}{dx^3} - \text{etc.}\right)d\delta y + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (b).$$

Différentiant l'équation ($a$), on a celle

$$\frac{dB'}{dx} - \frac{2d^2C'}{dx^2} + \frac{3d^3D'}{dx^3} - \text{etc.} = 0,$$

qui étant ajoutée à l'équation (567), donne celle

$$A' - \frac{d^2C'}{dx^2} + \frac{2d^3D'}{dx^3} - \text{etc.} = 0 \ (571),$$

qui est l'équation de condition d'intégrabilité de $U$ dans l'état de la question proposée.

554. Nous allons examiner le cas où la formule différentielle $U$ ne serait que du premier ordre. Il est clair que dans ce cas là, les termes de l'équation ($a$) (art. 551) affectés de $C'$, $D'$... sont tous égaux à zéro : car si seulement le troisième terme $\frac{C'd^2\delta y}{dx^2}$ ou

$\frac{C'\delta d^2y}{dx^2}$ (art. 545) existait, il s'ensuivrait que la variation $\delta U$ de $U$ serait une formule différentielle du second ordre, ce qui ne peut être lorsque $U$ n'est que du premier ordre, puisque la variation n'altère en rien l'ordre de différentielle.

Il suit de là, que dans le cas où $U$ est une fonction différentielle du premier ordre, l'équation de condition (571) se réduit à celle

$$A' = 0 \ldots\ldots (a),$$

et l'équation (567) devient $\frac{dB'}{dx} = 0$, d'où

$$\frac{B'}{dx} = a \ldots\ldots (b),$$

en représentant par $a$ une constante. Ainsi cette dernière équation ($b$) est celle qui satisfait à la question du *maximum* ou *minimum* de $\int U$.

555. Puisque $\frac{B'}{dx}$ est égale à une constante $a$, il est clair qu'aux première et dernière limites, on aura également $\left(\frac{B'}{dx}\right)_1 = \left(\frac{B'}{dx}\right)_2 = a$, ainsi l'équation aux limites (570), se réduira dans le cas présent à celle

$$a(\delta y_1 - \delta y_2) = 0 \ldots\ldots (572)$$

EXEMPLE. *Trouver la ligne la plus courte entre des termes donnés sur un même plan.*

Quelle que soit la ligne cherchée, nous savons que sa longueur absolue entre des termes donnés, est l'intégrale de $\sqrt{dy^2 + dx^2}$ prise entre ces deux limites [art. 529, form. (552)]; donc

$$U = \sqrt{dy^2 + dx^2} \ldots\ldots (a)$$

et $\int U = \int \sqrt{dy^2 + dx^2}$ doit être un *minimum*, ce que nous jugeons pouvoir toujours s'obtenir d'après la forme de la valeur de $U$ qui est du premier ordre, et ne renferme pas la variable primitive $y$ (art 554). Variant l'équation $(a)$, il vient $\delta U = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}} d\delta y$, donc $\frac{B'}{dx} = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}} = a$ [équat. $(b)$ art. 554], d'où on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$, et intégrant il vient

$$y = \frac{ax}{\sqrt{1 - a^2}} + c \ldots\ldots (b),$$

ce qui est l'équation d'une ligne droite formant avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$, et dont conséquemment le sinus est $a$; ainsi représentant par $\alpha$ cet angle, l'équation aux limites est

$$\sin \alpha \, (\delta y_1 - \delta y_2) = 0 \ldots\ldots\ldots (c)$$

[équat. 572]; or, si les termes donnés entre lesquels on doit mener la plus courte ligne possible, étaient deux points fixes, alors les ordonnées $y_1$ et $y_2$ des limites étant invariables, on aurait $\delta y_1 = 0$ et $\delta y_2 = 0$; ainsi l'équation des limites $(c)$ seroit satisfaite. Mais dans tous les autres cas, on ne satisfera à l'équation $(e)$ des limites, qu'en faisant $\delta y_1 - \delta y_2 = 0$, ce qui indique que les droites sur lesquelles sont prises les plus courtes distances sont parallèles; ou en faisant $\sin \alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$; ce qui indique que les droites successives sur lesquelles on prend les plus courtes distances sont parallèles à l'axe des abscisses.

556. Lorsque les coordonnées $y_1$ et $y_2$ sont des limites déterminées, ainsi que les coefficiens différentiels $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2_1}$ . . . $\frac{dy_2}{dx_2}$, $\frac{d^2y_2}{dx^2_2}$ . . . . alors il est clair que les variations de toutes ces quantités étant nulles, l'équation aux limites (570) est satisfaite d'elle-même sans condition ; c'est ce que nous avons vu avoir lieu dans l'exemple de l'article précédent, lorsque les ordonnées des limites sont données, c'est-à-dire lorsqu'il ne faut trouver que la plus courte distance entre deux points donnés.

Si au contraire aucune des valeurs précédentes correspondantes aux limites n'était donnée, alors il faudrait égaler dans l'équation (572) chaque coefficient à zéro, ce qui donnerait autant d'équations de condition qui devraient être satisfaites en même temps, pour que le problème des extrêmes grandeurs pût être résolu. Enfin si une partie de ces quantités relatives aux limites, était donnée soit immédiatement, soit par une équation de relation qui existerait entre elles, dans le temps que les autres resteraient arbitraires, il faudrait réduire le nombre des variations des quantités $y_1$, $y_2$, $\frac{dy_1}{dx_1}$, . . . $\frac{dy_2}{dx_2}$ . . . au plus petit nombre possible, et égaler à zéro les coefficiens de chacune de celles qui restent indéterminées.

# CHAPITRE III.

*De la méthode des variations dans les questions de* maxima *au* minima *entre des limites variables, et en ne considérant toujours que les fonctions différentielles à deux variables.*

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les cas où les ordonnées des limites sont à des distances fixes de l'axe des ordonnées, mais il arrive la plupart du temps qu'on est obligé dans les questions d'*extrêmes grandeurs*, de faire varier $x$ en même temps que $y$. Nous allons nous occuper dans ce chapitre de ces deux variations simultanées.

557. En suivant le calcul des articles 550 et 551, il est aisé de voir que si on avait opéré par rapport aux différentielles, comme on l'a fait par rapport aux variations, qu'ensuite on eût représenté par Y le coefficient de $\delta y$ dans l'équation ($e$) de l'article 551, et respectivement par $Y'$, $Y''$, $Y'''$.... les coefficiens de $\delta y$, $d\delta y$, $d^2\delta y$.... entre les accolades et sous le lien de la caractéristique générale $d$, on aurait eu l'équation

$$dU = Y dy + d[Y' dy + Y'' d^2y + Y''' d^3y + \text{etc.}] \ldots (a),$$

dans laquelle $dx$ a été considérée comme constante et $dy$ comme variable. Mais si on avait opéré en sens inverse, c'est-à-dire si on avait considéré $dy$ comme constante et $dx$ comme variable, on aurait eu une

équation de la forme $dU = Y_1 dx + d\theta$, dans laquelle $Y_1$ représente un polynome analogue à celui représenté par Y dans l'équation $(a)$, et $\theta$ représente un polynome ordonné par rapport aux ordres de la différentielle de $x$, analogue à celui ordonné par rapport aux ordres de la différentielle de $y$ renfermé entre crochets dans l'équation $(a)$. Donc si on fait varier simultanément $y$ et $x$ dans le sens des différences, on aura

$$dU = Ydy + Y_1 dx + d\varpi \ldots\ldots (b),$$

en représentant par $\varpi$ tout le polynome renfermant les différentielles de tous les ordres de $x$ et $y$ jusqu'à celui $n$ de $U$. Or de l'équation $(b)$, on tire celle $U - \varpi = \int (Ydy + Y_1 dx)$, qui ne peut avoir généralement lieu qu'en faisant

$$Ydy + Y_1 dx = 0 \ldots\ldots (c);$$

puisqu'il n'y a que des cas particuliers qui pourraient rendre $Ydy + Y_1 dx$ une formule différentielle exacte. Cela posé, la formule $(e)$ de l'article 551 dans laquelle on n'a pas fait varier $x$, étant mise sous la forme $\delta U = Y\delta y + d\varpi$, on aura pour le cas où $x$ seule varie, $\delta U = -Y \frac{dy}{dx} \delta x + d\varpi'$, à cause de $Y_1 = -Y \frac{dy}{dx}$ [équat. $(c)$]. Donc $y$ et $x$ variant simultanément dans le sens des variations $\delta$; il viendra l'équation

$$\delta U = Y\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + d(\varpi + \varpi') \ldots (d)$$

qui, comme nous l'avons démontré à l'article 551, ne pourra généralement satisfaire à l'équation $\delta U = 0$, qui doit avoir lieu pour les extrêmes grandeurs de $\int U$, qu'en tant qu'on aura $Y = 0$, ce qui est l'équation (567). Ainsi l'équation générale du *maximum* et du *minimum* est la même, soit qu'on ne fasse varier que $y$, soit qu'on fasse varier simultanément $y$ et $x$.

L'équation $Y = 0$ réduit celle $(d)$ à l'équation $\delta U = d(\varpi + \varpi')$, mais $\delta u = \int \delta U$, donc

$$\delta u = \varpi + \varpi' \ldots\ldots (e).$$

Comparant l'équation $(d)$ avec celle $(e)$ de l'article 551, on voit d'abord que Y multipliant seulement $\delta y$ dans l'équation $(e)$[art. 551], et multipliant $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ dans le cas où l'on fait varier simultanément $x$ et $y$, il faudra substituer de même $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ à la place de $\delta y$ dans la valeur de $\delta u$ [équat. $(e)$]; mais d'un autre côté, en effectuant les calculs, on trouve que la valeur de $\delta u$ dans le cas que nous traitons actuellement, a augmenté de $\frac{U\delta x}{dx}$; donc si nous représentons par $F(\delta y)$ la valeur de $\delta u$ lorsqu'on ne fait varier que $y$, nous aurons, lorsque nous ferons varier simultanément $y$ et $x$, la valeur de $\delta u$ qui sera $F\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + \frac{U\delta x}{dx}$.

558. Dénotant comme dans le chapitre précédent, les quantités qui appartiennent aux première et dernière limites, on aura de même l'équation aux limites qui sera $\delta u_1 - \delta u_2 = 0$; et si, comme cela arrive souvent, les deux limites sont indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément $\delta u_1 = 0$ et $\delta u_2 = 0$.

Exemple. *Trouver la plus courte distance entre deux lignes données, et tracées sur un même plan.*

Cet exemple diffère de celui de l'article 555, en ce que nous y supposions que les deux termes entre lesquels il fallait mener la plus courte ligne, étaient d'abscisses constantes, tels que deux points ou deux droites perpendiculaires à l'axe des $x$, et qu'ici les

deux termes étant deux lignes quelconques, courbes ou droites inclinées sur l'axe des $x$, les abscisses varient en même temps; mais puisque dans l'un et l'autre cas on a $Y = 0$ [équat. (567], nous en conclurons que dans cet exemple, comme dans celui de l'article 555, la plus courte distance cherchée est une ligne droite; ainsi nous n'avons à nous occuper que de l'équation des limites, et de la manière dont la droite qui est le *minimum* des distances, doit couper les deux lignes données qui la terminent.

Nous avons trouvé à l'article 555, que $\frac{B'}{dx} = \frac{dy}{\sqrt{(dy^2+dx^2)}}$, donc dans le cas où $y$ varierait seule, on aurait $\delta u = \frac{dy}{\sqrt{dy^2+dx^2}}\delta y$ [équat. (570)]; d'où nous conclurons que dans le cas où $y$ et $x$ varient simultanément, on a $\delta u = \frac{dy}{\sqrt{dy^2+dx^2}}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + \frac{\delta x\sqrt{dy^2+dx^2}}{dx}$ (art. 557), et faisant les multiplications et réductions nécessaires, il viendra

$$\delta u = \frac{dy\delta y + dx\delta x}{\sqrt{dy^2+dx^2}} \ldots\ldots (a).$$

Cela posé, soient

$$(b)\ldots y = f(x) \quad \text{et} \quad y = F(x)\ldots(c),$$

les équations des deux lignes qui doivent terminer la plus courte distance de l'une à l'autre, et supposons de plus qu'elles soient indépendantes l'une de l'autre, ce qui donnera pour la première limite [équat. $(b)$],

$$\delta u_1 = dy_1\delta y_1 + dx_1\delta x_1 = 0\ldots(d):$$

or, l'équation ($b$) étant successivement différentiée et variée, donne $dy = f'(x)dx$ et $\delta y = f'(x)\delta x$; éliminant $f'(x)$ entre ces deux équations, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{\delta y}{\delta x}$, et à cause que cette équation appartient à la première limite [équat.($b$)], on aura $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\delta y_1}{\delta x_1}$; ainsi la tangente trigonométrique de l'angle que forme la tangente de la courbe au point où elle est rencontrée par la plus courte distance, étant représentée par $t$, on aura

$$t = \frac{\delta y_1}{\delta x_1} \ldots\ldots (e).$$

Mais de l'équation ($d$) qui est relative à la plus courte distance, on tire $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\delta x_1}{\delta y_1}$; donc représentant par $T$ la tangente trigonométrique de l'angle que forme la droite sur laquelle est prise la plus courte distance avec l'axe des $x$, il viendra $\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = -\frac{1}{T}$, et substituant cette valeur dans l'équation ($e$), on aura celle

$$Tt + 1 = 0 \ldots\ldots (f),$$

ce qui, comme on le sait, est le caractère des droites perpendiculaires entre elles (Biot, art. 32).

On démontrerait de même, que représentant par $t'$ la tangente trigonométrique de l'angle que forme la tangente de la courbe de l'équation ($c$) au point où elle est rencontrée par la ligne de la plus courte distance, on a

$$Tt' + 1 = 0 \ldots\ldots (g);$$

donc la droite qui mesure la plus courte distance entre deux lignes données est normale à ces deux lignes, et par conséquent les tangentes qui contactent les

deux courbes dans les deux points les plus voisins, sont parallèles entre elles.

Pour mettre en exécution la recherche de la plus courte distance entre deux courbes données, on prendra dans leurs équations respectives, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en fonctions d'une seule des deux variables $x$ ou $y$, on égalera ces deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera les coordonnées du point de l'une de ces deux courbes, par exemple la première, où doit passer la ligne de la plus courte distance (*); ensuite on trouvera l'équation $y = Tx + c$ de cette dernière ligne, soit en calculant l'équation de la normale de la première courbe (art. 115), soit en calculant directement $T$ par le moyen de l'équation $(f)$, et cherchant la valeur de $c$ d'après la condition que la droite en question passe par le point où elle rencontre la première courbe, et

---

(*) Il semble qu'on ne devrait égaler les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ prises dans les équations des deux courbes, pour en déduire celles des coordonnées $y$ et $x$ en quantités constantes, qu'en tant qu'on considérerait un point commun à ces deux courbes, et c'est ce qui n'a pas lieu dans ce cas-ci. Mais si on imagine que la courbe
Fig. 5. EQG dont la plus courte distance à celle BCD est CF, se meut de manière que le point F de la première de ces courbes glisse le long de FC; il est évident que quand le point F sera sur celui C, il n'y aura que ce point de contact entre les deux courbes, donc la tangente FI se confondra avec celle CH, et le calcul précédent donnera les coordonnées du point de contact C; Or ce point C qui appartient à la courbe BCD, reste le même, soit que la courbe EFG contacte celle BCD, soit qu'elle se trouve à la distance CF; donc en égalant les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ on a, dans tous les cas, les coordonnées du point C le plus voisin de la courbe EQG.

dont les coordonnées sont déjà déterminées. Combinant l'équation de la ligne de la plus courte distance avec celle de la seconde limite [équat. ($c$)], on aura les coordonnées du point de cette dernière ligne qui est le plus voisin de la première limite.

Soit, par exemple, proposé de trouver la plus courte distance de l'arc de cercle BCD ayant pour équation $y = \sqrt{1 - x^2}$, à l'arc de parabole EQG ayant pour équation $(y - 3)^2 = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{4})$. De l'équation du cercle on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$; celle de la parabole donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3(4x - 1)}}$; égalant ces deux valeurs, on a l'équation du troisième degré $12x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ dont les trois racines sont $x = 0,5$ et $x = -\frac{1 \pm \sqrt{-5}}{6}$; ces deux racines imaginaires prouvent, ce qui est évident de soi-même et doit toujours avoir lieu, qu'il ne peut y avoir qu'un point de chacune des courbes qui satisfasse à la condition du *minimum* des distances. Substituant la valeur réelle de $x$ dans l'une de celles de $\frac{dy}{dx}$, par exemple la première, on trouve $\frac{dy}{dx}$ ou $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; et mettant cette valeur dans l'équation $Tt + 1 = 0$, on a $T = \sqrt{3}$; donc l'équation de la droite des plus courtes distances est $y = x\sqrt{3} + c$; mais au point C où cette droite rencontre l'arc de cercle, on a $x = 0,5$, d'où $y = \sqrt{0,75}$; donc $c = 0$, et l'équation de la ligne ACFM est $y = x\sqrt{3}$; ce à quoi on devait s'attendre d'avance, puisqu'étant normale au cercle, elle doit passer par son centre. Combinant cette dernière équation avec celle de la para- Fig. 5.

Fig. 5. bole pour trouver le point F, on a $x = 1,4$ et $x = 2,2$. La première seule de ces deux valeurs satisfait à la question, en donnant l'abscisse du point F de la parabole le plus voisin du cercle ; la seconde valeur de $x$ est l'abscisse du point M où la ligne des plus courtes distances rencontre la branche supérieure de la parabole.

---

# CHAPITRE IV.

*Extension de la méthode des variations dans le cas où la fonction différentielle proposée est entre trois ou un plus grand nombre de de variables.*

559. FAISANT pour abréger dans l'équation ($e$) de l'article 551, le coefficient de $\delta y$ hors du lien de $d = \mathrm{Y}$, et représentant respectivement les coefficiens de $\delta y$, $d\delta y$ etc. sous le lien de $d$, par $\mathrm{Y}'$, $\mathrm{Y}''$ etc ; cette équation ($e$) deviendra

$$\delta U = \mathrm{Y}\delta y + d\{\mathrm{Y}'\delta y + \mathrm{Y}''d\delta y + \text{etc.}\} \ldots\ldots (a),$$

et si, comme nous l'avons démontré dans le chapitre précédent, $x$ est variable dans le sens caractérisé par $\delta$, il faudra substituer $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ à $\delta y$, et ajouter $\frac{U\delta x}{dx}$.

Si, actuellement nous considérons le cas où $U$ est fonction des trois variables $x$, $y$, $z$, ainsi que de leurs différentielles, en supposant toujours que $x$ varie uni-

formément dans le sens caractérisé par $\Delta$; alors la valeur de la différentielle proposée pouvant être mise sous la forme

$$U = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.} + az + b\frac{dz}{dx}$$
$$+ c\frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.} \ldots (573),$$

il est clair qu'en considérant d'abord $x$ comme invariable dans le sens caractérisé par $\delta$, on aura, par des calculs analogues à ceux qui nous ont conduit à l'équation ($e$) de l'article 551, celle

$$\delta U = Y\delta y + Z\delta z + d\{Y'dy + Y''d\delta y + \text{etc.}$$
$$+ Z'\delta z + Z''d\delta z + \text{etc.}\} \ldots\ldots (b);$$

dans laquelle, d'une manière analogue aux quantités représentées par Y, Y', Y''...., on a

$$Z = a' - \frac{db'}{dx} + \frac{d^2c'}{dx^2} - \text{etc.}$$

$$Z' = \frac{b'}{dx} - \frac{dc'}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$Z'' = \frac{c'}{dx^2} - \text{etc.}$$

En examinant l'équation ($b$), il est aisé de voir que la quantité $Y\delta y + Z\delta z$ ne pouvant être une différence exacte tant que $\delta y$ et $\delta z$ ont des valeurs arbitraires, doit être nulle d'elle-même; on aura donc

$$Y\delta y + Z\delta z = 0 \ldots\ldots (574),$$

ce qui est l'équation générale des *maximis* et *minimis*.

560. S'il n'y a aucune relation donnée entre $y$ et $z$ pour une même valeur de $x$, alors leurs variations $\delta y$ et $\delta z$ étant indépendantes entre elles, il faudra

pour satisfaire à l'équation (574), faire séparément

$$\{Y = 0 \quad \text{et} \quad Z = 0\} \ldots\ldots (575),$$

et ces deux équations entre $x$, $y$, $z$ serviront à trouver les valeurs de $y$ et $z$ en fonctions de $x$ qui satisfont à la question de *maximum* ou *minimum* proposée.

561. Mais si par les conditions du problème, on a entre les trois variables $x$, $y$, $z$ une équation

$$F(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots (a),$$

alors, en supposant toujours $x$ invariable dans le sens $\delta$, il faudra varier l'équation ($a$) par rapport à $y$ et $z$, et substituer le rapport qu'on en déduira de $\delta y$ à $\delta z$ dans l'équation aux extrêmes grandeurs (574), ce qui donnera une équation sans variations qui, combinée avec l'équation ($a$), donnera les valeurs de $y$ et $z$ en fonctions de $x$. Ainsi en représentant par $F^{(y)}$ le coefficient de $\delta y$ lorsqu'on a varié l'équation ($a$) par rapport à $y$ seule, et par $F^{(z)}$ le coefficient de $\delta z$ dans la variation partielle de ($a$) par rapport à $z$, on aura l'équation $F^{(y)}\delta y + F^{(z)}\delta z = 0$; et éliminant entre cette équation et celle (574) la quantité $\frac{\delta y}{\delta z}$, il viendra l'équation

$$YF^{(z)} - ZF^{(y)} = 0 \ldots\ldots\ldots (576),$$

qui, combinée avec celle ($a$), donnera les valeurs respectives de $y$ et $z$ en fonctions de $x$.

562. L'équation (574) réduit le second membre de celle ($b$) de l'article 559 à la seule quantité qui est entièrement sous le lien de $d$; donc à cause de $\delta u = \int \delta U$ (art. 550), on aura

$$\delta u = Y'\delta y + Y''d\delta y + \text{etc.} + Z'\delta z + Z''d\delta z + \text{etc.} \ldots\ldots (577).$$

Mais

Mais ici, comme à l'article 552, on prouvera que l'équation aux limites doit être $\delta u_1 - \delta u_2 = 0$ [éq. 569]; donc dénotant de même qu'à l'article cité, les quantités appartenantes aux première et dernière limites de l'extrême grandeur cherchée, on aura pour équation aux limites,

$$Y'_1\delta y_1 + Y''_1 d\delta y_1 + \text{etc.} + Z'_1\delta z_1 + Z''_1 d\delta z_1 + \text{etc.} - Y'_2\delta y_2 - Y''_2 d\delta y_2 - \text{etc.} - Z'_2\delta z_2 - Z''_2 d\delta z_2 - \text{etc.} = 0 \ldots (578).$$

563. En supposant actuellement que $x$ varie aussi dans le sens de $\delta$, nous démontrerions de même que nous l'avons fait à l'article 557, qu'il faut substituer dans l'équation (574) les quantités $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ et $\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x$ à la place des respectives $\delta y$ et $\delta z$, ce qui donne dans ce cas-là, pour équation des extrêmes grandeurs celle

$$Y\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + Z\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x\right) = 0 \ldots (a),$$

à laquelle on ne pourra satisfaire s'il n'y a aucune relation donnée entre $y$ et $z$, que par le moyen des équations (575); ainsi dans ce cas-là, la variation de $x$ dans le sens caractérisé par $\delta$, n'influe en rien sur la quantité d'extrême grandeur qui satisfait à la question.

De même s'il y a entre les trois variables, l'équation $F(x, y, z) = 0$, celle-ci étant successivement differentiée et variée, donne

$$F^x dx + F^y dy + F^z dz = 0 \ldots\ldots\ldots (b)$$
$$F^{(x)}\delta x + F^{(y)}\delta y + F^{(z)}\delta z = 0 \ldots\ldots (c),$$

en représentant par $F^x dx$, $F^y dy$, $F^z dz$ les différentielles partielles effectuées de $F(x, y, z)$, et par $F^{(x)}\delta x$,

$F^{(y)}\delta y$, $F^{(z)}\delta z$ les variations partielles effectuées de la même quantité. Mais il est évident que l'algorithme du calcul des variations étant le même que celui des différences, les coefficiens de $dx$, $dy$ et $dz$ dans l'équation $(b)$, seront respectivement identiques avec ceux de $\delta x$, $\delta y$ et $\delta z$ dans l'équation $(c)$; donc éliminant $F^x = F^{(x)}$ entre les deux équations précédentes, on aura celle

$$F^{(y)}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + F^{(z)}\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x\right) = 0;$$

et éliminant entre cette dernière équation et celle $(a)$, la quantité $\dfrac{\delta y - \dfrac{dy}{dx}\delta x}{\delta z - \dfrac{dz}{dx}\delta x}$, on retrouvera l'équation (576): donc, soit que $x$ varie ou ne varie pas, on aura toujours la même quantité d'extrême grandeur qui satisfera à la question; ainsi la variation de $x$ dans le sens caractérisé par $\delta$, n'influe que sur l'équation aux limites.

564. Pour faire une application de cette théorie, proposons-nous de trouver *la plus courte distance entre deux termes placés dans l'espace.*

Nous avons vu à l'article 531 que la longueur absolue d'une ligne dans l'espace est $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, ainsi, d'après l'état de la question, cette quantité que suivant la notation actuelle nous représentons par $u$ ou $\int U$, doit être un *minimum*.

Variant l'équation $U = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, en considérant d'abord $x$ comme invariable dans le sens caractérisé par $\delta$, on a $\delta U = \dfrac{dyd\delta y + dzd\delta z}{U}$; mais

$dyd\delta y = d(dy\delta y) - \delta y d^2 y$ et $dzd\delta z = d(dz\delta z) - \delta z d^2 z$ ;

donc

$$\delta U = -\frac{\delta y d^2 y - \delta z d^2 z}{U} + \frac{d\{dy\delta y + dz\delta z\}}{U} \ldots (a),$$

ce qui donne pour l'équation générale du *minimum*

$$\frac{d^2 y}{U}\delta y + \frac{d^2 z}{U}\delta z = 0 \ldots (b) \text{ [ form. (574).}$$

Ainsi en supposant qu'il n'y a aucune équation de relation entre $x$, $y$ et $z$, on satisfait à l'équation $(a)$ en faisant $\frac{d^2 y}{U} = 0$ et $\frac{d^2 z}{U} = 0$ [ équat. (575)], d'où $d^2 y = 0$ et $d^2 z = 0$, et intégrant il vient les deux équations

$$\{y = ax + b \quad \text{et} \quad z = a'x + b'\} \ldots\ldots (c),$$

en représentant par $a$, $b$, $a'$, $b'$ des constantes indéterminées : donc la plus courte distance demandée est une ligne droite.

L'équation des limites déduite de l'équation $(a)$ est

$$dy_1\delta y_1 + dz_1\delta z_1 - (dy_2\delta y_2 + dz_2\delta z_2) = 0 \ldots (d) \text{[équat. (578)]},$$

et si ces deux limites sont indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément

$$\delta u_1 = 0 \text{ et } \delta u_2 = 0 \text{ ; ou } dy_1\delta y_1 + dz_1\delta z_1 = 0 \ldots\ldots (e)$$

et $$dy_2\delta y_2 + dz_2\delta z_2 = 0 \ldots\ldots (f).$$

Ces équations se vérifient d'elles-mêmes, si les deux points entre lesquels on veut mener la plus courte distance sont fixes et déterminés, puisqu'à ces points on a les variations de leurs coordonnées $y$ et $z$ nulles.

Mais si les limites de la plus courte distance sont des lignes courbes données, alors il est clair qu'il faudra faire varier en même temps $x$, $y$, $z$ ce

qui n'influera en rien sur les équations ($c$) (art 563) et n'influera que sur les équations des limites ($e$), ($f$). Pour avoir dans ce cas-là ces équations, considérons celle $\delta u = \frac{dy\delta y + dz\delta z}{U}$ dans laquelle il faudra, comme nous l'avons dit précédemment, substituer à $\delta y$ et $\delta z$ les quantités respectives $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$, $\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x$ et ajouter $\frac{U\delta x}{dx}$, ce qui donnera, toutes réductions faites, $\delta u = \frac{dy\delta y + dz\delta z + dx\delta x}{U}$; ainsi considérant toujours les limites comme indépendantes l'une de l'autre, on aura, après avoir divisé par $dx$, les deux équations

$$\frac{dy_1}{dx_1}\delta y_1 + \frac{dz_1}{dx_1}\delta z_1 - \delta x_1 = 0 \ldots\ldots (g)$$

$$\frac{dy_2}{dx_2}\delta y_2 + \frac{dz_2}{dx_2}\delta z_2 - \delta x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (h).$$

Or, ne nous occupant que de la première de ces équations, car ce que nous dirons pour la première limite a également lieu pour la seconde; nous observerons que $\frac{dy_1}{dx_1}$ et $\frac{dz_1}{dx_1}$, sont respectivement les tangentes trigonométriques des angles que forment avec l'axe des $x$, les projections de la plus courte distance sur les plans des $xy$ et des $xz$; donc représentant la tangente du premier de ces angles par $T$, et celle du second par $T'$, l'équation ($g$) deviendra

$$T\delta y_1 + T'\delta z_1 - \delta x_1 = 0 \ldots\ldots (i);$$

cela posé, représentant par

$$\{y = f(x) \quad \text{et} \quad z = f'(x)\} \ldots\ldots (k),$$

les équations de la première limite, et opérant suc-

cessivement par voie de différentiation et de variation sur ces deux équations, comme nous l'avons fait sur l'équation ($b$) de l'article 558, il viendra

$$\left\{\delta y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}\,\delta x_1 \quad \text{et} \quad \delta z_1 = \frac{dz_1}{dx_1}\,\delta x_1\right\}\ldots(l).$$

Mais $\frac{dy_1}{dx_1}$ et $\frac{dz_1}{dx_1}$ représentent respectivement dans ces deux équations, les tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des $x$ par les projections de la tangente à la première limite sur le plan des $yx$ et des $xz$; donc représentant par $t$ la première tangente trigonométrique, et par $t'$ la seconde, les équations ($l$) se réduiront à celles

$$\left\{\delta y_1 = t\delta x_1 \quad \text{et} \quad \delta z_1 = t'\delta x_1\right\}\ldots\ldots(m),$$

dans lesquelles il est évident que $\delta y_1$, $\delta z_1$ et $\delta x_1$ sont des variations respectivement identiques avec celles dénotées de même dans l'équation ($i$), puisque les coordonnées de la plus courte distance et de la première limite, étant identiques au point où la première de ces lignes rencontre la seconde, il est clair qu'à un autre point de la première limite où elle sera rencontrée par une ligne de plus courte distance qui est une variation de la première, les coordonnées $y_1$, $z_1$ et $x_1$ du premier point auront éprouvé les mêmes variations $\delta y_1$, $\delta z_1$ et $\delta x_1$ : nous pouvons donc, d'après cela, substituer les valeurs de $\delta y_1$ et $\delta z_1$ données par les équations ($m$) dans l'équation ($i$), ce qui donnera celle

$$(Tt + T''t' + 1)\,\delta x_1 = 0\ldots\ldots,$$

laquelle devant avoir lieu indépendamment de la valeur de $\delta x_1$, ne peut être généralement satisfaite qu'en faisant

$$Tt + T''t' + 1 = 0,$$

équation qui, comme on le sait, est le caractère de

la perpendicularité de deux droites qui se rencontrent dans l'espace (Biot, art. 45); donc la ligne des plus courtes distances est perpendiculaire à la tangente de la première limite : on démontrera exactement de même, qu'elle est aussi perpendiculaire à la seconde limite. Donc généralement la plus courte distance entre deux lignes quelconques dans l'espace, est la droite qui coupe à angles droits ces deux lignes.

Si on enveloppe ces limites par des surfaces, et qu'on fasse passer des plans par les deux tangentes que nous avons considérées, il est clair que ces deux plans, perpendiculaires sur une même droite, seront parallèles entre eux : donc la plus courte distance entre deux surfaces, est égale à la distance des deux plans respectivement tangens à ces deux surfaces, qui sont parallèles entre eux.

565. Ces premiers principes du calcul des variations, que j'ai rendus les plus simples possibles, étant bien médités et entendus par le lecteur, il pourra lire avec fruit les ouvrages de Lagrange sur cette branche d'analyse que les bornes de cet Ouvrage m'empechent de poursuivre plus loin. Je finirai seulement par observer que la seule comparaison des équations (568), dans le cas de deux variables, et (577) dans le cas de trois variables, fait aisément avoir la forme des équations analogues pour un plus grand nombre de variables, et par conséquent ce que doivent être les équations générales des extrêmes grandeurs, et des limites pour un nombre quelconque de variables.

# SECTION VII.

## *Calcul intégral aux différences, et application de ce calcul à celui de la sommation des séries.*

## CHAPITRE Ier.

### *Règles fondamentales et intégration des fonctions aux différences du premier ordre algébriques et transcendantes à une seule variable.*

566. Le calcul dont nous allons nous occuper, et qui s'appelle aussi *Calcul inverse des différences*, est, relativement à celui aux différences, ce qu'est le Calcul intégral proprement dit, relativement au Calcul différentiel, c'est-à-dire qu'il a pour objet de remonter des différences aux quantités primitives, ainsi $\Delta X$ étant la différence d'une fonction quelconque variable, son intégrale est $X$.

567. On se sert pour indiquer l'intégration aux différences de la lettre caractéristique $\Sigma$; ainsi $\Sigma\Delta X = X$. Quelquefois la formule qui est sous le lien de $\Sigma$ ne renferme pas la caractéristique $\Delta$, mais elle y est sous-

entendue. Par exemple, $\Sigma X$ doit être prise comme l'intégrale d'une quantité dont la différence est $X$, c'est-à-dire qui s'accroît de $X$ lorsque $x$, dont $X$ est une fonction, augmente de sa différence $\Delta x$.

568. De ce que les constantes combinées par voie d'addition ou de soustraction avec les variables, disparaissent lorsqu'on prend la différence d'une fonction variable (art 7), il suit évidemment que l'intégration aux différences d'une formule, admet, comme dans le Calcul intégral aux différentielles, des constantes arbitraires qu'on détermine ensuite d'après certaines conditions de la question qui a donné lieu à ces calculs.

569. Puisque $\Delta(AX) = A\Delta X$, on en conclura que $\Sigma\Delta AX = A\Sigma\Delta X$, et que conséquemment lorsque la formule aux différences qu'on veut intégrer a un facteur constant, on peut passer ce facteur en avant du signe d'intégration.

570. Représentant par $X$, $Y$, $Z$ des fonctions monomes de variables, on sait que $\Delta(X+Y+Z) = \Delta X + \Delta Y + \Delta Z$; donc $\Sigma(\Delta X + \Delta Y + \Delta Z) = X + Y + Z$; mais $X = \Sigma\Delta X$, $Y = \Sigma\Delta Y$, $Z = \Sigma\Delta Z$, donc $\Sigma(\Delta X + \Delta Y + \Delta Z) = \Sigma\Delta X + \Sigma\Delta Y + \Sigma\Delta Z$; d'où nous conclurons que *l'intégrale d'un polynome, est égale à la somme des intégrales de chaque terme.*

571. Otant la caractéristique $\Delta$ du premier membre de l'équation (63)[art 178], mettant celle $\Sigma$ en avant du second membre, et divisant l'équation résultante par $a$, (art. 569), on a celle $x^m = \Sigma\left[mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}\Delta x^3 + \text{etc.}\right]$; et considérant $\Delta x$ comme une quantité constante, il viendra,

d'après ce qui a été dit dans les deux articles précédens,

$$x^m = m\Delta x \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta x^3 \Sigma x^{m-3} + \text{etc.}$$

Faisant successivement dans cette dernière équation $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ on a celles

$$x = \Delta x \Sigma x^0$$
$$x^2 = 2\Delta x \Sigma x + \Delta x^2 \Sigma x^0$$
$$x^3 = 3\Delta x \Sigma x^2 + 3\Delta x^2 \Sigma x + \Delta x^3 \Sigma x^0$$
$$x^4 = 4\Delta x \Sigma x^3 + 6\Delta x^2 \Sigma x^2 + 4\Delta x^3 \Sigma x + \Delta x^4 \Sigma x^0$$

etc.

Prenant dans chacune de ces équations, à partir de la première, la valeur de l'intégrale de la plus haute puissance de $x$, et y substituant les valeurs des intégrales des puissances inférieures de $x$ qui résultent successivement des équations qui précèdent celle pour laquelle on opère, on aura les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{\Delta x} \\
\Sigma x^1 &= \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2} \\
\Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{2\Delta x}{6} \\
\Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2\Delta x}{4} \\
\Sigma x^4 &= \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3\Delta x}{3} - \frac{x\Delta x^3}{5.6}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (579).$$

etc.

Au reste, on peut trouver directement la valeur de $\Sigma x^m$ par le moyen des coefficiens indéterminés; en effet, soit

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^{m+2} + Cx^{m+3} + \text{etc.} \ldots (a).$$

A, B, C... étant des quantités constantes indéterminées. Prenant la différence de cette équation, il vient $x^m = A\Delta x^{m+1} + B\Delta x^{m+2} + C\Delta x^{m+3} + \text{etc.}$, et effectuant les développemens des différences partielles, par le moyen de la formule (63), on aura une équation aux différences du premier ordre qui, devant avoir lieu indépendamment des valeurs de $x$, donnera en même temps autant d'équations que de quantités indéterminées, d'où on déduira la loi suivant laquelle toutes ces quantités se lient entre elles, de manière qu'à partir de la valeur de $A = \frac{1}{(m+1)\Delta x}$, on déduira successivement d'après cette loi, les valeurs de B, C, D...., et les substituant ensuite dans l'équation $(a)$, on aura généralement

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma x^m = {} & \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}\frac{m\Delta x}{2.3}x^{m-1} \\
& - \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)\Delta x^3}{2.3.4.5}x^{-3} \\
& + \frac{1}{6}\frac{m(m-1)\ldots(m-4)\Delta x^5}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 7}x^{m-5} \\
& - \frac{3}{10}\frac{m(m-1)\ldots(m-6)\Delta x^7}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 9}x^{m-7} \\
& + \frac{5}{6}\frac{m(m-1)\ldots(m-8)\Delta x^9}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 11}x^{m-9} \\
& - \frac{691}{210}\frac{m(m-1)\ldots(m-10)\Delta x^{11}}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 13}x^{m-11} \\
& + \frac{35}{2}\frac{m(m-1)\ldots(m-12)\Delta x^{13}}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 15}x^{m-13} \\
& - \frac{3617}{50}\frac{m(m-1)\ldots(m-14)\Delta x^{15}}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots 17}x^{m-15} \\
& \text{etc.}
\end{aligned}\right\} . (580).$$

EXEMPLE. *Intégrer le polynome*

$$ax^3 - bx + e \ldots\ldots (b)$$

*en prenant la différence constante* $\Delta x = 1$.

Représentant par X le polynome ($b$), on a $\Sigma X = a\Sigma x^3 - b\Sigma x + e\Sigma x^0$, et substituant les valeurs de $\Sigma x^3$, $\Sigma x$ et $\Sigma x^0$ données par les équations de la table (579), il vient

$$\Sigma X = x\left[\frac{ax^3}{4} - \frac{ax^2}{2} + \left(\frac{a-2b}{4}\right)x + \frac{b+2e}{2}\right] + \text{const}\ldots(c).$$

572. Proposons-nous maintenant d'intégrer la formule

$$x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)\ldots.(a).$$

Pour parvenir à cette intégration, soit fait

$$y = (x+a)(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\ldots[x+a + (n+1)\Delta x]\ldots\ldots(b),$$

et prenons la différence de cette formule, ce qui nous donnera $\Delta y$ ou

$$\begin{aligned}\Delta\{(x+a)(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\ldots.[x+a+(n+1)\Delta x]\}\\ =(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)(x+a+3\Delta x)\ldots[x+a\\ +(n+2)\Delta x]-(x+a)(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\\ \ldots[x+a+(n+1)\Delta x]=(x+a+\Delta x)(x+a+2\Delta x)\\ \ldots[x+a+(n+1)\Delta x](n+2)\Delta x\ldots\ldots(c).\end{aligned}$$

Faisant pour abréger $a+\Delta x = p$, divisant par $(n+2)\Delta x$ et intégrant, on a

$$\begin{aligned}\Sigma(x+p)(x+p+\Delta x)(x+p+2\Delta x)\ldots(x+p+n\Delta x)\\ =(x+p-\Delta x)(x+p)(x+p+\Delta x)(x+p+2\Delta x)\ldots\\ \ldots(x+p+n\Delta x):(n+2)\Delta x+\text{const}\ldots\ldots(d).\end{aligned}$$

Soit actuellement $\Delta x = -a$, d'où $p=0$, ce qui réduira l'équation précédente à celle que nous voulions

obtenir

$$\Sigma x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)=(x-\Delta x)x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+n\Delta x):(n+2)\Delta x+\text{const}\ldots\ldots(581).$$

573. Faisant $a=0$ d'où $p=\Delta x$, l'équation ($d$) de l'article précédent se réduira à celle

$$\Sigma(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)=x(x+\Delta x)\ldots\ldots[x+(n+1)\Delta x]:(n+2)\Delta x+\text{const}\ldots\ldots(582).$$

Il est aisé de voir que cette dernière formule peut se déduire immédiatement de celle (581), en mettant dans cette dernière $x+\Delta x$ à la place de $x$.

574. Pour intégrer la formule $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+n\Delta x)}$, nous ferons $y=\dfrac{1}{(x+a)(x+a+\Delta x)\ldots\ldots(x+a+n\Delta x)}$, et prenant la différence de cette dernière équation, nous aurons, toutes réductions faites,

$$\Delta y=\frac{-n\Delta x}{(x+a)(x+a+\Delta x)\ldots(x+a+n\Delta x)}:$$

divisant cette dernière équation par $-n\Delta x$, intégrant, mettant à la place de $y$ sa valeur et faisant $a=0$, il vient

$$\Sigma\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+n\Delta x)}=\text{const.}-\frac{1}{n\Delta x}\left[\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]}\right](583).$$

575. Nous nous proposerons encore d'intégrer la formule

$$\frac{1}{(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)(x+c\Delta x)\text{ etc.}}\ldots\ldots(a),$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$... représentent des nombres entiers, positifs et inégaux entre eux.

Soit supposé que $a$ est la plus petite des quantités constantes $a$, $b$, $c$..., et faisons $z = x + a\Delta x$, d'où

$$\Delta z = \Delta x \quad \text{et} \quad x = z - a\Delta x \ldots\ldots (b);$$

substituant cette valeur de $x$ dans la formule proposée ($a$), et faisant pour abréger $b - a = a'$, $c - a = b'$..., on aura à intégrer la transformée

$$\frac{1}{z(z + a'\Delta z)(z + b'\Delta z)\,\text{etc.}} \ldots\ldots (c).$$

Pour parvenir à cette intégration, il faut dépécer la fraction ($c$) en autant d'autres fractions de la forme $\frac{A}{z(z + a'\Delta z)}$, $\frac{B}{z(z + b'\Delta z)}$ etc. qu'il y a de facteurs binomes dans le dénominateur de la fraction qu'on décompose (*voyez* le dix-septième chapitre de l'Algèbre); ainsi toute la difficulté se réduit à l'intégration d'une suite de fractions de la forme $\frac{A}{z(z + a'\Delta z)}$.

Ecrivant cette dernière fraction ainsi qu'il suit $\frac{A}{a'\Delta z} \times \frac{a'\Delta z}{z(z + a'\Delta z)}$, et faisant pour le moment abstraction du facteur constant $\frac{A}{a'\Delta z}$ que nous restituerons à l'intégrale, posons l'équation

$$\frac{a'\Delta z}{z(z + a'\Delta z)} = \frac{M}{z} + \frac{M}{z + a'\Delta z}, \text{ d'où } M = 1 \text{ et } N = -1;$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation précédente et intégrant, on aura

$$\Sigma \frac{a'\Delta z}{z(z + a'\Delta z)} = \Sigma \frac{1}{z} - \Sigma \frac{1}{z + a'\Delta z} \ldots (d).$$

Or, remarquons que $m$ représentant un nombre entier et positif, on a $\Delta \frac{1}{z+m\Delta z} = \frac{1}{z+(m+1)\Delta z} - \frac{1}{z+m\Delta z}$; donc

$$\Sigma \frac{1}{z+(m+1)\Delta z} = \frac{1}{z+m\Delta z} + \Sigma \frac{1}{z+m\Delta z};$$

faisant successivement dans cette équation $m = 0, 1, 2, 3, \ldots a'-1$, il viendra

$$\Sigma \frac{1}{z+\Delta z} = \frac{1}{z} + \Sigma \frac{1}{z}$$

$$\Sigma \frac{1}{z+2\Delta z} = \frac{1}{z+\Delta z} + \Sigma \frac{1}{z+\Delta z} = \frac{1}{z+\Delta z} + \frac{1}{z} + \Sigma \frac{1}{z}$$

$$\Sigma \frac{1}{z+3\Delta z} = \frac{1}{z+2\Delta z} + \Sigma \frac{1}{z+2\Delta z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+\Delta z} + \frac{1}{z+2\Delta z} + \Sigma \frac{1}{z}$$

.....

$$\Sigma \frac{1}{z+a'\Delta z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+\Delta z} + \frac{1}{z+2\Delta z} \ldots + \frac{1}{z+(a'-1)\Delta z} + \Sigma \frac{1}{z};$$

prenant dans cette dernière équation la valeur de $\Sigma \frac{1}{z} - \Sigma \frac{1}{z+a'\Delta z}$, la substituant dans l'équation $(d)$, et multipliant les deux membres par $\frac{A}{a'\Delta z}$, on a

$$\Sigma \frac{A}{z(z+a'\Delta z)} = -\frac{A}{a'\Delta z}\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z+\Delta z} + \frac{1}{z+2\Delta z} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{z+(a'-1)\Delta z}\right\} + \text{const.}$$

Mais $z = x + a\Delta x$ [équat. $(b)$] et $a' = b - a$; donc

$$\Sigma \frac{A}{(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)} = -\frac{A}{(b-a)}\left\{\frac{1}{x+a\Delta x} + \frac{1}{x+(a+1)\Delta x}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{x+(a+2)\Delta x} \ldots + \frac{1}{x+(b-a)\Delta x}\right\} + \text{const.} \ldots\ldots (e).$$

Mettant respectivement B et $c$ à la place de A et $b$ dans l'équation ($e$), on aura l'intégrale de $\frac{B}{(x+a\Delta x)(x+c\Delta x)}$, et ainsi de suite. Toutes ces intégrales réunies donneront celle de la formule proposée ($a$).

576. Proposons-nous enfin d'intégrer la formule

$$\frac{A+Bx}{x(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots\ldots(x+p\Delta x)(x+q\Delta x)}\ldots(a),$$

dans laquelle A et B sont des quantités constantes quelconques déterminées, et $a, b\ldots p, q$ des nombres entiers et positifs.

Représentant par M une quantité constante indéterminée, écrivons la proposée ($a$) en ajoutant et retranchant en même temps la fraction

$$\frac{M}{x(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots\ldots(x+p\Delta x)},$$

ensuite réduisons les deux premiers termes de ce trinôme au même dénominateur, en multipliant M par $x+q\Delta x$; et, pour abréger, représentons le dernier terme de ce trinome qui est la fraction en même temps ajoutée et retranchée, par X, ce qui donnera la formule

$$\frac{(B+M)\left[x+\frac{A+Mq\Delta x}{B+M}\right]}{x(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots(x+p\Delta x)(x+q\Delta x)}-X\ldots(b).$$

Or, puisque M est une quantité constante indéterminée, on peut égaler $\frac{A+Mq\Delta z}{B+M}$ au second terme d'un quelconque des facteurs binomes du dénominateur, excepté le dernier, car alors M disparaîtrait. Soit donc

fait, par exemple, $\frac{A+Mq\Delta x}{B+M}=a\Delta x$, d'où on tire

$$M=\frac{A-aB\Delta x}{a\Delta x-q\Delta x}\ldots\ldots\ldots(c).$$

Cette valeur de M étant actuellement déterminée, représentons par C la quantité constante déterminée $B+M$; ainsi nous aurons à intégrer le polynome

$$\frac{C}{(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots.(x+q\Delta x)}$$
$$+\frac{aC\Delta x}{x(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots(x+q\Delta x)}-X\ldots.(d),$$

dont les trois termes s'intègrent par la méthode enseignée dans l'article précédent.

Passons maintenant à l'intégration des quantités exponentielles.

577. Nous avons démontré à l'art. 82 l'équation

$$\Delta.a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)\ldots\ldots(70);$$

d'où on tire $a^x=\frac{\Delta.a^x}{a^{\Delta x}-1}$, et intégrant, il vient

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+\text{const}\ldots\ldots(584).$$

578. Mais plus généralement, proposons-nous d'intégrer $x^na^x$. On a

$$\Delta(x^na^x)=(x+\Delta x)^na^xa^{\Delta x}-x^na^x=x^na^xa^{\Delta x}$$
$$+nx^{n-1}a^xa^{\Delta x}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}a^xa^{\Delta x}\Delta x^2\ldots.$$
$$\ldots.+a^xa^{\Delta x}\Delta x^n-x^na^x.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $x^na^x$, divisant

visant par $a^{\Delta x}-1$ et intégrant, il vient

$$\Sigma x^n a^x = \frac{x^n a^x}{a^{\Delta x}-1} - \frac{a^{\Delta x}\Delta x}{a^{\Delta x}-1}\Big[n\Sigma(x^{n-1}a^x)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\Delta x\Sigma(x^{n-2}a^x)\ldots+\Delta x^{n-1}\Sigma a^x\Big]\ldots\ldots(585).$$

Faisant successivement $n=1, 2, 3\ldots\ldots$, et substituant à la place de $\Sigma a^x$ sa valeur [équat. (584), art. 577], on a

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma(xa^x) &= \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}\left[x-\frac{a^{\Delta x}\Delta x}{a^{\Delta x}-1}\right]\\
\Sigma(x^2a^x) &= \frac{x^2a^x}{a^{\Delta x}-1}-\frac{a^{\Delta x}\Delta x}{a^{\Delta x}-1}\left[2\Sigma(xa^x)+\frac{a^x\Delta x}{a^{\Delta x}-1}\right]\\
\Sigma(x^3a^x) &= \frac{x^3a^x}{a^{\Delta x}-1}-\frac{a^{\Delta x}\Delta x}{a^{\Delta x}-1}\left[3\Sigma(x^2a^x)+3\Delta x\Sigma(xa^x)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{a^x\Delta x^2}{a^{\Delta x}-1}\right]\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(586).$$

D'où l'on voit que par des simples substitutions, on parviendra aisément à avoir l'intégrale de $x^n a^x$, quelle que soit la valeur entière et positive de $n$.

579. Pour intégrer la formule $\frac{x^m}{a^x}$, nous commencerons par prendre sa différence, ce qui nous donnera

$$\Delta\left(\frac{x^m}{a^x}\right)=\frac{(x+\Delta x)^m}{a^x a^{\Delta x}}-\frac{x^m}{a^x}=\frac{x^m}{a^x a^{\Delta x}}+m\frac{x^{m-1}\Delta x}{a^x a^{\Delta x}}$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}\frac{x^{m-2}\Delta x^2}{a^x a^{\Delta x}}\ldots\ldots+\frac{\Delta x^m}{a^x a^{\Delta x}}-\frac{x^m}{a^x}.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $\frac{x^m}{a^x}$, divi-

sant les deux membres par $\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}$ et intégrant, il vient

$$\Sigma\left(\frac{x^m}{a^x}\right)=\frac{a^{\Delta x}}{1-a^{\Delta x}}\left\{\frac{x^m}{a^x}-\frac{\Delta x}{a^{\Delta x}}\left[m\Sigma\left(\frac{x^{m-1}}{a^x}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m(m-1)\Delta x}{2}\Sigma\left(\frac{x^{m-2}}{a^x}\right)\ldots+\Delta x^{m-1}\Sigma\left(\frac{1}{a^x}\right)\right]\right\}\ldots(587).$$

Faisant successivement dans cette équation $m=0, 1, 2, 3\ldots$, on forme la table suivante,

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left(\frac{1}{a^x}\right)=\frac{a^{\Delta x}}{a^x(1-a^{\Delta x})}\\
&\Sigma\left(\frac{x}{a^x}\right)=\frac{a^{\Delta x}}{1-a^{\Delta x}}\left[\frac{x}{a^x}-\frac{\Delta x}{a^{\Delta x}}\Sigma\left(\frac{1}{a^x}\right)\right]\\
&\Sigma\left(\frac{x^2}{a^x}\right)=\frac{a^{\Delta x}}{1-a^{\Delta x}}\left[\frac{x^2}{a^x}-\frac{2\Delta x}{a^{\Delta x}}\Sigma\left(\frac{x}{a^x}\right)+\frac{\Delta x^2}{a^{\Delta x}}\Sigma\left(\frac{1}{a^x}\right)\right]\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(588)$$

d'où on tirera sans peine les valeurs de $\Sigma\frac{x}{a}$, $\Sigma\frac{x^2}{a^x}\ldots$ dégagés du signe de sommation, par le moyen de simples substitutions successives.

580. Combinant ensemble les équations (73) et (74) [art. 86 et 87], on a les deux équations

$$\sin x=-\tfrac{1}{2}\left[\Delta\sin x+\cot\tfrac{1}{2}\Delta x\Delta\cos x\right]\ \ldots(a)$$
$$\cos x=\tfrac{1}{2}\left[\Delta\sin x\cot\tfrac{1}{2}\Delta x-\Delta\cos x\right]\ \ldots(b).$$

Intégrant l'équation $(a)$, on a

$$\Sigma\sin x=-\tfrac{1}{2}\left[\sin x+\cos x\cot\tfrac{1}{2}\Delta x\right]$$
$$=-\frac{\tfrac{1}{2}\left[\sin x\sin\tfrac{1}{2}\Delta x+\cos x\cos\tfrac{1}{2}\Delta x\right]}{\sin\tfrac{1}{2}\Delta x};$$

et finalement

$$\Sigma \sin x = \text{const.} - \frac{\cos(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x} \ldots\ldots (589).$$

L'intégration de l'équation ( $b$ ) donne $\Sigma \cos x = \frac{1}{2}(\sin x \cot \frac{1}{2}\Delta x - \cos x)$, ou

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x} + \text{const.} \ldots (590).$$

581. Plus généralement, on pourra obtenir les intégrales de $x^n \sin x$ et $x^n \cos x$ en combinant ensemble les équations (78) et (79) [art. 90], afin d'en déduire les valeurs de $x^n \sin x$ et $x^n \cos x$; ensuite faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, et intégrant, on aura pour $n = 0$ les équations (589) et (590). Faisant $n = 1$, on aura par l'intégration, les valeurs de $\Sigma x \sin x$ et $\Sigma x \cos x$, renfermant $\Sigma \sin x$ et $\Sigma \cos x$. Faisant $n = 2$, on aura en intégrant, les valeurs de $\Sigma x^2 \sin x$ et $\Sigma x^2 \cos x$, dans lesquelles se trouveront $\Sigma \sin x$, $\Sigma \cos x$, $\Sigma x \sin x$, $\Sigma x \cos x$. Enfin généralement pour l'exposant $n$, on aura les valeurs de $\Sigma x^n \sin x$, $\Sigma x^n \cos x$, renfermant les intégrales $\Sigma x^{n-1} \sin x$, $\Sigma x^{n-1} \cos x$, $\Sigma x^{n-2} \sin x$, $\Sigma x^{n-2} \cos x \ldots \Sigma \sin x$, $\Sigma \cos x$; donc par des substitutions successives, on obtiendra les intégrales demandées de $x^n \sin x$ et $x^n \cos x$. Tous ces calculs n'offrent aucune difficulté, mais sont trop longs pour être placés ici. Nous ne nous arrêterons pas de même aux intégrales des autres lignes trigonométriques, qui se déduisent aisément de celles des sinus et cosinus, et finirons ce chapitre par les intégrations de $lx$ et $lx^x$ (*) que nous rencontrerons encore dans le chapitre suivant.

582. On a $\Delta l(x - \Delta x) = lx - l(x - \Delta x)$; donc $\Sigma lx = l(x - \Delta x) + \Sigma l(x - \Delta x)$; d'où il est aisé

(*) Il faut faire attention que $lx^x$ exprime le logarithme de la puissance $x$ de $x$, et non pas la puissance $x$ de $lx$.

de conclure qu'on a également

$$\Sigma l(x-\Delta x) = l(x-2\Delta x) + \Sigma l(x-2\Delta x)$$
$$\Sigma l(x-2\Delta x) = l(x-3\Delta x) + \Sigma l(x-3\Delta x)$$
etc.

Donc par des substitutions continues, en remontant jusqu'à la valeur de $\Sigma lx$, on aura

$$\Sigma lx = l(x-\Delta x) + l(x-2\Delta x) + l(x-3\Delta x) \ldots\ldots$$
$$\ldots + l\Delta x + lc,$$

en représentant par $c$ une constante arbitraire, d'où

$$\Sigma lx = l[(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\Delta x.c] \ldots (591),$$

ce qui est l'intégrale complète demandée.

583. De l'équation $\Delta l(x-\Delta x)^{x-\Delta x} = lx^x - l(x-\Delta x)^{x-\Delta x}$, on tire celle $\Sigma lx^x = l(x-\Delta x)^{x-\Delta x} + \Sigma l(x-\Delta x)^{x-\Delta x}$; d'où il est aisé de conclure qu'on a généralement $\Sigma l[x-(n-1)\Delta x]^{x-(n-1)\Delta x} = l[x-n\Delta x]^{x-n\Delta x} + \Sigma l[x-n\Delta x]^{x-n\Delta x}$; donc faisant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots n$, on aura une suite d'équations qui, par des substitutions successives en remontant jusqu'à la valeur de $\Sigma lx^x$, donneront l'intégrale demandée

$$\Sigma lx^x = l[(x-\Delta x)^{x-\Delta x}(x-2\Delta x)^{x-2\Delta x} \ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta x^{\Delta x} c] \ldots\ldots (592).$$

# CHAPITRE II.

## *De l'intégration des équations linéaires aux différences finies d'un ordre quelconque et à une seule variable.*

584. REPRÉSENTANT par $fx$ et X des fonctions quelconques de la variable $x$, l'équation
$afx + b\Delta.fx + c\Delta^2.fx \ldots + q\Delta^n.fx = \mathrm{X} \ldots$ (593), dans laquelle $fx$ et ses différences de tous les ordres ne sont élevées qu'à la première puissance, s'appelle *équation linéaire aux différences de l'ordre n.*

Si nous parvenons à déduire de l'équation précédente, la valeur de $fx$ délivrée de différences, il est clair que l'opération que nous aurons faite, équivaudra à une intégration de l'ordre $n$; et à cause que chaque intégration exige une constante, il est évident que dans l'équation finale délivrée de toute différence $\Delta.fx$, il devra y avoir $n$ constantes arbitraires, dont, à l'ordinaire, nous déterminerons les valeurs d'après la nature de la question qui aura donné lieu à ces calculs, lorsqu'ils auront un objet d'application.

585. Supposant pour plus de simplicité $\Delta x = 1$, et représentant généralement par $f(x+n)$ ce que devient $f(x+n-1)$ lorsqu'on y substitue $x+1$ à la place de $x$, il est clair qu'on aura

$$\Delta.fx = f(x+1) - fx$$
$$\Delta^2 fx = \Delta.f(x+1) - \Delta.fx = f(x+2) - 2f(x+1) + fx,$$
$$\Delta^3.fx = \Delta.f(x+2) - 2\Delta.f(x+1) + \Delta.fx = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - fx:$$

on trouvera de même

$$\Delta^4.fx = f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + fx:$$

enfin on a généralement

$$\Delta^n.fx = f(x+n) - nf(x+n-1) + \frac{n(n-1)}{2} f(x+n-2)$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} f(x+n-3) \ldots \pm fx \ldots (594);$$

Le signe positif lorsque $n$ est un nombre pair, le signe négatif dans le cas contraire.

Substituant ces valeurs de $\Delta.fx$, $\Delta.^2fx \ldots \Delta^n.fx$ dans l'équation (593), et faisant pour abréger

$$A = a - b + c - d \ldots \pm q$$
$$B = b - 2c + 3d \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 2}{2.3\ldots(n-1)} q$$
$$C = c - 3d \ldots\ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3}{2.3\ldots(n-2)} q$$
$$D = d \ldots\ldots\ldots\ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 4}{2.3\ldots(n-3)} q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q = \pm q,$$

on aura l'équation

$$Afx + Bf(x+1) + Cf(x+2) + Df(x+3) \ldots$$
$$+ Qf(x+n) = X \ldots\ldots (595);$$

qui est la même que celle (593), en supposant que la variable $x$ varie de la quantité constante $\Delta x = 1$.

Après cela nous nommerons *équations linéaires aux différences*, toutes celles où il entrera les quantités $fx$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ etc., élevées seulement au premier degré, et nous nous proposerons d'intégrer cette équation, c'est-à-dire d'en déduire une valeur de $fx$, telle qu'en y substituant successivement $x+1$,

$x+2\ldots(x+n)$ à la place de $x$, les quantités $fx$, $f(x+1)\ldots f(x+n)$ satisfassent à l'équation (595). Pour parvenir à ce but de nos recherches, soit fait

$$fx = a^x \Sigma\varphi x \ldots\ldots (a),$$

en représentant respectivement par $a$ et $\varphi x$, une constante indéterminée et une fonction indéterminée de $x$, que nous chercherons à déterminer d'après la condition que la valeur de $fx$ donnée par l'équation $(a)$, satisfasse à celle (595).

Mettant successivement $x$, $x+1$, $x+2\ldots(x+n)$ dans l'équation $(a)$, on a celles

$$\left.\begin{array}{l} fx = a^x \Sigma\varphi x, \\ f(x+1) = a^{x+1}\Sigma\varphi(x+1), \\ f(x+2) = a^{x+2}\Sigma\varphi(x+2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+n) = a^{x+n}\Sigma\varphi(x+n) \end{array}\right\} \ldots\ldots (b).$$

Mais $x$ variant de la quantité constante $\Delta x = 1$, on a $\Delta\varphi x = \varphi(x+1) - \varphi x$, d'où $\Sigma\varphi(x+1) = \varphi x + \Sigma\varphi x$; et substituant successivement dans cette équation $x+1$, $x+2, \ldots x+n-1$ à la place de $x$, on aura une suite d'équations qui donneront les valeurs de $\Sigma\varphi(x+2)$, $\Sigma\varphi(x+3)\ldots\Sigma\varphi(x+n)$ contenant chacune toutes les intégrales inférieures jusqu'à celle $\Sigma\varphi(x)$; donc par une suite de substitutions successives, on éliminera de ces valeurs toutes les quantités affectées du signe $\Sigma$, excepté $\Sigma\varphi x$, et on aura

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\varphi(x+1) = \varphi x + \Sigma\varphi x, \\ \Sigma\varphi(x+2) = \varphi(x+1) + \varphi x + \Sigma\varphi x, \\ \Sigma\varphi(x+3) = \varphi(x+2) + \varphi(x+1) + \varphi x + \Sigma\varphi x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma\varphi(x+n) = \varphi(x+n-1) + \varphi(x+n-2)\ldots \\ \ldots + \varphi x + \Sigma\varphi x \end{array}\right\} \ldots (c).$$

Substituant ces valeurs dans le groupe d'équations $(b)$, on a

$$\left.\begin{array}{l} fx = a^x \Sigma\varphi x, \\ f(x+1) = a^{x+1}[\Sigma\varphi x + \varphi x], \\ f(x+2) = a^{x+2}[\Sigma\varphi x + \varphi(x+1) + \varphi x], \\ f(x+3) = a^{x+3}[\Sigma\varphi x + \varphi(x+2) + \varphi(x+1) + \varphi x], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+n) = a^{x+n}[\Sigma\varphi x + \varphi(x+n-1) + \varphi(x+n-2) \\ \ldots + \varphi(x+1) + \varphi x]. \end{array}\right\} \ldots (d).$$

Enfin mettant ces valeurs dans l'équation (595), on aura celle

$$a^x[A + Ba + Ca^2 + Da^3 \ldots + Qa^n]\Sigma\varphi x + a^x[Ba + Ca^2 + Da^3 \ldots + Qa^n]\varphi x + a^x[Ca^2 + Da^3 \ldots + Qa^n]\varphi(x+1) + a^x[Da^3 \ldots + Qa^n]\varphi(x+2) \ldots + a^x Qa^n \varphi(x+n-1) = X \ldots (e).$$

Or, $a$ étant une constante indéterminée, on peut faire dans cette dernière équation le coefficient de $\Sigma\varphi x = 0$, ce qui donne pour déterminer la valeur de la constante $a$, l'équation du degré $n$.

$$a^n \ldots + \frac{D}{Q}a^3 + \frac{C}{Q}a^2 + \frac{B}{Q}a + \frac{A}{Q} = 0 \ldots (596),$$

et pour déterminer la valeur de $\varphi x$, l'équation linéaire aux différences de l'ordre $n-1$

$$B'\varphi x + C'\varphi(x+1) + D'\varphi(x+2) \ldots + Q'\varphi(x+n-1) = \frac{X}{a^x} \ldots\ldots\ldots (f),$$

dans laquelle nous avons fait pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} B' = Ba + Ca^2 + Da^3 \ldots + Qa^n \\ C' = Ca^2 + Da^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + Qa^n \\ D' = Da^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Qa^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q' = Qa^n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Il est évident que l'équation $(f)$ d'un ordre de différences moindre d'une unité que celle (595), étant d'ailleurs de même forme que cette dernière équation, il faudra se servir des mêmes moyens pour l'abaisser à un ordre de différences moindre d'une unité, que ceux dont nous nous sommes servis précédemment, relativement à l'équation (595) : soit donc supposé

$$\varphi x = (a1)^x \Sigma \varphi' x \ldots\ldots (h),$$

$(a1)$ et $\varphi' x$ étant des quantités indéterminées. La table $(d)$ indique tout de suite quelles doivent être les valeurs de $\varphi x$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)\ldots\varphi(x+n-1)$, lesquelles étant substituées dans l'équation $(f)$, donneront celle

$$[B' + C'(a1) + D'(a1)^2 \ldots + Q'(a1)^{n-1}]\Sigma\varphi' x + \Sigma[C'(a1) + D'(a1)^2 \ldots\ldots + Q'(a1)^{n-1}]\varphi' x + [D'(a1)^2 \ldots\ldots + Q'(a1)^{n-1}]\varphi'(x+1) \ldots\ldots + Q'(a1)^{n-1}\varphi(x+n-2)$$

$$= \frac{X}{a^x (a1)^x} \ldots\ldots\ldots (i),$$

dans laquelle on pourra faire à cause de l'indétermination de $(a1)$, le coefficient $\Sigma\varphi' x = 0$, ce qui donnera pour déterminer $(a1)$, l'équation du $(n-1)^{ième}$ degré

$$(a1)^{n-1} \ldots + \frac{D'}{Q'}(a1)^2 + \frac{C'}{Q'}(a1) + \frac{B'}{Q'} = 0 \ldots\ldots (k),$$

et pour déterminer $\varphi' x$, l'équation linéaire aux différences de l'ordre $n-2$

$$C''\varphi' x + D''\varphi'(x+1) \ldots + Q''\varphi'(x+n-2) = \frac{X}{a^x (a1)^x}, (l),$$

dans laquelle on a fait pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} C'' = C'(a1) + D'(a1)^2 \ldots + Q'(a1)^{n-1} \\ D'' = D'(a1)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + Q'(a1)^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q'' = Q'(a1)^{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (m).$$

Continuant à opérer de même, on trouve qu'en faisant

$$\phi' x = (a2)^x \Sigma \phi'' x \ldots\ldots (n),$$

on a pour déterminer la constante $(a2)$ l'équation du $(n-2)^{ième}$ degré

$$(a2)^{n-2} \ldots + \frac{D''}{Q''}(a2) + \frac{C''}{Q''} = 0 \ldots\ldots (o),$$

et pour déterminer $\phi'' x$, l'équation linéaire aux différences du $(n-3)^{ième}$ ordre

$$D''' \phi'' x \ldots + Q''' \phi''(x+n-3) = \frac{X}{a^x (a1)^x (a2)^x}$$

dans laquelle on a fait pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} D''' = D''(a2) \ldots + Q''(a2)^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q''' = Q''(a2)^{n-2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (p).$$

Enfin, par une suite de calculs semblables, on parviendra pour déterminer la dernière constante $[a(n-1)]$, à l'équation du premier degré

$$[a(n-1)] = -\frac{P^{(n-1)'}}{Q^{(n-1)'}} \ldots\ldots (q),$$

et pour déterminer $\phi^{(n-1)'} x$, à l'équation

$$\phi^{(n-1)'} x = \frac{X}{Q^{n'} a^x (a1)^x (a2)^x \ldots [a(n-1)]^x} \ldots\ldots (r),$$

dans laquelle nous avons fait, conformément aux abréviations indiquées dans les groupes $(g)$, $(m)$, $(p)$..., la quantité

$$Q^{n'} = Q[a(n-1)] \ldots\ldots (s).$$

Actuellement observant que les équations $(a)$, $(h)$, $(n)$...., se lient par le dernier facteur du second membre, on aura par des substitutions successives

$$fx = a^x \Sigma \phi x = a^x \Sigma (a1)^x \Sigma \phi' x = a^x \Sigma (a1)^x \Sigma (a2)^x \Sigma'' x \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = a^x \Sigma (a1)^x \Sigma (a2)^x \ldots\ldots \Sigma [a(n-1)]^x \Sigma \phi^{(n-1)'} x ;$$

donc mettant pour $\phi^{(n-1)'} x$ sa valeur [équat. $(r)$], il viendra l'équation

$$fx = \frac{a^x}{Q^{n'}} \Sigma (a1)^x \Sigma (a2)^x \ldots \Sigma [a(n-1)]^x$$
$$\Sigma \frac{X}{a^x (a1)^x (a2)^x \ldots [a(n-1)]^x} \ldots\ldots (t),$$

qui est l'intégrale demandée; mais il faut se rappeler qu'à chaque intégration particulière, on devra ajouter une constante arbitraire, ce qui donnera pour la valeur complète de $fx$, un nombre $n$ de constantes arbitraires.

Nous allons maintenant faire quelques observations qui simplifieront considérablement la méthode précédente d'intégration.

Substituant dans l'équation $(k)$ les valeurs de $B'$, $C'$, $D'$,...$Q'$ prises dans la table $(g)$, il vient

$$Qa^n (a1)^{n-1} \ldots\ldots + Da^3 (a1)^2 \ldots\ldots + Qa^n (a1)^2 + Ca^2 (a1)$$
$$+ Da^3 (a1) \ldots\ldots + Qa^n (a1) \ldots\ldots + Ba + Ca^2 + Da^3 \ldots\ldots$$
$$+ Qa^n = 0 \ldots\ldots\ldots (u).$$

Multipliant cette équation par $(a1)$, mettant au commencement tous les termes qui contiennent les mêmes puissances de $a$ et $(a1)$, ensuite ordonnant les autres termes par rapport aux puissances ascendantes 1, 2... $(n-1)$ de $(a1)$, on a l'équation

$$Qa^n (a1)^n \ldots + Da^3 (a1)^3 + Ca^2 (a1)^2 + Ba(a1) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (Qa^n \ldots + Da^3 + Ca^2)(a1) + (Qa^n \ldots\ldots + Da^3)(a1)^2 \ldots\ldots$$
$$+ Qa^n (a1)^{n-1} = 0$$

Retranchant de cette dernière équation celle $(u)$, il vient l'équation

$$Qa^n (a1)^n \ldots + Da^3 (a1)^3 + Ca^2 (a1)^2 + Ba(a1)$$
$$- (Ba + Ca^2 + Da^3 \ldots\ldots + Qa^n) = 0,$$

qui étant divisée par Q, et ensuite ajoutée à l'équation (596), donne

$$a^n(a1)^n \ldots + \frac{D}{Q} a^3(a1)^3 + \frac{C}{Q} a^2 (a1)^2$$
$$+ \frac{B}{Q} a(a1) + \frac{A}{Q} = 0 \ldots\ldots (v).$$

Or, il est évident que cette dernière équation dans laquelle $a(a1)$ est le symbole des racines, ayant les mêmes coefficiens que celles (596), les racines de l'équation $(v)$ devront respectivement être identiques à celles de l'équation (596); donc une des racines de cette dernière équation étant $a$, l'une de ses $n-1$ autres racines sera $a(a1)$; ainsi représentant par $a$, $a'$, $a'' \ldots a^{(n-1)'}$ les $n$ racines de l'équation (596), on aura $a(a1) = a'$, d'où $(a1) = \frac{a'}{a}$; mais représentant par P le coefficient de $a^{n-1}$ dans le polynome qui multiplie $\Sigma\varphi x$ dans l'équation $(e)$, on aura pour second terme de l'équation (596) la quantité $\frac{P}{Q} a^{n-1}$; donc

$$\frac{P}{Q} = -(a + a' + a'' \ldots + a^{(n-1)'}) \ldots\ldots (x).$$

De même représentant par $(a1)$, $(a1)' \ldots (a1)^{(n-2)'}$ les $(n-1)$ racines de l'équation $(k)$, et par P' le coefficient de $(a1)^{n-2}$ dans le polynome qui multiplie $\Sigma\varphi' x$ dans l'équation $(i)$, ce qui donne pour second terme de l'équation $(k)$ la quantité $\frac{P'}{Q'} (a1)^{n-2}$, on aura $\frac{P'}{Q'} = -[(a1) + (a1)' \ldots + (a1)^{(n-2)'}]$; mais la table (g) donne $\frac{P'}{Q'} = \frac{Pa^{n-1} + Qa^n}{Qa^n} = \frac{P}{Qa} + 1$. Egalant cette

valeur de $\frac{P'}{Q'}$ avec la précédente, on a

$$\frac{P}{Q} = -[a(a1) + a(a1)' \ldots\ldots + a(a1)^{(n-2)'}] - a\,;$$

égalant cette valeur de $\frac{P}{Q}$ avec celle donnée par l'équation $(x)$, il vient l'équation

$$a' + a'' \ldots + a^{(n-1)'} = a(a1) + a(a1)' \ldots + a(a1)^{(n-2)'},$$

qui, à cause de $a' = a(a1)$ ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus, se réduit à l'équation

$$a'' + a''' \ldots + a^{(n-1)'} = a(a1)' + a(a1)'' \ldots + a(a1)^{(n-2)'}$$

laquelle devant avoir lieu indépendamment des valeurs entières et positives de $n$, aura encore lieu lorsque $n = 3$, ce qui donne $a'' = a(a1)'$, d'où $(a1)' = \frac{a''}{a}$. On démontrera de même que $(a1)'' = \frac{a'''}{a}$, et enfin que généralement $(a1)^{(n-2)'} = \frac{a^{(n-1)'}}{a}$. Or, toutes les équations (596), $(k)$, $(o) \ldots (q)$ comprises depuis le degré $n$ jusqu'au premier, étant liées entre elles par une même loi qui fait que chacune d'elles dépend de celle qui la précède, de la même manière que celle qui la suit dépend d'elle, il est clair que représentant par $(a2)$, $(a2)' \ldots$ les racines de l'équation $(o)$, on aura $(a2) = \frac{(a1)'}{(a1)}$, $(a2)' = \frac{(a1)''}{(a1)}$ etc., et substituant les valeurs de $(a1)$, $(a1)'$, $(a1)''$ etc., il viendra $(a2) = \frac{a''}{a} : \frac{a'}{a} = \frac{a''}{a'}$, $(a2)' = \frac{a'''}{a} : \frac{a'}{a} = \frac{a'''}{a'}$ etc. Par la même raison, représentant par $(a3)$ $(a3)' \ldots$ les racines de l'équation du $(n-3)^{ième}$ degré analogue à

celles (596), $(k)$....., on aura $(a3) = \frac{(a2)'}{(a2)} = \frac{a'''}{a'} : \frac{a''}{a'} = \frac{a'''}{a''}$, $(a3)' = \frac{a^{\text{IV}}}{a'''}$ etc.; et enfin on aura $[a(n-1)] = \frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}$ : ainsi ayant résolu l'équation (596), et ayant trouvé que ses $n$ racines sont $a$, $a'$, $a''$, $a'''$...$a^{(n-1)'}$, on aura les $n-1$ autres constantes $(a1)$, $(a2)$, $(a3)$...$[a(n-1)]$ par les équations

$$\left[(a1) = \frac{a'}{a}, \ (a2) = \frac{a''}{a'}, \ (a3) = \frac{a'''}{a''} \ldots [a(n-1)] = \frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right] \ldots\ldots (597).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $(t)$, il viendra

$$fx = \frac{a^x}{Q^{n'}} \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \ldots \Sigma \left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x \Sigma \frac{X}{[a^{(n-1)'}]^x} \ldots (y).$$

Mais partant d'une valeur quelconque de $n$, que pour fixer les idées, nous supposons être 4, ce qui donne $Q^{n'} = Q^{\text{IV}}$, on a $Q^{\text{IV}} = Q'''(a3)$[équation $(s)$] $= Q'''\left(\frac{a'''}{a''}\right)$ [équat. (597)]. De même $Q''' = Q''(a2)^2 = Q''\left(\frac{a''}{a'}\right)^2$, $Q'' = Q'(a1)^3 = Q'\left(\frac{a'}{a}\right)^3$ et $Q' = Qa^4$; donc par des substitutions successives, en remontant jusqu'à la valeur de $Q^{\text{IV}}$, on aura

$$Q^{\text{IV}} = a^4 \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{a''}{a''}\right)^2 \left(\frac{a'''}{a''}\right) = Q\,(aa'a''a''');$$

d'où il suit que généralement on a

$$Q^{n'} = Q\,(a\,a'a''\ldots a^{(n-1)'}).$$

Or, on a dans l'équation (596) $a\,a'a''\ldots a^{(n-1)'} = \pm \frac{A}{Q}$,

donc $Q^{n'} = \pm A$ ; et substituant cette valeur dans l'équation $(y)$, on aura finalement pour l'intégrale demandée

$$fx = \pm \frac{a^x}{A} \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \ldots \Sigma \left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x \Sigma \frac{X}{\left[a^{(n-1)'}\right]^x} \quad (598),$$

le signe supérieur lorsque $n$ est un nombre pair, l'inférieur dans le cas contraire.

Passons à l'application de cette théorie.

586. *Moivre* a nommé *suite récurrente*, toute suite dont un terme quelconque est égal à un certain nombre de termes antécédens respectivement multipliés par un coefficient constant. L'assemblage de ces coefficiens est appelé *échelle de relation*. Lorsque dans la composition de chaque terme de la série en question, il entre une quantité constante ou variable qu'on ajoute, alors elle est nommée *série récurrente composée*, et cette constante ou variable qu'on ajoute, s'appelle l'*ajoutée* (*). Ainsi, représentant par $f(x+n)$ un terme quelconque de ces suites, et par $f(x+n-1)$, $f(x+n-2)$, .... $f(x+1)$, $fx$ les $n$ termes qui le précèdent immédiatement et dans cet ordre; la nature des séries récurrentes donne l'équation aux différences de l'ordre $n$, $f(x+n) = gf(x+n-1) + hf(x+n-2) \ldots + pf(x+1) + qfx + X$ dans laquelle l'échelle de relation est $g + h \ldots + p + q$, et l'ajoutée est la fonction quelconque X de $x$. Donc d'après la théorie développée dans l'article précédent, nous pourrons toujours, lorsque nous connaîtrons la composition des termes d'une suite récurrente, en trouver le terme général $fx$.

(*) Nous avons fait connaître au paragraphe 128 de notre Algèbre, la génération des séries récurrentes, et au paragraphe 129 nous avons donné une méthode qui nous est particulière, pour remonter d'une série récurrente à sa fraction génératrice.

Par exemple, soit proposé la série récurrente

$$0,\ 0,\ 1,\ 10,\ 75,\ 500,\ 3161,\ 19470,\ \text{etc.}\ldots(a),$$

dont la nature est, que chaque terme $f(x+3)$ est égal à 2 élevé à la puissance $x$ qui est le numéro du terme pour lequel on calcule à partir du quatrième 10, ajouté à la somme des trois termes consécutifs $f(x+2)$, $f(x+1)$, $fx$ qui précèdent, respectivement multipliés par $8, -9, -18$; de manière qu'on a l'échelle de relation $=8-9-18$, et l'ajoutée $=2^x$. Ainsi l'équation qui exprime la nature de la série proposée est celle aux différences du troisième ordre $f(x+3) = 2^x + 9f(x+2) - 9f(x+1) - 18fx$ : transposant et ordonnant par rapport aux accroissemens de $x$ dans $fx$, il vient

$$18fx + 9f(x+1) - 8f(x+2) + f(x+3) = 2^x \ldots (b),$$

qui comparée identiquement avec celle (595), donne $A=18$, $B=9$, $C=-8$, $Q=1$, $X=2^x$ et $n=3$. Faisant les substitutions convenables dans l'auxiliaire générale (596), on a pour celle de l'équation $(a)$

$$a^3 - 8a^2 + 9a + 18 = 0 \ldots (c),$$

d'où on tire $a=-1$, $a'=3$ et $a''=6$: substituant ces valeurs dans l'équation (598), et faisant attention que $n$ étant un nombre impair, le terme $A=18$ doit être pris avec un signe contraire, on aura

$$fx = \frac{(-1)^x}{-18}\Sigma(-3)^x\Sigma 2^x\Sigma\left(\frac{1}{3}\right)^x, \text{ ou simplement}$$

$$fx = \mp\tfrac{1}{18}\Sigma(-3)^x\Sigma\, 2^x\Sigma(\tfrac{1}{3})^x \ldots\ldots (d).$$

le signe supérieur lorsque $x$ sera pris égal à un nombre pair; l'inférieur, dans le cas contraire. Donc représentant par $c$, $c'$, $c''$ les trois constantes arbitraires que comportent les trois intégrations particulières que nous

nous avons à opérer, nous aurons, d'après l'équation (584), $\Sigma(\frac{1}{3})^x = -\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^x + c$, d'où $\Sigma 2^x \Sigma(\frac{1}{3})^x = -\frac{3}{2}\Sigma(\frac{2}{3})^x + c\Sigma 2^x + c' = \frac{3}{2}(\frac{2}{3})^x + c2^x + c'$, et enfin $\Sigma(-3)^x \Sigma 2^x \Sigma(\frac{1}{3})^x = \frac{9}{2}\Sigma(-2)^x + c\Sigma(-6)^x + c'\Sigma(-3)^x + c'' = -\frac{3}{2}(-2)^x - c(-6)^x - c'(-3)^x + c''$. Substituant cette valeur dans l'équation ($d$), on a

$$fx = \frac{2^x}{12} + c6^x + c'3^x \mp c'' \ldots\ldots (e).$$

Actuellement, pour déterminer les trois constantes $c$, $c'$, $c''$ nous observerons que $x$ marquant le numéro des termes de la série proposée ($a$), en commençant depuis le premier zéro, on a, pour les trois valeurs successives de $x = 1, 2$ et $3$, celles $fx = 0$, $fx = 0$ et $fx = 1$, ce qui donne les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \frac{1}{6} + 6c + 3c' + c'' \\ 0 = \frac{1}{3} + 36c + 9c' - c'' \\ 1 = \frac{2}{3} + 216c + 27c' + c'' \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} c = \frac{1}{84} \\ c' = \frac{1}{12} \\ c'' = \frac{1}{84} \end{array}\right.$$

et substituant ces valeurs dans l'équation ($e$), on a pour l'expression complète du terme général de la suite ($a$), l'équation

$$fx = \frac{7.2^x + 6^x - 7.3^x \mp 1}{84}.$$

587. Il peut arriver que le nombre de termes de l'échelle de relation ne soit pas le même que celui de l'ordre de différence de l'équation qui exprime la nature de la série; cela a lieu dans les séries où pour la formation d'un terme quelconque $f(x+n)$, on n'a pas recours à tous les termes antécédens compris entre ce dernier terme $f(x+n)$ et le premier terme du recours $fx$ : nous appellerons ces séries, *suites récur-*

*rentes irrégulières*, telle est par exemple celle

$$0, 0, 1, 6, 43, 252, 1841, \text{etc.}\ldots\ldots(a),$$

dont la nature est exprimée par l'équation aux différences du troisième ordre

$$f(x+3) = 6^x + 7f(x+1) - 6fx\ldots\ldots(b),$$

et dont l'échelle de relation, seulement de deux termes, est $7-6$. Mais il est évident qu'on trouve par la même méthode que la précédente, le terme général de ces sortes de suites irrégulières ; car il n'y a de différence entre le cas actuel et celui traité précédemment, que dans l'auxiliaire qui au lieu d'être complète est incomplète ; mais le nombre de ses racines étant le même que l'ordre de l'équation qui exprime la nature de la serie proposée, la formule (598) n'en est pas altérée. Ainsi, pour la série recurrente irrégulière $(a)$, on a l'auxiliaire $a^3 - 7a + 6 = 0$, dont les trois racines sont $a = 2$, $a' = 1$ et $a'' = -3$; donc $fx = \frac{2^x}{-6}\Sigma(\frac{1}{2})^x\Sigma(-3)^x\Sigma(-2)^x$ [équat. (598)] $= \frac{6^x}{180} \mp c3^x + 2c' - c''2^x$. Faisant successivement $x = 1, 2, 3$, et $fx = 0$, $fx = 0$, $fx = 1$, on trouve $c = \frac{1}{180}$, $c' = \frac{1}{40}$, $c'' = \frac{1}{20}$, ce qui donne complètement pour expression du terme général de la série récurrente composée et irrégulière proposée $(a)$

$$fx = \frac{3^{x-2}(2^x \mp 1) - (2^x - 1)}{20}.$$

588. Si l'équation aux différences qu'on veut intégrer a toutes les racines de son auxiliaire égales entre elles, alors elle se présentera sous la forme

$$b^n fx + nb^{n-1} f(x+1) + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} f(x+2) \ldots,$$
$$+ nbf(x+n-1) + f(x+n) = X \ldots (599),$$

et son auxiliaire étant $(a+b)^n = 0$, d'où $a = a' = a'' \ldots = b$, l'équation (598) prendra la forme de celle

$$fx = \frac{b^x}{\pm b^n} \Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma 1 \ldots \Sigma \frac{X}{b^x} \ldots (a),$$

qui a autant de signes $\Sigma$ d'intégration qu'il y a d'unités dans l'ordre $n$ de l'équation (599), et qui, conséquemment, donnera dans les $n$ intégrations particulières, le nombre $n$ de constantes arbitraires $c$, $c'$ $c'' \ldots c^{(n-1)'}$ que comporte la $n^{uple}$ intégration.

Pour développer l'équation $(a)$, faisons

$$\left\{ \Sigma \frac{X}{b^x} = \xi, \Sigma\xi = \xi', \Sigma\xi' = \xi'' \ldots \Sigma\xi^{(n-2)'} = \xi^{(n-1)'} \right\} \ldots (b),$$

abstraction faite des constantes arbitraires que comportent toutes ces intégrations; donc rétablissant les constantes, on aura $\Sigma \frac{X}{b^x} = \xi + c$, $\Sigma 1 \Sigma \frac{X}{b^x} = \Sigma\xi + c\Sigma x^0$ $= \xi' + cx + c'$ (*), $\Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma \frac{X}{b^x} = \Sigma\xi' + c\Sigma x + c'\Sigma x^0$ $= \xi'' + cx^2 + c'x + c''$, en représentant respectivement par $c$ et $c'$ les quantités constantes arbitraires $\frac{c}{2}$ et $c' - \frac{c}{2}$. Continuant de même, on trouvera que $\Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma \frac{X}{b^x} = \xi''' + cx^3 + c'x^2 + c''x + c'''$, et enfin

(*) *Voyez* la table (579), et faites attention qu'ici nous avons $\Delta x = 1$.

généralement, le nombre des signes d'intégration étant $n$, on aura

$$\Sigma 1 \Sigma 1 \ldots \Sigma \frac{X}{b^x} = \xi^{(n-1)'} + cx^{n-1} + c'x^{n-2} \ldots + c^{(n-1)'};$$

et substituant cette valeur dans l'équation $(a)$, il viendra

$$fx = \frac{b^x}{\pm b^n} [\xi^{(n-1)'} + cx^{n-1} + c'x^{n-2} \ldots + c^{(n-1)'}] \ldots (600) [*],$$

ce qui est la forme générale des intégrales complètes des équations aux différences d'un ordre quelconque $n$, lorsque toutes les racines de l'auxiliaire sont égales.

Pour faire une application de cette formule (600), proposons-nous de trouver le terme général de la série récurrente et composée du troisième ordre

$$0,\ 0,\ 1,\ -2,\ 16,\ -16,\ 176 \text{ etc.} \ldots (c),$$

dont la nature est exprimée par l'équation $f(x+3) = 4^x - 6f(x+2) - 12f(x+1) - 8fx$, d'où l'on tire

$$8fx + 12f(x+1) + 6f(x+2) + f(x+3) = 4^x \ldots (d).$$

---

[*] Il serait plus élégant d'écrire $\pm b^{x-n}$ au lieu de $\frac{b^x}{\pm b^n}$; mais à cause que les cas de $n$ pair ou impair combinés avec ceux de $b$ positif ou négatif et de $x$ pair ou impair, donnent des signes différens dont l'indication du choix à faire exigerait trop de longueurs dans le discours, j'ai préféré de conserver cette forme qui, dans l'application, fait tout de suite connaître au calculateur les signes qu'il doit employer, en se rappelant que dans le cas présent, comme dans le cas général des intégrations (art. 585), le double signe $\pm$ qui précède $b^n$ est relatif à $n$ avec les mêmes conditions que celles énoncées à l'article 585 : ceci va s'éclaircir par l'exemple suivant.

Comparant cette équation avec celle (595), il vient $A = 8$, $B = 12$, $C = 6$, $Q = 1$, $X = 4^x$ et $n = 3$, et faisant les substitutions convenables dans l'équation (596), on a l'auxiliaire $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = 0$, ou $(a+2)^3 = 0$; donc $a = a' = a'' = b = -2$, d'où $\frac{X}{b^x} = \frac{4^x}{(-2)^x} = (-2)^x$. Cela posé, la succession des équations ($b$) donnera $\xi = \Sigma(-2)^x = -\frac{(-2)^x}{3}$; $\xi' = -\frac{1}{3}\Sigma(-2)^x = \frac{(-2)^x}{9}$, enfin $\xi'' = -\frac{1}{27}(-2)^x = \frac{\mp 2^x}{27}$, le signe supérieur, lorsque $x$ est pris égal à un nombre pair, l'inférieur, dans le cas contraire; c'est ce qui aura lieu dans la suite, sans que nous en prévenions davantage. Substituant la valeur de $\xi''$ dans l'équation (600), et faisant attention que $n$ étant impair on a $\frac{b^x}{-b^3} = \frac{(-2)^x}{-2^3} = \mp 2^{x-3}$, on aura

$$fx = \mp 2^{x-3}\left[\mp\frac{2^x}{27} + cx^2 + c'x + c''\right] \qquad (e).$$

Faisant respectivement $fx = 0$, $fx = 0$ et $fx = 1$ lorsqu'on a $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$, on trouvera à l'ordinaire que $c = \frac{1}{6}$, $c' = -\frac{5}{18}$ et $c'' = \frac{1}{27}$; on aura donc complètement $fx = \mp\frac{2^{x-4}[\mp 2^{x+1} + 9x^2 - 15x + 2]}{27}$, ce qui est le terme général de la serie proposée ($c$) et l'intégrale de l'équation ($d$).

589. Dans le cas où les racines de l'auxiliaire sont partie inégales et partie égales, la méthode pour l'intégration se compose de celles que nous avons déjà

exposées pour chacun de ces deux cas particuliers, et n'offre par conséquent plus de difficultés.

590. Nous n'avons jusqu'à présent considéré X que comme une fonction exponentielle de $x$; mais il peut arriver trois autres cas que nous allons examiner successivement.

*Premier cas.* X = à une constante H. On a dans ce cas $\Sigma \frac{X}{[a^{(n-1)'}]^x} = H\Sigma\left[\frac{1}{a^{(n-1)'}}\right]^x$, et faisant passer la constante déterminée H en avant de tous les facteurs affectés du signe d'intégration, l'équation (598) devient

$$fx = \frac{Ha^x}{\pm A}\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^x\Sigma\left(\frac{a''}{a'}\right)^x\ldots\Sigma\left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x\Sigma\left[\frac{1}{a^{(n-1)'}}\right]^x \quad (601).$$

Par exemple, soit proposé de trouver le terme général de la suite récurrente du second ordre 1, 1, 5, 17, 45, 105, etc. dont la nature est exprimée par l'équation $f(x+2) = 4 + 3f(x+1) - 2fx$; d'où à l'ordinaire on déduit $A = 2$, $B = -3$, $Q = 1$ et X ou $H = 4$, ce qui donne l'auxiliaire $a^2 - 3a + 2 = 0$, dont les deux racines sont $a = 1$ et $a' = 2$. Substituant ces valeurs dans l'équation (601), on a $fx = 2\Sigma 2^x\Sigma(\frac{1}{2})^x = -4x + c2^x + c'$. Faisant successivement $x = 1$ et $x = 2$, d'où $fx = 1$ et $fx = 1$; on trouve $c = 2$ et $c' = 1$; on a donc complètement le terme général demandé $fx = 1 + 4(2^{x-1} - x)$.

591. *Second cas.* X = à une fonction algébrique et rationnelle de $x$.

Il ne se présentera de plus dans le cas actuel, que des intégrations de quantités telles que celles que nous avons appris à intégrer à l'article 579, ce qui n'offre pas de difficultés.

Par exemple, soit proposé de trouver le terme général de la série récurrente 0, 1, 0, 8, — 5, 57, etc. dont la nature est exprimée par l'équation aux différences $f(x+2) = x - f(x+1) + 6fx$. Comparant cette dernière équation avec celle (595), il vient $A = -6$, $B = 1$, $Q = 1$, $X = x$ et $n = 2$; donc l'auxiliaire de la proposée est $a^2 + a - 6 = 0$, d'où $a = 2$ et $a' = -3$; ainsi la formule (598) donnera $fx = -\frac{2^x}{6}\Sigma\left(\frac{-3}{2}\right)^x \Sigma \frac{x}{(-3)^x}$. Or la seconde formule du groupe (588) donne $\Sigma \frac{x}{(-3)^x} = -\frac{3}{4}\left[\frac{x}{(-3)^x} + \frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{(-3)^x}\right]$, et la première formule du même groupe donne $\Sigma \frac{1}{(-3)^x} = \frac{-3}{4(-3)^x}$, donc $\Sigma \frac{x}{(-3)^x} = -\frac{3x}{4(-3)^x} + \frac{3}{16(-3)^x} + c$, et $\Sigma\left(\frac{-3}{2}\right)^x \Sigma \frac{x}{(-3)^x} = -\frac{3}{4}\Sigma\frac{x}{2^x} + \frac{3}{16}\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^x + c\,\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)^x$. Nous servant encore des deux premières équations du groupe (588), nous trouverons $\Sigma\frac{x}{2^x} = -\frac{2x}{2^x} - \frac{2}{2^x}$; donc

$$\Sigma\left(\frac{-3}{2}\right)^x \Sigma\frac{x}{(-3)^x} = \frac{3^x}{2.2^x} + \frac{9}{8.2^x} - c\left(\frac{-3}{2}\right)^x + c':$$

substituant cette valeur dans celle de $fx$, il vient l'équation $fx = -\frac{x}{4} - \frac{3}{16} \pm c3^x - c'2^x$, dont on déterminera les constantes $c$, $c'$ en faisant successivement $fx = 0$ et $fx = 1$, pour les valeurs respectives 1 et 2 de $x$, ce qui donnera $c = \frac{13}{240}$ et $c' = -0,3$, ainsi le terme général de la série proposée est

$$fx = \frac{24.2^x \pm 13.3^{x-1} - 20x - 15}{80}.$$

592. *Troisième cas.* $X = 0$. Nous avons dans ce cas $\Sigma \frac{X}{[a^{(n-1)'}]^x} = \Sigma\, 0 = c$ : substituant cette valeur dans l'équation (598), passant la constante $c$ en avant de tous les facteurs affectés du signe d'intégration $\Sigma$, et à cause de l'arbitraire de cette constante, représentant par $c$ la quantité constante arbitraire $\pm \frac{c}{A'}$, on a

$$fx = ca^x \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \ldots \Sigma \left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x \ldots\ldots (602).$$

Cherchons le développement de cette formule : mais pour fixer les idées, donnons d'abord à $n$ une valeur numerique déterminée, par exemple 4, ce qui réduit l'équation (602) à celle

$$fx = ca^x \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \Sigma \left(\frac{a'''}{a''}\right)^x \ldots\ldots (a).$$

Or $\quad \Sigma \left(\frac{a'''}{a''}\right)^x = \frac{a''}{a''' - a''} \left(\frac{a'''}{a''}\right)^x + c'$, donc

$$\Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \Sigma \left(\frac{a'''}{a''}\right)^x = \frac{a''}{a''' - a''} \Sigma \left(\frac{a'''}{a'}\right)^x + c' \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x$$

$$= \frac{a''a'}{(a''' - a'')(a''' - a')} \left(\frac{a'''}{a'}\right)^x + c' \left(\frac{a''}{a'}\right)^x + c'',$$

d'où il suit que

$$\Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma \left(\frac{a''}{a'}\right)^x \Sigma \left(\frac{a'''}{a''}\right)^x = \frac{a''a'}{(a''' - a'')(a''' - a')} \Sigma \left(\frac{a'''}{a}\right)^x$$

$$+ c' \Sigma \left(\frac{a''}{a}\right)^x + c'' \Sigma \left(\frac{a'}{a}\right)^x + c''' = \frac{a''.a'.a}{(a''' - a'')(a''' - a')(a''' - a)} \left(\frac{a'''}{a}\right)^x$$

$$+ c' \left(\frac{a''}{a}\right)^x + c'' \left(\frac{a'}{a}\right)^x + c'''.$$

Ainsi substituant cette valeur dans celle de $fx$ [éq. $(a)$]

et représentant par les seules lettres $c$, $c'$, $c''$ et $c'''$ les coefficiens constans et arbitraires des termes du second membre, il viendra $fx = c(a''')^x + c'(a'')^x + c''(a')^x + c'''(a)^x$; donc généralement X étant $= 0$, on aura

$$fx = ca^x + c'a'^x + c''a''^x + c'''a'''^x \ldots + c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^x \quad (603).$$

Exemple. *Trouver le terme général de la série récurrente engendrée par la fraction*

$$\frac{1 - y}{1 - y - 2y^2} \ldots\ldots (b).$$

On obtient par les règles ordinaires des développemens des fonctions en série, que celle ($b$) donne la suite récurrente

$1 + 2y^2 + 2y^3 + 6y^4 + 10y^5 + 22y^6 +$ etc.....($c$),

que j'écris ainsi qu'il suit :

$$1.y^0 + 0.y + 2y^2 + 2y^3 + \text{etc.}\ldots\ldots (d).$$

Or, il est visible que si on représente par $fx$ le terme général de la suite des coefficiens

$$1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 22,\ \text{etc.}\ldots\ldots (e),$$

on aura pour terme général de la suite ($d$) la quantité $y^x fx$ : ainsi nous n'avons à nous occuper que de la suite récurrente ($e$) dont la loi est exprimée par l'équation aux différences du second ordre $f(x+2) = f(x+1) + 2fx$, ce qui donne $A = 2$, $B = 1$, $Q = -1$, $X = 0$ et $n = 2$ ; ainsi l'auxiliaire est $a^2 - a - 2 = 0$, d'où $a = -1$, $a' = 2$ ; et substituant ces valeurs dans l'équation (603), on a celle $fx = \pm c + c'.2^x$; d'où on déduit à l'ordinaire $c = -\frac{2}{3}$ et $c' = \frac{1}{6}$; donc $fx = \frac{2^{x-1} \mp 2}{3}$, ce qui donne pour terme général de la suite ($d$) la quantité $\frac{2^{x-1} \mp 2}{3} y^x$ : mais à

cause du terme de plus $0.y$ que nous avons introduit dans la proposée $(c)$, il est clair que le $x^{ième}$ terme de la suite $(d)$ est le $(x+1)^{ième}$ terme de la proposée $(c)$, et est par conséquent, de place paire ou impaire à l'inverse de ce qu'il était dans la série $(d)$, donc le vrai terme général de la proposée $(c)$ est $\frac{2^x \pm 2}{3} y^x$.

593. Si dans le dernier cas dont nous venons de parler, l'auxiliaire a des racines égales, alors il est évident que l'intégrale (603) devient incomplète; car supposant, par exemple, $a = a' = a''$, on aura

$$fx = (c + c' + c'')\, a^x + c'''a'''^x \ldots + c^{(n-1)'}a^{(n-1)'x};$$

or, $c + c' + c''$ est une quantité constante arbitraire qu'on peut représenter par la seule lettre $c''$; donc il manque deux constantes arbitraires à l'équation précédente pour être complète. Afin de remédier à cet inconvénient, reprenons l'équation (602), et pour plus de netteté dans le calcul, donnons à $n$ une valeur numérique déterminée, par exemple 6, et supposons que les quatre racines $a$, $a'$, $a''$, $a'''$ de l'auxiliaire sont égales; nous aurons conséquemment à développer l'équation

$$fx = ca^x \Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x \Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x \ldots\ldots (a);$$

or, n'ayant pas égard aux facteurs en fonctions de $a^{\text{V}}$, $a^{\text{IV}}$... qu'on trouve dans les intégrations successives, parce qu'en dernière analyse elles vont se confondre avec la constante arbitraire $c$, on aura

$$\Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x = \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x + c', \text{ donc } \Sigma \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x \Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x = \Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a'''}\right)^x$$

$$+ c' \Sigma \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x = \left(\frac{a^{\text{V}}}{a'''}\right)^x + c' \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x + c''; \text{ d'où}$$

$$\Sigma 1 \Sigma \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x \Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x = \left(\frac{a^{\text{V}}}{a}\right)^x + c'\left(\frac{a^{\text{IV}}}{a}\right)^x + c''x + c''',$$

en mettant $a$ à la place de $a'''$ à cause de $a = a'''$. On aura de même $\Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma \left(\frac{a^{\text{IV}}}{a'''}\right)^x \Sigma \left(\frac{a^{\text{V}}}{a^{\text{IV}}}\right)^x = \left(\frac{a^{\text{V}}}{a}\right)^x + c'\left(\frac{a^{\text{IV}}}{a}\right)^x + c''x^2 + c'''x + c^{\text{IV}}$; et enfin après la cinquième intégration, il viendra $fx = c(a^{\text{V}})^x + c'(a^{\text{IV}})^x + a^x[c''x^3 + c'''x^2 + c^{\text{IV}}x + c^{\text{V}}]$; tel est le développement de l'équation $(a)$; d'où il est aisé de conclure que $n$ étant l'ordre de différence de l'équation proposée, et $i$ le nombre des racines égales de l'auxiliaire, on a généralement, en renversant les indices distinctives des $n$ constantes arbitraires, l'intégrale complète

$$fx = c^{(n-1)'x}a^{(n-1)'x} + c^{(n-2)'}a^{(n-2)'x} \ldots + c^{i'}a^{i'x} + a^x[c^{(i-1)'} + x^{i-1} + c^{(i-2)'}x^{i-2} \ldots + c''x^2 + c'x + c] \ldots (604).$$

Pour faire une application de cette formule, soit proposé d'intégrer l'équation aux différences du septième ordre

$$1620\, f(x) + 3861\, f(x+1) - 1188\, f(x+2) - 813\, f(x+3) - 124\, f(x+4) + 33\, f(x+5) + 12\, f(x+6) + f(x+7) = 0 \ldots\ldots (b).$$

Comparant cette équation avec celle (595), on a $A = 1620$, $B = 3861$, $C = -1188$, $D = -813$, $E = -124$, $F = 33$, $G = 12$, $Q = 1$, $n = 7$; donc l'auxiliaire sera $a^7 + 12a^6 + 33a^5 - 124a^4 - 813a^3 - 1188a^2 + 3861a + 1620 = 0$, ou $(a+3)^4(a^3 - 21a + 20) = 0$; donc à cause des quatre racines égales à $-3$, et des trois racines inégales $1$, $4$ et $-5$, la formule (604) dans laquelle $i = 4$, donnera $fx = c^{\text{VI}} + c^{\text{V}}4^x \pm c^{\text{IV}}5^x \pm 3^x[c'''x^3 + c''x^2 + c'x + c]$.

594. Si toutes les racines de l'auxiliaire de la pro-

posée étaient égales, il est évident qu'on aurait, d'après ce qui a été dit dans l'article précédent, son intégrale complète exprimée par l'équation

$$fx = a^x[c^{(n-1)'}x^{n-1} + c^{(n-2)'}x^{n-2} \ldots\ldots + c''x^2 + c'x + c] \ldots\ldots (605).$$

Par exemple, soit proposé de trouver le terme général de la série 0, 0, 1, 6, 24, 80 etc. dont la loi est exprimée par l'équation $f(x+3) = 6f(x+2) - 12f(x+1) + 8fx$; on trouve à l'ordinaire, que l'auxiliaire de la proposée est $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 0$, ou $(a-2)^3$; donc d'après l'équation (605), il vient $fx = 2^x(c''x^2 + c'x + c)$, d'où on conclut $c = \frac{1}{8}$, $c' = -\frac{3}{16}$ et $c'' = \frac{1}{16}$ : on a donc complètement pour terme général de la série proposée, $fx = 2^{(x-4)}[x^2 - 3x + 2]$.

595. Il peut encore se faire que dans l'équation auxiliaire de celle aux différences qu'on veut intégrer, il y ait plusieurs facteurs de la forme $(a \pm b)^p = 0$ $(a \pm e)^q = 0$ etc. avec des facteurs du premier degré $a \pm d = 0$, $a \pm h = 0$ etc. Mais ce cas là se soumet également aux méthodes précédentes. En voici un exemple. Soit $(a-b)^3(a-e)^2(a-d)(a-h) = 0$, l'auxiliaire d'une équation aux différences du septième ordre qu'on veut intégrer, on aura conséquemment, d'après l'équation (602),

$$fx = ca^x \Sigma 1 \Sigma 1 \Sigma \left(\frac{e}{b}\right)^x \Sigma 1 \Sigma \left(\frac{d}{e}\right)^x \Sigma \left(\frac{h}{d}\right)^x;$$

d'où on conclura à l'ordinaire

$$\Sigma 1 \Sigma \left(\frac{d}{e}\right)^x \Sigma \left(\frac{h}{d}\right)^x = \left(\frac{h}{e}\right)^x + c'\left(\frac{d}{e}\right)^x + c''x + c'''$$

donc

$$\Sigma\left(\frac{e}{b}\right)^x \Sigma 1 \text{ etc.} = \left(\frac{h}{b}\right)^x + c\left(\frac{d}{e}\right)^x + c''\Sigma x\left(\frac{e}{b}\right)^x + c'''\left(\frac{e}{b}\right)^x + c^{\text{IV}}.$$

On trouve par le moyen de la table (586) [art. 578], que $c''\Sigma x\left(\frac{e}{b}\right)^x = c''x\left(\frac{e}{b}\right)^x - c''\left(\frac{e}{b}\right)^x$; donc représentant par $c'''$ la constante arbitraire $c''' - c''$, on aura

$$\Sigma\left(\frac{e}{b}\right)^x \Sigma 1 \text{ etc.} = \left(\frac{h}{b}\right)^x + c'\left(\frac{d}{b}\right)^x + c''x\left(\frac{e}{b}\right)^x + c'''\left(\frac{e}{b}\right)^x + c^{\text{IV}};$$

et continuant l'intégration de la même manière, il viendra enfin l'intégrale complète $fx = ch^x + c'd^x + c''xe^x + c'''e^x + b^x[c^{\text{IV}}x^2 + c^{\text{V}}x + c^{\text{VI}}]$.

596. Il nous reste maintenant à examiner le cas qui paraît présenter le plus de difficultés, c'est-à-dire celui où l'auxiliaire a des racines imaginaires. Nous commencerons notre examen par les équations linéaires aux différences dans lesquelles $X = 0$, et nous examinerons ensuite le cas où X est une fonction de $x$.

Soit supposé que l'auxiliaire a les deux racines imaginaires $p + q\sqrt{-1}$ et $p - q\sqrt{-1}$, faisons $a^{(n-2)'} = p + q\sqrt{-1}$ et $a^{(n-1)'} = p - q\sqrt{-1}$, ce qui donnera pour les deux derniers termes de la formule (603) $c^{(n-2)'}(p + q\sqrt{-1})^x + c^{(n-1)'}(p - q\sqrt{-1})^x$; or, faisant

$$\cot\omega = \frac{p}{q} \ldots\ldots\ldots (a),$$

d'où $\sin\omega = \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$ et $\cos\omega = \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, on a $\cos\omega \pm \sin\omega\sqrt{-1} = \frac{p \pm q\sqrt{-1}}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; mais on sait que $\cos(x\omega) \pm \sin(x\omega)\sqrt{-1} = (\cos\omega \pm \sin\omega\sqrt{-1})^x$, donc $\cos(x\omega) \pm \sin(x\omega)\sqrt{-1} = \left[\frac{p \pm q\sqrt{-1}}{\sqrt{(p^2+q^2)}}\right]^x$,

d'où on tire

$$(p \pm q\sqrt{-1})^x = [p^2+q^2]^{\frac{x}{2}}[\cos(x\omega) + \sin(x\omega)\sqrt{-1}];$$

et faisant pour abréger

$$m = \sqrt{(p^2+q^2)} \ldots\ldots (b),$$

on aura

$$(p \pm q\sqrt{-1})^x = m^x[\cos(x\omega) \pm \sin(x\omega)\sqrt{-1}] \ldots (c);$$

donc les deux derniers termes de notre intégrale seront $c^{(n-2)'}m^x\cos(x\omega) + c^{(n-1)'}m^x\sin(x\omega)$, en représentant respectivement par $c^{(n-2)'}$ et $c^{(n-1)'}$ les deux quantités constantes arbitraires $c^{(n-2)'} + c^{(n-1)'}$ et $(c^{(n-2)'} - c^{(n-1)'})\sqrt{-1}$. On voit de même que s'il y avait quatre racines imaginaires dans l'auxiliaire, on aurait les quatre derniers termes de l'intégrale qui seraient sous la forme $c^{(n-4)'}g^x\cos(x\lambda) + c^{(n-3)'}g^x\sin(x\lambda) + c^{(n-2)'}m^x\cos(x\omega) + c^{(n-1)'}m^x\sin(x\ )$, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de racines imaginaires.

EXEMPLE. *Trouver le terme général de la suite récurrente simple* 0, 0, 1, 2 $(\sqrt{3}+1)$, $4(3+\sqrt{3})$, $8(3+2\sqrt{3})$ etc., *dont la loi est exprimée par l'equation aux différences du troisième ordre*

$$f(x+3) = 2(\sqrt{3}+1)f(x+2) - 4(\sqrt{3}+1)f(x+1) + 8fx \ldots\ldots (d).$$

Comparant l'équation $(d)$ avec celle (595) on a $A = -8$, $B = 4(\sqrt{3}+1)$, $C = -2(\sqrt{3}+1)$, $Q = 1$, $X = 0$, $n = 3$; ainsi l'auxiliaire de $(d)$ est $a^3 - 2(\sqrt{3}+1)a^2 + 4(\sqrt{3}+1)a = 8$, d'où on tire $a = 2$, $a' = \sqrt{3} + \sqrt{-1}$ et $a'' = \sqrt{3} - \sqrt{-1}$; donc $p = \sqrt{3}$ et $q = 1$, d'où $\cot\omega = \sqrt{3}$[équat. $(a)$], ce qui donne $\omega = 33^\circ\frac{1}{3}$; de plus, on a $m = \sqrt{3+1} = 2$ [équat. $(b)$]; donc les deux derniers termes de l'intégrale demandée seront

$c'2^x \cos(x33^\circ\frac{1}{3}) + c''2^x \sin(x33^\circ\frac{1}{3})$, et l'équation (603) donnera celle

$$fx = 2^x[c + c'\cos(x33^\circ\tfrac{1}{3}) + c''\sin(x33^\circ\tfrac{1}{3})] \ldots\ldots (e).$$

Faisant successivement $x = 1, 2, 3$, ce qui donne à $fx$ les trois valeurs respectives $0, 0, 1$ des trois premiers termes de la série proposée, l'équation précédente donne successivement les trois équations

$$0 = c + \frac{\sqrt{3}}{2}c' + \tfrac{1}{2}c'', \quad 0 = c + \tfrac{1}{2}c' + \frac{\sqrt{3}}{2}c''$$

et $1 = 8(c + c'')$, d'où on tire $c = \frac{1}{8(2-\sqrt{3})}$, $c' = -\frac{\sqrt{3}-1}{8(2-\sqrt{3})}$ et $c'' = -\frac{\sqrt{3}-1}{8(2-\sqrt{3})}$ : substituant ces valeurs dans l'équation $(e)$, on aura pour intégrale complète de l'équation $(d)$, et par conséquent pour terme général de la série proposée, la quantité

$$fx = \frac{2^{x-3}}{2-\sqrt{3}}[1 - (\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\cos(x33^\circ\tfrac{1}{3} - 5c^\circ)].$$

597. Avant de passer au cas où X étant une fonction variable, l'auxiliaire recèle des racines imaginaires, il est à propos pour plus de simplicité, que nous développions la formule (598) en un polynome, en considérant d'abord X comme une fonction exponentielle de $x$. Soit donc fait

$$X = h^x \ldots\ldots (a),$$

ce qui changera le dernier facteur intégral de l'équation (598) en celui $\Sigma\left[\frac{h}{a^{(n-1)'}}\right]^x$ qui, d'après la formule (584), est $= \frac{a^{(n-1)'}}{h - a^{(n-1)'}}\left[\frac{h}{a^{(n-1)'}}\right]^x + c^{(n-1)'}$; donc

$$\Sigma\left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x \Sigma\left[\frac{h}{a^{(n-1)'}}\right]^x = \frac{a^{(n-1)'}a^{(n-2)'}}{(h-a^{(n-1)'})(h-a^{(n-2)'})}\left[\frac{h}{a^{(n-2)'}}\right]^x$$

$+c^{(n-1)'}\left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x + c^{(n-2)'}$; et continuant de même, on trouvera

$$\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma\left(\frac{a''}{a'}\right)^x \ldots \Sigma\left[\frac{a^{(n-1)'}}{a^{(n-2)'}}\right]^x \Sigma\left[\frac{h}{a^{(n-1)'}}\right]^x$$

$$= \frac{a^{(n-1)'}a^{(n-2)'}\ldots a'.a}{(h-a^{(n-1)'})(h-a^{(n-2)'})\ldots(h-a')(h-a)}\left(\frac{h}{a}\right)^x$$

$$+c^{(n-1)'}\left[\frac{a^{(n-1)'}}{a}\right]^x + c^{(n-2)'}\left[\frac{a^{(n-2)'}}{a}\right]^x \ldots + c'\left(\frac{a'}{a}\right)^x + c;$$

donc faisant attention que $a^{(n-1)'}a^{(n-2)'}\ldots a'a = \pm A$, et que le dénominateur $(h-a^{(n-1)'})(h-a^{(n-2)'})\ldots\ldots(h-a)$ est égal au premier membre de l'auxiliaire (596), en faisant $Q=1$ (*), et mettant $h$ à la place de $a$, on aura par la substitution de ces valeurs dans l'équation (598), celle

$$fx = \frac{h^x}{h^x\ldots + Dh^3 + Ch^2 + Bh + A} + c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^x$$
$$+ c^{(n-2)'}[a^{(n-2)'}]^x \ldots + c'a'^x + ca^x \ldots\ldots (606),$$

ce qui est l'intégrale complète et très-commode des équations aux différences d'un ordre quelconque $n$, dans lesquelles X est une fonction exponentielle de $x$.

Exemple. *Intégrer par le moyen de la formule* (606) *la même équation*

$$18fx + 9f(x+1) - 8f(x+2) + f(x+3) = 2^x \ldots (a),$$

*que celle* (*b*) *que nous avons intégrée à l'article* 586.

---

(*) On peut toujours supposer $Q=1$, car s'il en était autrement, il n'y aurait qu'à diviser l'équation (595) par Q, et alors le coefficient de $f(x+n)$ que nous avons représenté par Q ne serait plus que l'unité.

Mettant

Mettant à la place de $a$ dans le premier membre $a^3 - 8a + 9a + 18$ de l'auxiliaire, la valeur numérique 2 de $h$, on aura $8 - 32 + 18 + 18 = 12$; donc la formule (606) donnera tout de suite pour intégrale complète de la proposée ($a$), l'équation $fx = \frac{2^{x-2}}{3} + c''6^x + c'3^x \pm c$, ce qui est le même résultat que celui trouvé à l'article 586.

598. Si l'auxiliaire a des racines imaginaires, par exemple, si $a' = p + q\sqrt{-1}$ et $a = p - q\sqrt{-1}$, on voit tout de suite, d'après ce qui a été dit précédemment, que faisant

$$(a) \ldots\ldots\ldots \cot \omega = \frac{p}{q} \text{ et } m = \sqrt{p^2 + q^2} \ldots\ldots\ldots (b),$$

les deux derniers termes de l'intégrale complète (606) seront $c'm^x \cos(x\omega)$ et $cm^x \sin(x\omega)$.

Ce que nous venons de dire pour deux racines imaginaires, a également lieu quel que soit le nombre des racines imaginaires de l'auxiliaire.

EXEMPLE. *Trouver le terme général de la série récurrente composée*, 0, 0, 1, 17, 157, 895, 1881 etc. *dont la loi est exprimée par l'équation*

$$-150fx + 80f(x+1) - 13f(x+2) + f(x+3) = 4^x \ldots (c).$$

Comparant cette équation ($c$) avec celle (595), on a $A = -150$, $B = 80$, $C = -13$, $Q = 1$, $n = 3$ et $X = 4^x$, d'où $h = 4$: donc l'auxiliaire est $a^3 - 13a^2 + 80a - 150 = 0$, d'où l'on tire $a'' = 3$, $a' = 5 + 5\sqrt{-1}$ et $a = 5 - 5\sqrt{-1}$, ce qui donne $p = q = 5$ et $\cot \omega = 1$ [équat. ($a$)]; d'où $\omega = 50°$; enfin l'équation ($b$) donne $m = 5\sqrt{2}$. Mettant à la place de $a$ dans le premier membre de l'auxiliaire, la valeur numérique 4 de $h$, il se réduit au nombre 26. Ainsi

substituant toutes ces valeurs dans l'équation (606), on aura $fx = \frac{4^x}{26} + c''3^x + (5\sqrt{2})^x[c' \cos(x.50°) + c \sin(x.50°)]$. Faisant successivement $x =$ aux trois nombres 1, 2, 3, auxquels correspondent respectivement les valeurs 0, 0, 1, de $fx$, l'équation précédente donnera $c = -\frac{23}{3770}$, $c' = -\frac{3}{754}$ et $c'' = -\frac{1}{29}$; on aura donc complètement

$$fx = \frac{145.4^x - 130\,3^x - (5\sqrt{2})^x[15\cos(x50°) + 23\sin(x50°)]}{3770}.$$

599. Si l'ajoutée X est une quantité constante H, il n'y aura d'autre changement à faire dans la formule (606), que de mettre au numérateur du premier terme de la valeur de $fx$, la quantité H à la place de celle $h^x$, et au dénominateur le nombre 1 à la place de $h$; ainsi ce premier terme sera $\frac{H}{1 \ldots + D + C + B + A}$, ce qu'au reste on trouvera à *priori* en développant le second membre de l'équation (601).

600. Passons maintenant au développement de la formule (598), lorsque X est une fonction rationnelle de $x$.

Faisant $\Delta x = 1$, il est aisé de conclure de l'équation (587), que quelle que soit la valeur entière et positive d'un nombre que nous représenterons par $\lambda$, on aura toujours

$$\Sigma \frac{x^\lambda}{a^x} = \frac{a}{(1-a)a^x}[x^\lambda - A_1 x^{\lambda-1} + A_2 x^{\lambda-2} \ldots \pm A_\lambda] \ldots (a),$$

$A_1, A_2, \ldots A_\lambda$ étant des constantes fonctions de celle $a$, le signe + lorsque $\lambda$ est pair, le signe — dans le cas contraire. Cela posé, reprenant notre équation

(598), et supposant $X = x^\lambda$, on aura $\Sigma \frac{X}{[a^{(n-1)\prime}]^x}$ $= \Sigma \frac{x^\lambda}{[a^{(n-1)\prime}]^x} = \frac{a^{(n-1)\prime}}{[1 - a^{(n-1)\prime}][a^{(n-1)\prime}]^x}[x^\lambda - A_1 x^{\lambda-1}$ $\ldots \pm A_\lambda] + c^{(n-1)\prime}$; donc faisant pour abréger

$$\xi = x^\lambda - A_1 x^{\lambda-1} \ldots \pm A_\lambda \ldots\ldots (b),$$

il viendra $\Sigma \left[\frac{a^{(n-1)\prime}}{a^{(n-2)\prime}}\right]^x \Sigma \frac{x^\lambda}{[a^{(n-1)\prime}]^x} = \frac{a^{(n-1)\prime}}{1 - a^{(n-1)\prime}} \times$ $\Sigma \frac{\xi}{[a^{(n-2)\prime}]^x} + c^{(n-1)\prime}\left[\frac{a^{(n-1)\prime}}{a^{(n-2)\prime}}\right]^x + c^{(n-2)\prime}$. Mais $\Sigma \frac{\xi}{[a^{(n-2)\prime}]^x} = \Sigma \frac{x^\lambda}{[a^{(n-2)\prime}]^x} - A_1 \Sigma \frac{x^{\lambda-1}}{[a^{(n-2)\prime}]^x} \ldots\ldots$ $\ldots \pm A_\lambda \Sigma \frac{1}{[a^{(n-2)\prime}]^x}$ [équat. $(b)$]; et d'après l'équation $(a)$, il est aise de voir que toutes ces intégrations particulières étant effectuées, les intégrales respectives auront toutes pour facteur commun

$$\frac{a^{(n-2)\prime}}{[1 - a^{(n-2)\prime}][a^{(n-2)\prime}]^x} \ldots\ldots (c):$$

donc représentant par $\xi'$ la somme de toutes ces intégrales divisées par la fraction $(c)$, on aura

$$\Sigma \left[\frac{a^{(n-1)\prime}}{a^{(n-2)\prime}}\right]^x \Sigma \frac{x^\lambda}{[a^{(n-1)\prime}]^x} = \frac{a^{(n-1)\prime} a^{(n-2)\prime} \xi'}{[1 - a^{(n-1)\prime}][1 - a^{(n-2)\prime}][a^{(n-2)\prime}]^x} + c^{(n-1)\prime}\left[\frac{a^{(n-1)\prime}}{a^{(n-2)\prime}}\right]^x + c^{(n-2)\prime};$$

et continuant de même jusqu'à ce qu'on parvienne à la première intégrale $\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^x$, ensuite substituant la

valeur de $\Sigma\left(\frac{a'}{a}\right)^x \Sigma\left(\frac{a''}{a'}\right)^x$ etc. dans l'équation (598), on aura

$$fx = \frac{a^{(n-1)'}a^{(n-2)'}\ldots a'a}{\pm A[1-a^{(n-1)'}][1-a^{(n-2)'}]\ldots[1-a'][1-a]}\xi^{(n-1)'}$$
$$+ c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^x + c^{(n-2)'}[a^{(n-2)'}]^x \ldots c'a'^x + ca^x;$$

or, il est évident que le numérateur du coefficient de $\xi^{(n-1)'}$ est $= \pm A$, et que le facteur de $\pm A$ dans le dénominateur du même coefficient est $= 1 \ldots + D + C + B + A$ en faisant toujours comme à l'article 597, $Q = 1$; on aura donc définitivement

$$fx = \frac{\xi^{(n-1)'}}{1\ldots + D + C + B + A} + c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^x$$
$$+ c^{(n-2)'}[a^{(n-2)'}]^x \ldots + c'a'^x + ca^x \ldots (607).$$

Mais il faut bien se rappeler que généralement nous représentons par $\xi^{m'}$ l'intégrale de $\xi^{(m-1)'}$ divisée par le facteur commun à tous ses termes.

Afin de rendre plus facile l'application de la théorie précédente, nous joignons le développement des formules de la table (588), en supposant $\Delta x = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\frac{1}{a^x} = \frac{a}{a^x(1-a)}\,[1]\\
&\Sigma\frac{x}{a^x} = \frac{a}{a^x(1-a)}\left[x - \frac{1}{1-a}\right]\\
&\Sigma\frac{x^2}{a^x} = \frac{a}{a^x(1-a)}\left[x^2 - \frac{2}{1-a}x + \frac{1+a}{(1-a)^2}\right]\\
&\Sigma\frac{x^3}{a^x} = \frac{a}{a^x(1-a)}\left[x^3 - \frac{3}{1-a}x^2 + \frac{3(1+a)}{(1-a)^2}x\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{a^2+4a+1}{(1-a)^3}\right]\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(608).$$

EXEMPLE. *Trouver le terme général de la série récurrente et composée du second ordre*

$$1, 0, -11, -73, -370, -1598 \text{ etc.} \ldots (d),$$

*dont la loi est exprimée par l'équation*

$$f(x+2) = x^2 + 7f(x+1) - 12fx \ldots (e).$$

On a $A = 12$, $B = -7$, $X = x^2$, $n = 2$, et l'auxiliaire est $a^2 - 7a + 12 = 0$, d'où $a = 3$, $a' = 4$; substituant cette valeur de $a'$ dans la troisième équation de la table précédente, et n'ayant égard qu'à la partie comprise entre crochets; on a $\xi = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}$ : divisant cette équation par $a^x = 3^x$, et intégrant par le moyen des trois premières formules de la table (608), en ne prenant de ces intégrales que les parties comprises entre crochets, il vient $\xi' = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{17}{9}$, et substituant cette valeur de $\xi'$ ainsi que les valeurs numériques de A, B, $a$ et $a'$ dans l'équation (607), on a

$$fx = \frac{9x^2 + 15x + 17}{54} + c'.4x + c.3x,$$

et déterminant à l'ordinaire les constantes arbitraires $c'$, $c$, on a complètement

$$fx = \frac{2x(9x+15) + 34 - 61.4^x + 90.3^x}{108}.$$

601. Si l'une ou plusieurs des racines de l'auxiliaire sont égales à l'unité, la formule (607) sera en défaut, puisqu'alors on aura le dénominateur $1 \ldots + D + C + B + A = 0$, ce qui donnera $fx = \infty$. Mais on obviera aisément à cet inconvénient, en commençant par diviser l'auxiliaire par $a - 1$ élevé à la puissance marquée par le nombre de ses racines égales à l'unité, et faisant dans le quotient $a = 1$; ce qui indiquera le nouveau diviseur qu'il faudra donner à $\xi^{(n-1)'}$. Il est à

propos d'observer que dans les intégrations successives qu'on est obligé d'effectuer, il y en aura autant de simplement algébriques données par la table (579), qu'il y a de racines de l'auxiliaire égales à l'unité. Pour rendre ceci plus sensible par un exemple, proposons-nous de trouver le terme général de la suite recurrente du troisième ordre 1, 0, 0, 7, 46, 208 etc., dont la loi est exprimée par l'équation

$$f(x+3) = x^2 + 6f(x+2) - 11f(x+1) + 6fx.$$

On a $A = -6$, $B = 11$, $C = -6$, $X = x^2$,

d'où il suit que l'auxiliaire est $a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0$, dont les trois racines sont 1, 2 et 3; conséquemment je commence par diviser l'auxiliaire par $a - 1$, ce qui donne $a^2 - 5a + 6 = 0$, et mettant dans le premier membre l'unité à la place de $a$, il vient le nombre 2 par lequel il faudra diviser $\xi''$. Actuellement intégrant $\frac{x^2}{3^x}$ par le moyen de la troisième formule de la table (608), en supprimant toujours le facteur extérieur aux crochets, on a $\xi = x^2 + x + 1$; ensuite divisant cette équation par $2^x$, et intégrant toujours de la même manière, il vient l'équation $\xi' = x^2 + 3x + 5$, dont le second membre divisé par la troisième racine 1, élevée à la puissance $x$, reste fonction algébrique; ainsi son intégration se trouvera par le moyen de la table (579), ce qui donnera $\xi'' = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{11x}{3}$; cela posé, l'équation (607) donnera

$$fx = \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{11}{3}x}{2} + c''3^x + c'2^x + c;$$

et déterminant à l'ordinaire les constantes, on aura complètement pour terme général de la suite récur-

rente proposée

$$fx = \frac{2x(x^2 + 3x + 11) + 7.3^x - 54.2^x + 69}{12}.$$

602. Nous n'avons jusqu'à présent intégré l'équation aux différences (595) que dans le cas où les coefficiens A, B... sont constans ; mais si ces coefficiens sont fonctions de la variable $x$, il est malheureusement très-rare de pouvoir effectuer l'intégration; cependant l'équation

$$f(x+1) - \xi fx = X \ldots\ldots (609),$$

dans laquelle $\xi$ et X sont des fonctions de $x$, s'intègre assez aisément, ainsi qu'on va le voir. En effet, soit fait

$$fx = \Phi x \, \Sigma \varphi x \ldots\ldots (a),$$

en représentant par $\Phi$ et $\varphi$ les caractéristiques de deux fonctions indéterminées de $x$. De cette équation $(a)$ on déduit celle $f(x+1) = \Phi(x+1)\Sigma\varphi(x+1)$ ; mais $\Sigma\varphi(x+1) = \varphi x + \Sigma\varphi x$ ; donc $f(x+1) = \Phi(x+1)\varphi x + \Phi(x+1)\Sigma\varphi x$ : substituant cette valeur de $f(x+1)$ ainsi que celle de $fx$ [équat. $(a)$], dans l'équation proposée (609), il vient

$$[\Phi(x+1) - \xi\Phi x]\Sigma\varphi x + \Phi(x+1)\varphi x = X.$$

Mais $\Phi x$ étant une fonction indéterminée de $x$, on peut faire le coefficient de $\Sigma\varphi x = 0$, ce qui donne pour déterminer $\Phi x$, l'équation

$$\xi\Phi x = \Phi(x+1) \ldots\ldots (b),$$

et pour déterminer $\varphi x$ l'équation

$$\varphi x = \frac{X}{\Phi(x+1)} \ldots\ldots (c).$$

Prenant les logarithmes des deux membres de l'équation $(b)$ et transposant, il vient $l\xi = l\Phi(x+1) - l\Phi x$

$= \Delta l \Phi x$, donc $l\Phi x = \Sigma l\xi$, d'où on tire

$$\Phi x = e^{\Sigma l\xi} \ldots (d),$$

et substituant cette valeur dans l'équation $(b)$, il vient $\Phi(x+1) = \xi e^{\Sigma l\xi}$; donc l'équation $(c)$ se réduira à celle $\varphi x = \frac{X}{\xi e^{\Sigma l\xi}}$, d'où $\Sigma\varphi x = \Sigma \frac{X}{\xi e^{\Sigma l\xi}} + c$; substituant cette valeur de $\Sigma\varphi x$, ainsi que celle de $\Phi x$ [équat. $(d)$] dans l'equation $(a)$, on a celle

$$fx = e^{\Sigma l\xi}\left[\Sigma \frac{X}{\xi e^{\Sigma l\xi}} + c\right] \ldots\ldots (610),$$

qui est l'intégrale compléte demandée.

On pourrait si on voulait, substituer dans cette formule la valeur de $\Sigma l\xi$ donnée par l'équation (591), en y faisant $\Delta\xi = 1$.

Avant de faire des applications, je préviens que je nomme *séries récurrentes variables*, celles dont la loi est exprimée par une équation aux différences qui a un ou plusieurs de ses termes avec un coefficient variable.

Cela posé, proposons-nous, en premier lieu, de trouver le terme général de la série récurrente variable, 1, 1, 6, 36, 240 etc., dont la loi est exprimée par l'équation aux différences du premier ordre.

$$f(x+1) = xfx + x^2(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 1 \ldots (e).$$

Comparant identiquement cette équation avec celle (609), il vient $\xi = x$ et $X = x^2(x-1)(x-2)\ldots\ldots 1 = x^2 e^{\Sigma lx}$ [équat. (592)]. Substituant ces valeurs dans l'équation (610), on a

$$fx=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 1(\Sigma x+c)=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 1\left(\frac{x(x-1)+c}{2}\right).$$

Pour déterminer la constante $c$, j'observe que pour $x=2$ on a $fx=1$, ce qui réduit l'équation précédente à $1=\frac{2.1+c}{2}$ d'où $c=0$; on a donc complètement

$$fx=\frac{x(x-1)^2(x-2)(x-3)\ldots 1}{2},$$

ou plus simplement $fx=1.3.4.5\ldots x(x-1)$, ce qui est le terme général demandé.

Proposons-nous encore de trouver le terme général de la série récurrente variable 1, 1, 40, 3996, 326304, etc., dont la loi est exprimée par l'équation

$$f(x+1)=x^x fx+3^x.x^x(x-1)^{x-1}(x-2)^{x-2}\ldots 2^2.$$

Comparant cette équation avec celle (609), on a $\xi=x^x$ et $X=3^x.x^x(x-1)^{x-1}(x-2)^{x-2}\ldots 2^2$ $=3^x x^x e^{\Sigma lx^x}$ [équat. (592)] : substituant ces valeurs dans l'équation (610), il vient $fx=e^{\Sigma lx^x}[\Sigma 3^x+c]$, et mettant à la place de $e^{\Sigma lx^x}$ et de $\Sigma 3^x$, leurs valeurs respectives $(x-1)^{x-1}.(x-2)^{x-2}.(x-3)^{x-3}\ldots 2^2$ et $\frac{3^x}{2}$, données par les équations (592) et (584), on a $fx=2^2.3^3.4^4.5^5\ldots(x-1)^{x-1}\left(\frac{3^x+c}{2}\right)$. Pour déterminer la constante, nous observerons que quand $x=3$, la série proposée donne $fx=40$, donc $40=2(27+c)$, d'où $c=-7$; on a donc complètement $fx=2.3^3.4^4.5^5\ldots(x-1)^{x-1}(3^x-7)$, ce qui est le terme général de la série proposée.

# CHAPITRE III.

## *Quelques notions sur l'intégration des formules et équations aux différences qui contiennent plusieurs variables.*

603. Puisque pour prendre la différence d'une fonction variable $F(x, y, z....)$ entre un nombre quelconque de variables, on prend successivement cette différence par rapport à chacune des variables, en considérant les autres comme constantes ; il est clair que quand on voudra intégrer la différence d'un monome, il ne sera nécessaire que de prendre tous les termes affectés de la différence d'une seule variable, et d'intégrer ces termes, ce qui donnera l'intégrale de la formule aux différences proposées, si celle-ci est exacte. Par exemple, soit proposé d'intégrer $2yxz\Delta x + x^2z\Delta y + 2xz\Delta x\Delta y + yz\Delta x^2 + z\Delta x^2\Delta y + yx^2\Delta z + 2yx\Delta x\Delta z + y\Delta x^2\Delta z + x^2\Delta y\Delta z + 2x\Delta x\Delta y\Delta z + \Delta x^2\Delta y\Delta z$. Ne prenant que les deux termes $2yxz\Delta x + yz\Delta x^2$ qui renferment la seule différence de $x$, je les intègre par rapport à cette seule variable, ce qui donne $2yz\Delta x\Sigma x + yz\Delta x^2\Sigma x^0 = yzx^2 - yzx\Delta x + yzx\Delta x = yzx^2$ ; donc si la formule proposée est une différence exacte, son intégrale est $yzx^2$ ; c'est ce qui a réellement lieu ; car en prenant la différence de ce monome algébrique, on retrouve la formule proposée.

604. Quand même la formule proposée serait la différence d'un polynome; la méthode d'intégration serait la même, si ce n'est que dans le cas où la variable par rapport à laquelle on intégrerait, ne multiplierait pas tous les termes de la fonction dont la différence est proposée, il faudrait intégrer plusieurs autres termes, ou même, pour plus de sureté, tous les termes qui ne sont respectivement affectés que de la différence d'une seule variable; ensuite, ajoutant toutes ces intégrales, on effaceroit les répétitions des termes répétés. Par exemple, soit proposé d'intégrer le polynome aux différences $2xy\Delta x + x^2\Delta y + 2zx\Delta z + y\Delta x^2 + x\Delta z^2 + z^2\Delta x + 2y\Delta y + \Delta y^2 + 2x\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y + 2z\Delta z\Delta x + \Delta z^2\Delta x$. Je mets à part les quatre derniers termes où se trouvent mêlées les différences $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, et intégrant seulement les huit premiers termes, je trouve $2y\Delta x\Sigma x + x^2\Delta y\Sigma y^0 + 2x\Delta z\Sigma z + y\Delta x^2\Sigma x^0 + x\Delta z^2\Sigma z^0 + z^2\Delta x\Sigma x^0 + 2\Delta y\Sigma y + \Delta y^2\Sigma y^0 = yx^2 - yx\Delta x + x^2y + xz^2 - xz\Delta z + yx\Delta x + xz\Delta z + z^2x + y^2 - y\Delta y + y\Delta y$; réduisant et effaçant les répétitions des termes répétés, on a le trinome $yx^2 + xz^2 + y^2$, qui est surement l'intégrale de la formule proposée, si celle-ci est une différence exacte; c'est ce qu'on trouve être vrai en prenant la différence de l'intégrale obtenue.

605. Dans quelques équations aux différences où il entre plusieurs variables, et qui ne peuvent se soumettre aux méthodes précédentes, il est cependant possible, par le moyen de certains artifices, d'en obtenir les intégrales; telles sont, par exemple, toutes les équations aux différences qui, en dernière analyse, peuvent se réduire à la forme

$$\Delta y + yfx + Fx = 0 \ldots\ldots (611).$$

En effet, faisant

$$y = \omega\xi \ldots\ldots (a),$$

en représentant par $\omega$ et $\xi$ deux fonctions indéterminées de $x$, prenant la différence de l'équation $(a)$, il vient

$$\Delta y = \omega\Delta\xi + \xi\Delta\omega + \Delta\omega\Delta\xi \ldots (b),$$

et substituant cette valeur de $\Delta y$ ainsi que celle de $y$ [équat. $(a)$] dans la proposée (611), celle-ci deviendra

$$\omega\Delta\xi + \xi\Delta\omega + \Delta\omega\Delta\xi + \omega\xi fx + \mathrm{F}x = 0 \ldots (c).$$

Or, puisque $\xi$ et $\omega$ sont des quantités indéterminées, on peut faire

$$\omega\Delta\xi + \omega\xi fx = 0 \ldots (d),$$

ce qui réduit l'équation $(c)$ à celle

$$\xi\Delta\omega + \Delta\omega\Delta\xi = -\mathrm{F}x \ldots\ldots (e).$$

De l'équation $(d)$, on tire celle

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = -fx \ldots\ldots (f);$$

et faisant $\xi = e^{\lambda}$ d'où $\Delta\xi = e^{\lambda}(e^{\Delta\lambda} - 1) = \xi(e^{\Delta\lambda} - 1)$, l'équation $(f)$ deviendra $e^{\Delta\lambda} = 1 - fx$, d'où..... $\lambda = \Sigma l(1 - fx)$; donc

$$\xi(= e^{\lambda}) = e^{\Sigma l(1 - fx)} \ldots\ldots (g),$$

et par conséquent $\Delta\xi = e^{\Sigma l(1 - fx)}[e^{l(1-fx)} - 1]$: substituant ces valeurs de $\xi$ et $\Delta\xi$ dans l'équation $(e)$, il vient celle $\Delta\omega = \dfrac{-\mathrm{F}x}{e^{\Sigma l(1 - fx)} + l(1 - fx)}$, d'où

$\omega = \Sigma \dfrac{-\mathrm{F}x}{e^{\Sigma l(1 - fx)} + l(1 - fx)}$ : enfin substituant cette valeur de $\omega$ ainsi que celle de $\xi$ [équat. $(g)$] dans

l'équation $(a)$, il vient

$$y = c - e^{\Sigma l(1-fx)} \Sigma \frac{Fx}{e^{\Sigma l(1-fx)+l(1-fx)}} \quad (612),$$

ce qui est l'intégrale complète de l'équation proposée (611).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation*

$$\Delta y + y(1-x) + x^3(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 1 = 0.$$

Comparant cette équation avec celle (611), on a $fx = 1 - x$, d'où $x = 1 - fx$ et $Fx = x^3(x-1)(x-2)\ldots 1 = x^3 e^{\Sigma lx}$ [équat. (591), en y faisant $\Delta x = 1$]. Substituant ces valeurs dans l'équation (612), on a $y = c - e^{\Sigma lx} \Sigma \frac{x^3}{e^{lx}} = c - e^{\Sigma lx} \Sigma x^2$. Mais $e^{\Sigma lx} = (x-1)(x-2)\ldots 1$ [équat. (591)], et $\Sigma x^2 = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ [troisième équation de la table (579)], on a donc complètement pour l'intégrale de la proposée, l'équation

$$y = c - x(x-1)(x-2)\ldots 1.\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right).$$

---

# CHAPITRE IV.

## *Application du Calcul intégral à la sommation des séries.*

606. SOIT $y^{x'}$ une fonction de $x$ telle, qu'en y faisant successivement varier $x$ suivant ses différences

constantes, on forme la série

$$y', y'', y''', \ldots y^{x'} \ldots . (a),$$

dont $y^{x'}$ est le terme général. Soit représentée par S la somme de cette série $(a)$, et par $S'$ la somme de la même série augmentée du terme $y^{(x+\Delta x)'}$, qui suit immédiatement celui $y^{x'}$, en mettant dans ce dernier terme $x+\Delta x$ à la place de $x$. Cela posé, il est clair que si de $S'$ on retranche S, la différence de ces deux sommes sera $y^{(x+\Delta x)'}$; donc $S'-S$ ou $\Delta S = y^{(x+\Delta x)'}$, d'où $S = \Sigma y^{(x+\Delta x)'}$ : mais il est clair que $\Sigma y^{(x+\Delta x)'}$ est ce que devient $\Sigma y^{x'}$ lorsqu'on met dans cette dernière quantité $x+\Delta x$ à la place de $x$; donc le terme sommatoire d'une série se déduit immédiatement de l'intégrale de son terme général, en mettant dans cette intégrale $x+\Delta x$ à la place de $x$. Ainsi la lettre S étant prise pour caractéristique de la sommation, on exprimera analytiquement la relation de la sommation à l'intégration par l'équation

$$Sy^{x'} = \Sigma y^{(x+\Delta x)'} \ldots\ldots (613).$$

Pour faire une première application de cette formule, proposons-nous de sommer la suite

$a-b+e, 8a-2b+e, 27a-3b+e, 64a-4b+e$, etc. $(b)$,

dont le terme général est $y^{x'} = ax^3 - bx + e$, en prenant $\Delta x = 1$, c'est ce que nous ferons dorénavant, jusqu'à ce que nous prévenions du contraire. Or, nous avons vu à l'article 571 que l'intégrale de ce terme général est $x\left[\frac{ax^3}{4} - \frac{ax^2}{2} + \left(\frac{a-2b}{4}\right)x + \frac{b+2e}{2}\right]$ $+$ const.; donc substituant dans cette dernière formule $x+1$ à la place de $x$, on aura pour terme sommatoire de la série $(b)$,

$$Sy^{x'} = \frac{ax^4}{4} + \frac{1}{2}ax^3 + \frac{a-2b}{4}x^2 + \frac{2e-b}{2}x + e$$
$$+ \text{const.}\ldots\ldots(c).$$

Afin de déterminer la constante, nous observerons que pour $x = 1$, on a $Sy^{x'} = a - b + e$, qui est le premier terme de la série proposée $(b)$; donc faisant $x = 1$ dans l'équation $(c)$, on aura $a - b + e = a - b + 2e + \text{const.}$, d'où $\text{const.} = -e$; ainsi on a complètement

$$Sy^{x'} = \frac{x}{2}\left[\frac{ax^3}{2} + ax^2 + \frac{a-2b}{2}x + 2e - b\right].$$

607. La sommation d'une série se déduisant immédiatement de l'intégration de son terme général, nous croyons devoir faire connaître une classe très-considérable de suites dont on trouve fort aisément le terme général, et par conséquent le terme sommatoire.

Chaque terme de la série $(a)$ [art. 606] étant égal à celui qui le précède plus ou moins la différence qui existe entre ces deux termes, on aura la suite d'équations

$$\{y'' = y' \pm \Delta y',\ y''' = y'' \pm \Delta y'',\ y^{\text{IV}} = y''' \pm \Delta y''',\ldots$$
$$\ldots y^{x'} = y^{(x-1)'} \pm \Delta y^{(x-1)'}\}\ldots\ldots(a).$$

Prenant les différences respectives de chacune de ces équations, on a

$$\{\Delta y'' = \Delta y' \pm \Delta^2 y',\ \Delta y''' = \Delta y'' \pm \Delta^2 y'',\ \Delta y^{\text{IV}} = \Delta y'''$$
$$\pm A^2 y''',\ldots \Delta y^{x'} = \Delta y^{(x-1)'} \pm \Delta^2 y^{(x-1)'}\}\ldots(b).$$

Substituant la valeur de $\Delta y''$ première équation du groupe $(b)$, dans la seconde équation du même groupe, la valeur de $\Delta y'''$ dans la troisième équation, et ainsi de suite par des substitutions successives, on parviendra à l'équation

$$\Delta y^{x'} = \Delta y' \pm (x-1)\Delta^2 y' + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\Delta^3 y'$$
$$\pm \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3}\Delta^4 y' + \text{etc.}\ldots\ldots (614).$$

Par des substitutions successives et semblables dans les équations du groupe $(a)$, il vient celle

$$y^{x'} = y' \pm \Delta y' \pm \Delta y'' \pm \Delta y''' \ldots\ldots \pm \Delta y^{(x-1)'};$$

et substituant dans cette dernière équation les valeurs de $\Delta y'$, $\Delta y''\ldots\Delta y^{(x-1)'}$ déduites de l'équation (614), en y faisant successivement $x = 1, 2, \ldots (x-1)'$, on a

$$y^{x'} = y' \pm (x-1)\Delta y' + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\Delta^2 y'$$
$$\pm \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3}\Delta^3 y' + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2.3.4}\Delta^4 y'$$
$$\pm \text{etc.}\ldots\ldots (615);$$

donc dans toute série qui a ses différences d'un ordre quelconque constantes, on pourra parvenir à trouver immédiatement son terme général par le moyen de l'équation (615), et de là on déduira sans peine son terme sommatoire. En effet, le terme général (615) se composant alors d'une suite finie de puissances entières et positives de $x$, son intégrale sera donnée par les équations du groupe (579); or il est aisé de vérifier que le passage de $\Sigma x^m$ à $Sx^m$ se faisant en mettant dans la première de ces deux quantités $x+1$ à la place de $x$, il n'y aura d'autre changement dans les formules (579), et plus généralement dans celle (580), que relativement au second terme, qui de négatif deviendra positif. Ainsi généralement le terme sommatoire de la série $1^m$, $2^m$, $3^m$, $4^m$, ..$x^m$(*) est

(*) On sait que la différence de l'ordre $m$ de cette série est $Sx^m =$

$$Sx^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}\,\frac{m}{2.3}\,x^{m-1}$$
$$-\frac{1}{6}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4.5}\,x^{m-3} + \text{etc.}\ldots\ldots(616).$$

EXEMPLE. *Trouver le terme sommatoire de la série*

$$41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 61\ \text{etc.}\ldots(c),$$

*dont les quarante premiers termes sont tous des nombres premiers.*

Les différences premières de cette série forment la progression par difference $\div$ 2.4.6.8 etc., ayant pour raison 2; donc $y' = 41$, $\Delta y' = 2$, $\Delta^2 y' = 2$ et $\Delta^3 y' = 0$. Substituant ces valeurs dans la formule (615), on a $y^{x'} = 41 + 2(x-1) + (x-1)(x-2) = 41 + x(x-1)$; donc $S.y^{x'} = 41\,S.x^0 + S.x^2 - S.x$; et substituant les valeurs de $S.x^0$, $S.x^2$ et $S.x$ déduites de l'équation (616), en y faisant successivement $x = 0$, $x = 2$ et $x = 1$, on aura $S.y^{x'} = 41x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, ou faisant les réductions, il viendra

$$S.y^{x'} = \frac{x}{3}(122 + x^2)\ldots\ldots(d),$$

ce qui est complètement le terme sommatoire de la série proposée (*c*).

608. Si l'on ne veut avoir le terme sommatoire qu'à

---

constante; mais ce qui, du moins que je sache, n'était pas encore connu, c'est que l'expression générale de cette différence constante est

$$(m+1)^m - m^{m+1} + \frac{m(m-1)^{m+1}}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)^{m+1}}{2.3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)^{m+1}}{2.3.4}\ldots\ldots \pm 1 = 1.2.3.4\ldots m.$$

partir d'un terme déterminé, tel que le $n^{ième}$ par exemple, alors on ajoutera à la valeur de $S.y^x$ une constante qu'on déterminera, en faisant $S.y^{x'}=0$ lorsque $x=n-1$. Ainsi dans l'exemple précédent, si l'on ne veut avoir le terme sommatoire qu'à commencer du $n^{ième}$ terme, on écrira $Sy^{x'}=\frac{x}{3}(122+x^2)+\text{const}$, et faisant $Sy^{x'}=0$ lorsque $x=n-1$, on aura const. $=-\frac{n-1}{3}\times(123+n^2-2n)$, ce qui donnera complètement

$$S.y^{x'}=\frac{1}{3}[x(122+x^2)-(n-1)(123+n^2-2n)].$$

609. Mais le calcul des sommations de ces séries se simplifiera beaucoup, si nous trouvons directement l'expression du terme sommatoire, c'est ce qui ne présente aucune difficulté; car soit toujours

$$y',\ y'',\ y''',\ldots y^{x'}\ldots\ldots(a)$$

la série proposée, on aura conséquemment $Sy^{x'}=y'+y''+y'''\ldots+y^{x'}$, et substituant dans cette équation les valeurs de $y''$, $y'''$, ... $y^{x'}$ déduites de l'équation (615), en y faisant successivement $x=2$, $x=3$, ... $x=x$, on aura, toutes réductions faites, la formule

$$Sy^{x'}=xy'+\frac{x(x-1)}{2}\Delta y'+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^2y'$$
$$+\text{etc}\ldots\ldots(617).$$

Appliquant cette formule à la série (*c*) de l'article 606, pour laquelle nous avons vu qu'on avait $y'=41$, $\Delta y'=$ et $\Delta^2y'=2$, on aura $Sy^{x'}=41x+x(x-1)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3}=\frac{x}{3}[123+(x-1)(3+x-2)]$ $=\frac{x}{3}[123+x^2-1]=\frac{x}{3}(122+x^2)$, expression identique à celle (*d*) de l'article 607.

310. L'équation (581) se déduisant de celle ($d$) [art. 572], en faisant dans cette dernière équation $p=0$, et l'équation (582) se déduisant de celle ($d$) citée précédemment, en y faisant $p=\Delta x$, il s'ensuit d'après la formule (613), que le second membre de l'équation (581) est l'intégrale du terme général $x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)$ d'une suite telle que

$$a[a+\Delta x]\ldots[(a+\Delta x)+n\Delta x],(a+\Delta x)[(a+\Delta x)+\Delta x]$$
$$\ldots[(a+\Delta x)+n\Delta x],\ (a+2\Delta x)\ [(a+2\Delta x)+\Delta x]$$
$$\ldots[(a+2\Delta x)+n\Delta x]\ \text{etc.}\ldots\ldots(618),$$

et que le second membre de l'équation (582) est le terme sommatoire de la suite (618) : ainsi on a généralement

$$Sx(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)$$
$$=\frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]}{(n+2)\Delta x}+\text{const.}(a).$$

Pour déterminer la constante, j'observe que lorsque $x=a$ la série (618) se réduisant à son premier terme, sa somme se réduira aussi à ce premier terme; on aura donc en faisant $x=a$ dans le second membre de l'équation ($a$), celle

$$a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)$$
$$=\frac{a(a+\Delta x)(a+2\Delta x)\ldots[a+(n+1)\Delta x]}{(n+2)\Delta x}=\text{const.},$$

d'où l'on tire $\text{const.}=-\dfrac{(a-\Delta x)a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)}{(n+2)\Delta x}$;

ainsi on a complètement

$$Sx(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)$$
$$=\frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]-(a-\Delta x)a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)}{(n+2)\Delta x}\ldots(619).$$

EXEMPLE. *Sommer la série*

$$2.5.8,\ 5.8.11,\ 8.11.14,\ 11.14.17,\ 14.17.20,\ \text{etc.}\ldots(b).$$

Comparant cette suite avec celle (618), il vient $a=2$, $\Delta x=3$ et $n=2$ : substituant ces valeurs dans l'équation (619), on a

$$Sx(x+3)(x+6)=\frac{x(x+3)(x+6)(x+9)+1.2.5.8}{4.3};$$

ce qui est complètement le terme sommatoire de la série proposée ($b$).

611. Mettant la caractéristique S à la place de celle $\Sigma$ dans le premier membre de l'équation (583), et mettant $x+\Delta x$ à la place de $x$ dans le second membre de la même équation, on aura celle

$$S\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}=\text{const.}$$
$$-\frac{1}{n\Delta x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}\ldots(a).$$

qui est le terme sommatoire d'une série telle que

$$\frac{1}{a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)},$$
$$\frac{1}{(a+\Delta x)[(a+\Delta x)+\Delta x]\ldots[(a+\Delta x)+n\Delta x]},$$
$$\frac{1}{(a+2\Delta x)[(a+2\Delta x)+\Delta x]\ldots[(a+2\Delta x)+n\Delta x]}\text{ etc.}(620).$$

Or, pour déterminer la constante de l'équation ($a$), j'observe que pour $x=a$, la somme doit se réduire au premier terme de la série (620) ; on aura donc

$$\text{const.}=\frac{1}{a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)}$$
$$+\frac{1}{n\Delta x(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)}$$
$$=\frac{1}{n\Delta x a(a+\Delta x)(a+2\Delta x)\ldots(a+(n-1)\Delta x)},$$

ce qui donne complètement

$$S\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+n\Delta x)}$$
$$=\frac{1}{n\Delta x}\left[\frac{1}{a(a+\Delta x)\ldots\ldots[a+(n-1)\Delta x]}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}\right]\ldots\ldots(621).$$

Il est aisé de voir d'après cette équation que la limite transcendante [*voyez* le renvoi de la page 220, tome I] des séries de la forme (620), est la quantité

$$\frac{1}{n\Delta x(a+\Delta x)\ldots[a+(n-1)\Delta x]},$$

à laquelle se réduit le second membre de l'équation (621), lorsqu'on fait $x=\infty$. On trouvera de cette manière en faisant $a=1$, $\Delta x=1$ et $n$ successivement $=1, 2, 3$, etc., que les limites transcendantes des séries

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5} \text{ etc.}\\ \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{2.3.4}, \frac{1}{3.4.5}, \frac{1}{4.5.6} \text{ etc.}\\ \frac{1}{1.2.3.4}, \frac{1}{2.3.4.5}, \frac{1}{3.4.5.6}, \frac{1}{4.5.6.7} \text{ etc.}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\text{sont}\left\{\begin{array}{l}1\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{18}\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

612. En appliquant aux équations (589) et (590) le théorème (613) [art. 606], on aura les équations

$$S.\sin x=\text{const.}-\frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}\ldots\ldots\ldots\ldots(a),$$

$$S.\cos x=\text{const.}+\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}\ldots\ldots\ldots\ldots(b),$$

qui sont les termes sommatoires des séries respectives

$\sin a, \sin(a+\Delta x), \sin(a+2\Delta x), \sin(a+3\Delta x)$ etc. . . . (622)

$\cos a, \cos(a+\Delta x), \cos(a+2\Delta x), \cos(a+3\Delta x)$ etc. . . . (623).

Mais pour $x=a$, on a $S.\sin x = \sin a$ et $S\cos x = \cos a$; donc faisant $x=a$, les équations ($a$) et ($b$) se réduisent respectivement à celles

$$\text{const.} = \frac{\cos(a-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x} \ldots\ldots (c),$$

et $$\text{const.} = -\frac{\sin(a-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x} \ldots\ldots (d);$$

on aura donc, toutes réductions faites,

$$S.\sin x = \frac{\sin\left(\frac{a+x}{2}\right)\sin\left[\frac{x-a}{2}+\frac{1}{2}\Delta x\right]}{\sin\frac{1}{2}\Delta x} \ldots (624)$$

$$S.\cos x = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left[\frac{x-a}{2}+\frac{1}{2}\Delta x\right]}{\sin\frac{1}{2}\Delta x} \ldots (625).$$

ce qui sont les termes sommatoires complets des séries respectives (622) et (623).

Si l'on fait $\Delta x = a$, alors les séries (622) et (623) se changent respectivement en celles

$\sin a, \sin 2a, \sin 3a, \sin 4a \ldots \sin xa \ldots\ldots (626)$,

$\cos a, \cos 2a, \cos 3a, \cos 4a \ldots \cos xa \ldots\ldots (627)$;

ainsi le terme sommatoire de la série (626) est

$$S.\sin xa = \frac{\sin\left[\frac{a(x+1)}{2}\right]\sin\left(\frac{xa}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}a} \ldots (628),$$

et celui de la série (627) est

$$S.\cos xa = \frac{\cos\left[\frac{a(x+1)}{2}\right]\sin\left(\frac{xa}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}a} \ldots (629).$$

Dans ce même cas de $\Delta x = a$, l'équation $(c)$ se réduit à celle

$$\text{const.} = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} a \ldots\ldots (e),$$

et le dernier terme du second membre de l'équation $(a)$ devient

$$\frac{\cos\left(xa + \frac{1}{2} a\right)}{2 \sin \frac{1}{2} a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos\left(xa + \frac{1}{2} a\right)}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos xa \cos \frac{1}{2} a - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin xa}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{\sin a \cos xa - \sin xa + \cos a \sin xa}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{\sin (x+1) a - \sin xa}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a};$$

donc $\quad S \sin xa = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a - \dfrac{\sin (x+1) a - \sin xa}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a}$;

or, si l'on fait $x = \infty$, on a $\sin (x+1) a = \sin \left[ x \left(1 + \frac{1}{x}\right) a \right]$ $= \sin xa$, donc $S \sin \infty a = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a$; et faisant $a = 100°$, il vient $S \sin \infty 100° = \frac{1}{2}$ : mais dans le cas de $\Delta x = a$ et de $a = 100°$, tous les termes de la série (622) étant ajoutés, donnent pour somme $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1$ etc. ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini $= S \sin \infty 50°$ $= \frac{1}{2}$, ce qui est conforme à ce qui est démontré en algèbre, lorsqu'on développe en série la fonction $\dfrac{1}{1+1}$.

C'est ainsi que bien souvent on rencontre dans les parties les plus élémentaires et les plus élevées des mathématiques, des points de contacts qui sont comme des vérificateurs de toute l'analyse qui a reproduit à une grande distance dans le cours de la science, une vérité que les premiers élémens avaient déjà fait connaître.

De même on trouvera d'après les équations ($b$) et ($d$), que faisant $\Delta x = a$ et $x = \infty$, on a $S \cos \infty a = -\frac{1}{2}$; donc en faisant $a = 100°$, ou plus simplement, $= 200°$, on aura en changeant les signes des deux membres, la même équation que précédemment $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini $= \frac{1}{2}$. Nous observerons de plus, que le second membre de l'équation $S \cos \infty a = -\frac{1}{2}$ étant constant, on pourra, en donnant différentes valeurs à l'arc $a$ dans la somme $\cos a + \cos 2a + \cos 3a +$ etc. à l'infini, trouver que $-\frac{1}{2}$ est la limite transcendante des sommes respectives d'autant de séries numériques, qu'on aura donné de valeurs différentes à l'arc $a$.

613. Sachant sommer les séries des sinus et cosinus d'arcs qui croissent comme la suite naturelle des nombres, on saura aussi sommer les suites des puissances entières et positives des sinus et cosinus des mêmes arcs; telles sont généralement les séries

$$\sin^m a,\ \sin^m 2a,\ \sin^m 3a,\ \sin^m 4a \text{ etc.} \ldots (630)$$
$$\cos^m a,\ \cos^m 2a,\ \cos^m 3a,\ \cos^m 4a \text{ etc.} \ldots (631).$$

En effet, écrivant les séries résultantes des développemens de chacun des termes de la suite (630) [éq. ($a$) ou ($b$), art. 281, suivant que $m$ est un nombre pair ou impair] les unes sous les autres, de manière que les coefficiens constans qui, évidemment, sont les mêmes pour tous les développemens, se correspondent dans la même colonne verticale; chacune de ces colonnes formera une suite telle que $\cos pa$, $\cos 2pa$, $\cos 3pa$ etc., ou $\sin pa$, $\sin 2pa$, $\sin 3pa$ etc., suivant que $m$ est un nombre pair ou impair, qu'on sommera aisément, en substituant $pa$ à la place de $a$ dans la formule (629) ou celle (628), suivant que $m$ est pair ou impair: ainsi on aura les termes sommatoires

de toutes les séries qui entrent dans le développement de la proposée (630). De plus, si $m$ est un nombre pair, la dernière colonne verticale étant composée de simples constantes dont je représente la somme par Q, il est clair qu'outre les termes sommatoires de la forme (629), il y aura encore celui $Qx$. Par exemple, soit proposé de sommer la série

$$\sin^4 a,\ \sin^4 2a,\ \sin^4 3a,\ \sin^4 4a \text{ etc.....}(a).$$

Développant chacun des termes de cette suite, et écrivant ces développemens comme nous l'avons dit ci-dessus, on aura

$$\sin^4 a = \tfrac{1}{8}\cos 4a - \tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{3}{8}$$
$$\sin^4 2a = \tfrac{1}{8}\cos 8a - \tfrac{1}{2}\cos 4a + \tfrac{3}{8}$$
$$\sin^4 3a = \tfrac{1}{8}\cos 12a - \tfrac{1}{2}\cos 6a + \tfrac{3}{8}$$
$$\text{etc.}$$

Donc $S\sin^4 xa = \frac{1}{8} S\cos x(4a) - \frac{1}{2} S\cos x(2a) + \frac{3}{8}x$; et substituant successivement $4a$ et $2a$ à la place de $a$ dans la formule (629), on aura

$$S\sin^4 xa = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\,\frac{\cos[2(x+1)a]\sin(2xa)}{\sin 2a} - \frac{\cos(x+1)a\sin xa}{\sin a} + \frac{3x}{4}\right].$$

Le lecteur pourra s'exercer à sommer la série dont le terme général est $\sin^3 xa$; enfin nous lui laissons le soin de trouver la méthode générale de sommer la série (631), ce qui n'a aucune difficulté d'après ce que nous venons de dire relativement à la sommation de la série (630).

Il est à propos d'observer que si $m$ est un nombre pair, la série (630) n'a pas de limite transcendante, puisqu'alors pour $x = \infty$, on a le terme $Qx$ qui entre

dans $S \sin^m xa$ égal à l'infini. Mais si $m$ est un nombre impair, alors tous les termes de la valeur de $S \sin^m xa$ étant de la forme de celui (628), ils auront tous une limite transcendante [art. 612], et la somme de toutes ces limites sera celle de la série (630).

614. Pour sommer les séries qui ont respectivement les termes généraux $z^n \sin^m z$ et $z^n \cos^m z$, il faudra developper $\sin^m z$ et $\cos^m z$ en suites des premières puissances des sinus ou cosinus d'arcs multiples de celui $z$, ce qui réduira les sommations qu'on doit faire à celles de quantités de la forme $z^n \sin pz$ et $z^n \cos pz$, lesquelles se transforment respectivement en celles $\frac{1}{p^n} x^n \sin x$ et $\frac{1}{p^n} x^n \cos x$, lorsqu'on fait $pz = x$; or, nous savons intégrer et par conséquent sommer les formules $x^n \sin x$ et $x^n \cos x$ [art. 581]; donc nous pourrons toujours intégrer $z^n \sin^m z$ et $z^n \cos^m z$.

615. Représentant toujours par $fx$ le terme général des séries récurrentes composées, et dont l'ajoutée est exponentielle, on a $S.fx = \Sigma f(x+1) + c^{n'}$, en représentant par $c^{n'}$ une constante arbitraire ; donc remontant à la formule (606), et effectuant les intégrations, on aura complètement l'équation

$$S.fx = \frac{h^{x+1}}{(h-1)(h^n \ldots + Ch^2 + Bh + A)} + ca^{x+1}$$
$$+ c'a'^{x+1} \ldots + c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^{x+1} + c^{n'} \ldots (632),$$

dans laquelle il y a $n+1$ constantes, qu'on déterminera en faisant successivement $x = 1, 2, 3 \ldots n$, et pour chacune de ces valeurs particulières de $x$, mettant à la place de $S.fx$, la somme effectuée d'un nombre de termes successifs de la série, à commencer du premier, égal à la valeur de $x$.

EXEMPLE. *Sommer la série récurrente*

$$1,\ 0,\ 10,\ 6,\ 118,\ 174,\ 1614 \text{ etc.}\ldots\ldots(a),$$

*dont la loi est exprimée par l'équation*

$$f(x+2)=4^x-f(x+1)+6fx\ldots.(b).$$

Comparant cette équation avec celle (595), on a $A=-6$, $B=1$, $n=2$, $X(=h^x)=4^x$, d'où $h=4$. Ainsi l'auxiliaire de l'équation $(b)$ est $a^2+a-6=0$, d'où $a=2$ et $a'=-3$. Mettant la valeur de $h(=4)$ dans l'auxiliaire, son premier membre devient 14, et multipliant ce nombre par $h-1=3$, on a 42 ; ainsi l'équation (632) deviendra

$$S.fx=\frac{2.h^x}{21}+c.2^{x+1}\pm c'.3^{x+1}+c''\ldots\ldots\ldots(c).$$

Faisant successivement dans cette équation $x=1$, 2 et 3, ce qui donne pour les valeurs respectives de $S.fx$ les nombres 1, $1+0=1$ et $1+0+10=11$, on a les trois équations $1=\frac{8}{21}+4c+9c'+c''$, $1=\frac{32}{21}+8c-27c'+c''$ et $11=\frac{128}{21}+16c+81c'+c''$, d'où l'on tire $c=0,1$ ; $c'=\frac{3}{70}$ et $c''=-\frac{1}{6}$ : substituant ces valeurs dans l'équation $(c)$, il vient, toutes réductions faites

$$S.fx=\frac{20.4^x+21.2^{x+1}\pm 27.3^x-35}{210},$$

le signe supérieur si $x$ est un nombre pair, l'inférieur dans le cas contraire.

616. Si l'auxiliaire de l'équation qui exprime la loi des séries récurrentes dont nous venons de parler, a une ou plusieurs racines égales à l'unité ; alors on aura dans l'équation (632), un terme de la forme $c(x+1)$ : en effet, le terme général de la série ayant

autant de termes entièrement constans $c$, $c'$...qu'il y a de racines de l'auxiliaire égales à l'unité, la somme de toutes ces constantes arbitraires pourra être représentée par la seule lettre $c$ dont l'intégrale est $c\Sigma x^0 = cx$; et passant au terme sommatoire, ce dernier terme deviendra $c(x+1)$. Telle est, par exemple, la série 1, 1, 4, 19, 76 etc., dont la loi est exprimée par l'équation $f(x+2) = 3^x + 3f(x+1) - 2fx$, qui a pour auxiliaire l'équation $a^2 - 3a + 2 = 0$ de laquelle on tire $a' = 2$ et $a = 1$; ainsi par les substitutions convenables, l'équation (632) se présente sous la forme $S.fx = \frac{3^{x+1}}{4} + c + c'2^{x+1} + c''$; mais qu'il faut écrire sous celle

$$S.fx = \frac{3^{x+1}}{4} + c(x+1) + c'.2^{x+1} + c'';$$

et déterminant à l'ordinaire les constantes $c$, $c'$, $c''$, on a complètement

$$S.fx = \frac{3^{x+1}}{4} + \frac{5}{2}(x+1) - 3.2^x - \frac{1}{4}.$$

617. Si l'ajouté X est une quantité constante H, alors le premier terme de la valeur de $fx$ dans l'équation (606), se réduisant à la quantité $\frac{H}{1...+C+B+A}$ (art 599) dont l'intégrale est $\frac{Hx}{1...+C+B+A}$, il n'y aura d'autre changement à faire dans la formule (632), que de substituer au premier terme de la valeur de $S.fx$ la quantité $\frac{H(x+1)}{1...+C+B+A}$.

618. Un simple coup d'œil jeté sur le terme général (603) des suites récurrentes simples, fait tout de suite voir que le terme sommatoire de ces suites est

$$S.fx = ca^{x+1} + c'a'^{x+1} + c''a''^{x+1} \ldots + c^{(n-1)'}[a^{(n-1)'}]^x + c^{n'} \ldots\ldots\ldots (633).$$

Ainsi le terme sommatoire de la série récurrente simple (*e*) [art. 592] est $S.fx = c(-1)^{x+1} + c'.2^{x+1} + c'' = \mp c + c'2^{x+1} + c''$, le signe négatif si $x$ est pair, le positif dans le cas contraire. Faisant successivement $x = 1$, 2 et 3, ce qui donne respectivement $S.fx = 1$, $S.fx = 1 + 0 = 1$ et $S.fx = 1 + 0 + 2 = 3$, on a les trois équations $1 = c + c'.4 + c''$, $1 = -c + 8c' + c''$ et $3 = c + 16c' + c''$, d'où $c = \frac{1}{3}$, $c' = \frac{1}{6}$ et $c'' = 0$; ainsi on a complètement $S.fx = \mp \frac{1}{3} + \frac{1}{6} 2^{x+1}$.

619. Si l'ajoutée X étant égale à la quantité exponentielle $h^2$, on a $h =$ à une des racines de l'auxiliaire, alors il est clair que la formule (632) ne pourra plus servir, puisqu'elle donnera $S.fx = \infty$; il faudra donc alors recourir à la formule (598) pour avoir le terme général $fx$, en observant que X étant $= h^x$, et $a^{(n-1)'}$ pouvant toujours représenter la racine de l'auxiliaire que nous supposons $= h$, on aura

$$\Sigma \frac{X}{[a^{(n-1)'}]^x} = \Sigma \frac{h^x}{h^x} = \Sigma 1 = \Sigma x^0 = x + c;$$

ainsi dans les intégrations successives, pour avoir $fx$, on aura à intégrer des quantités de la forme $xa^x$ dont nous avons donné l'intégrale à l'article 578.

Ayant la valeur de $fx$, on intégrera, et on mettra $x + 1$ à la place de $x$ dans l'intégrale pour avoir le terme sommatoire.

# CHAPITRE V.

## *Usage du Calcul intégral aux différentielles, ou calcul intégral proprement dit, dans le Calcul intégral aux différences, et dans le calcul des sommations.*

620. L'INTÉGRATION des équations différentielles peut mener immédiatement à la limite transcendante des sommes des séries qui convergent sans cesse, sans pouvoir jamais atteindre à un terme nul, et qu'on pourrait par cette raison appeler *séries asymptotiques*. En effet, si la série est numérique, il n'y aura qu'à égaler sa somme à une variable $y$, ensuite y introduire une variable $x$ qui la rende à son état primitif lorsqu'on fait $x = 1$; cela fait, si on peut parvenir en différentiant successivement l'équation résultante par rapport à $y$ et $x$, en considérant $dx$ comme constante à une formule différentielle d'un nombre limité de termes, telle que $d^n y = F(x, dx, dx^2 \ldots dx^n)$, dans laquelle sont comprises les constantes déterminées de la série proposée, alors il n'y aura qu'à intégrer cette dernière équation, déterminer convenablement les $n$ constantes arbitraires, ce qui donnera complètement une équation primitive $y = F'(x)$, dans laquelle $F'(x)$ représente une fonction limitée de $x$ et des constantes de la série : ainsi faisant dans cette équation $x = 1$, on aura la somme de la série proposée poussée à l'infini; c'est-à-dire sa limite transcendante.

La même méthode pourra servir à trouver la limite transcendante d'une formule variable de la nature des séries asymptotiques. En voici des exemples.

1°. *Trouver la limite transcendante de la somme de la série*

$$\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n)},\ \frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)},$$
$$\frac{1}{(a+2)(a+3)\ldots(a+n+2)}\ \text{etc.}\ldots(a).$$

Faisons $y =$ à la somme de cette série, et multiplions chaque terme de la suite par $x$ élevée à une puissance marquée par le dernier facteur du terme correspondant, ce qui donnera l'équation

$$y = \frac{x^{a+n}}{a(a+1)\ldots(a+n)} + \frac{x^{a+n+1}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)};$$

laquelle étant différentiée $n+1$ fois de suite, donne l'équation différentielle du $(n+1)^{me}$ ordre

$$d^n y = (x^{a-1} + x^a + x^{a+1} + x^{a+2}\ \text{etc. à l'infini})dx^n,$$

ou faisant attention que la série entre parenthèses est le développement de $\frac{x^{a-1}}{1-x}$, on aura l'équation

$$d^n y = \frac{x^{a-1}}{1-x}\, dx^n,$$

qui est de la forme de celle (401), [art. 409], et dont conséquemment l'intégrale est donnée par la méthode enseignee à l'article 409. Effectuant les calculs, et faisant dans le résultat $x = 1$, on trouvera complètement

$$y = \frac{1}{na(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé à l'article 611.

II°. *On demande la limite transcendante de la formule*

$$1 - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} - \frac{x^{3n}}{1.2.3\ldots 3n}$$
$$+ \text{ etc.}\ldots\ldots(a),$$

*dans laquelle* n *représente un nombre entier et positif.*

Faisant la formule $(a) = y$, et différentiant $n$ fois de suite, en prenant $dx$ constante, on parvient à l'équation $d^n y = y dx^n$ qui est de la forme de celle (440), et dont l'auxiliaire $m^n - 1 = 0$, peut toujours se résoudre complètement (note 1 de la première section du Calcul intégral, tome I, page 467); ainsi on pourra toujours trouver par le moyen de la formule (441), la valeur demandée de $y$. Soit, par exemple, supposé que $n = 2$, c'est-à-dire, qu'on a à trouver la limite transcendante de la formule

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\ldots\ldots(b).$$

Egalant cette formule à $y$, et différentiant deux fois de suite, on aura l'équation linéaire du second ordre $d^2y = y dx^2$, qui a pour auxiliaire $m^2 - 1 = 0$, d'où $m = 1$ et $m' = -1$, ainsi la formule (441) donne

$$y = ce^x + c'e^{-x}\ldots\ldots(c).$$

Afin de déterminer les constantes $c$ et $c'$, j'observe que pour $x = 0$, la série proposée $(b)$ donne $y = 1$, et que pour $x = 1$ la meme formule donne

$$y = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

ce qui est la valeur du cosinus de l'arc du cercle égal au rayon; donc représentant cet arc qui est $= 63°,661977$ par $a$, on aura pour $x = 1$, $y$ qui sera $= a$; ainsi substituant

tuant successivement ces valeurs $x=0$, $y=1$, et $x=1$, $y=a$ dans l'équation $(c)$, on aura les deux équations suivantes $1=c+c'$ et $a=ce+c'e^{-1}$, d'où on tire $c=\frac{ae-1}{e^2-1}$ et $c'=\frac{e(e-a)}{e^2-1}$; enfin substituant ces valeurs dans l'équation $(c)$, on aura

$$y=\frac{(ae-1)e^x+e^{1-x}(e-a)}{e^2-1},$$

ce qui est complètement la limite transcendante de la formule $(b)$.

621. Représentant par $y$ une fonction de $x$, nous avons déterminé par le seul secours du calcul aux différences, la valeur de $\Sigma y$ dans un assez grand nombre de cas, mais cependant trop petit, lorsqu'on considère qu'il reste encore un bien plus grand nombre de cas où la méthode précédente est insuffisante. Cette observation, qu'il était aisé de faire, mais qui présentait des inconvéniens auxquels il n'était pas aussi aisé de remédier, a donné l'idée aux analystes de se servir du Calcul différentiel et du Calcul intégral, concurremment avec le calcul intégral aux différences, pour trouver la valeur de $\Sigma y$ dépendante de l'intégration de fonctions différentielles dont l'usage, beaucoup plus étendu que celui de l'intégration des fonctions aux seules différences, rend aussi l'expression de $\Sigma y$ beaucoup plus générale. Euler est parvenu à ce but d'une manière très-ingénieuse, que nous allons faire connaître.

Soit $z$ une fonction de $x$, ce qui donnera, d'après le théorème de Tailor, [form. (39), art. 38].

$$\Delta z=\frac{dz}{dx}\Delta x+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3}+\text{etc.}\ldots(a),$$

et intégrant par différence cette équation, il vient

$$z = \Delta x \Sigma \frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \Sigma \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{2.3} \Sigma \frac{d^3 z}{dx^3} + \text{etc.....}(b).$$

Faisant actuellement $\frac{dz}{dx} = y$, d'où $z = \int y dx$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ etc., l'équation ($b$) deviendra

$$\int y dx = \Delta x \Sigma y + \frac{\Delta x^2}{2} \Sigma \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^3}{2.3} \Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} + \text{etc.},$$

d'où on tire,

$$\Sigma y = \frac{1}{\Delta x} \int y dx - \frac{\Delta x}{2} \Sigma \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2.3} \Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} - \text{etc.....}(c).$$

Mettant dans cette équation $\frac{dy}{dx}$ à la place de $y$, elle donnera

$$\Sigma \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\Delta x} y - \frac{\Delta x}{2} \Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{2.3} \Sigma \frac{d^3 y}{dx^3} - \text{etc.....}(d).$$

Faisant de même pour cette dernière équation, et successivement de même pour les suivantes, on aura

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta x}{2} \Sigma \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\Delta x^2}{2.3} \Sigma \frac{d^4 y}{dx^4} - \text{etc.}$$

$$\Sigma \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\Delta x}{2} \Sigma \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\Delta x^2}{2.3} \Sigma \frac{d^5 y}{dx^5} - \text{etc.}$$

et ainsi de suite, en prolongeant indéfiniment ces équations; on aura donc par des substitutions successives depuis l'équation ($c$), jusqu'à une autre équation quelconque prise indéfiniment dans les suivantes, une équation de la forme

$$\Sigma y = \frac{1}{\Delta x} \int y dx + Ay + B\Delta x \frac{dy}{dx} + C\Delta x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$+ D\Delta x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + \text{etc....}(634);$$

dans laquelle A, B, C, D .... représentent les coefficiens numériques, lesquels sont évidemment, indépendans de la valeur de $y$, et qui par conséquent resteront les mêmes, quelque valeur qu'on suppose à $y$ en fonctions de $x$. Cela posé, voici comment Euler est parvenu à obtenir les valeurs numériques de A, B, C etc.; il a fait $y = e^x$, d'où $\Sigma y = \frac{e^x}{e^{\Delta x} - 1}$ [équat. (584)], $\int y dx = e^x$, et généralement $\frac{d^n y}{dx^n} = e^x$. Substituant ces valeurs dans l'équation (634) et divisant par $e^x$, il vient

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} = \frac{1}{\Delta x} + A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + \text{etc.....}(e).$$

Or, il est aisé de voir que le développement de $(e^{\Delta x} - 1)^{-1}$ ou $\left(\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{etc.}\right)^{-1}$, par rapport aux puissances ascendantes de $\Delta x$ est de la forme de la série $(e)$; donc les coefficiens de la formule (634) ne sont autre chose que ceux du développement de $(e^{\Delta x} - 1)^{-1}$. Cependant ce développement présente quelques longueurs de calcul que je vais éviter, en faisant voir que nous avons déjà les valeurs numériques de A, B, C... toutes calculées, et pour cela, au lieu de faire, comme Euler, $y = e^x$, je vais faire $y = x^m$, $m$ représentant un nombre quelconque. Cela posé, on aura

$$\int y dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

et généralement

$$\frac{d^p y}{dx^p} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)x^{m-p}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (634), on aura

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} + Ax^m + B\Delta x m x^{m-1}$$
$$+ C\Delta x^2 m(m-1)x^{m-2} + D\Delta x^3 m(m-1)(m-2)x^{m-3} + \text{etc.};$$

et comparant cette équation avec celle (580) il viendra

$$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2.2.3},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{6}.\frac{1}{2.3.4.5},\ E = 0 \text{ etc.}$$

Enfin substituant ces valeurs dans l'équation (634), on aura

$$\Sigma y = \frac{1}{\Delta x}\int y dx - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{2.3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{6}\frac{\Delta x^3}{2.3.4.5}\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\Delta x^5}{2.3\ldots7}\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{3}{10}\frac{\Delta x^7}{2.3\ldots9}\frac{d^7y}{dx^7}$$
$$+ \frac{5}{6}\frac{\Delta x^9}{2.3\ldots11}\frac{d^9y}{dx^9} - \frac{691}{210}\frac{\Delta x^{11}}{2.3\ldots13}\frac{d^{11}y}{dx^{11}}$$
$$+ \frac{35}{2}\frac{\Delta x^{13}}{2.3\ldots13}\frac{d^{13}y}{dx^{13}} - \frac{3617}{30}\frac{\Delta x^{15}}{2.3\ldots17}\frac{d^{15}y}{dx^{15}}$$
$$+ \frac{43867}{42}\frac{\Delta x^{17}}{2.3\ldots19}\frac{d^{17}y}{dx^{17}} - \frac{1222277}{110}\frac{\Delta x^{19}}{2.3\ldots21}\frac{d^{19}y}{dx^{19}}$$
$$+ \text{etc.} + \text{const.}\ldots\ldots(635).$$

Cette série sera finie si la fonction $y$ de $x$ ne se compose que de puissances entières et positives de $x$, puisqu'alors $p$ étant je suppose un nombre entier positif, et la plus haute puissance de $x$ dans la valeur de $y$, on aura $\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = 0$ : dans tous les autres cas la série est interminable.

Si l'on fait $y = e^x$ dans la formule précédente, on aura

$$\frac{1}{e^{\Delta x}-1}=\frac{1}{\Delta x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{2.3}-\frac{1}{6}\frac{\Delta x^3}{2.3.4.5}+\frac{1}{6}\frac{\Delta x^5}{2.3\ldots7}$$
$$-\frac{3}{10}\frac{\Delta x^7}{2.3\ldots9}+\text{etc}\ldots(636).$$

Ainsi par l'heureux choix que nous avons fait de l'équation $y=x^m$ à la place de celle $y=e^x$ pour avoir les valeurs numériques des coefficiens A, B... de l'équation (634), nous avons obtenu sans calcul la vraie valeur de $\Sigma y$ avec un nombre plus que suffisant de termes dans l'usage ordinaire, et celle de $(e^{\Delta x}-1)^{-1}$ avec un même nombre de termes. Au reste si ce nombre de coefficiens numériques, déjà calculés, ne suffisait pas, on pourrait obtenir les suivans par le moyen des formules du groupe d'équations (579) de l'article 571.

622. Si $y$ représente le terme général $fx$ d'une série, il faudra, pour avoir le terme sommatoire, mettre dans l'expression de $\Sigma y$, obtenue par le moyen de l'équation (635), la quantité $x+\Delta x$ à la place de $x$.

EXEMPLE. *Sommer la suite* 41, 43, 47, 53, etc. *dont le terme général est* $y=41+x(x-1)$ *en prenant* $\Delta x=1$.

Nous avons $\int y dx=41x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$, $\frac{dy}{dx}=2x-1$, et $\frac{ddy}{dx^2}=2$. Substituant ces valeurs dans l'équation (635), il vient $\Sigma y=41x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{41}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$ $+\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+$ const. Réduisant et comprenant dans la constante arbitraire, la somme des trois fractions constantes, on a $\Sigma y=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{125}{3}x+$ const. ;

donc $S.y = \frac{(x+1)^3}{3} - (x+1)^2 + \frac{125}{3}x + \text{const.}$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{122}{3}x + \text{const.}$ Mais lorsque $x = 1$, la série proposée donne $S.y = 41$; donc const. $= 41 - 41 = 0$; ainsi on a complètement, $Sy = \frac{x}{3}(122 + x^2)$, ce qui est le même résultat que celui trouvé à l'article (607), où le terme général était représenté par $y^{x'}$.

623. L'intégration par différence des fonctions variables, et de là la sommation des suites, peut quelquefois s'opérer d'une manière plus simple par les méthodes enseignées dans les chapitres précédens; mais comme nous l'avons déjà dit, on sera obligé le plus souvent, de recourir dans ces intégrations et sommations, à la formule (635); nous allons même finir cet ouvrage par l'examen d'un cas où il nous paraît impossible d'obtenir la sommation avec une approximation suffisante, par une formule d'un petit nombre de termes, sans le secours de la formule (635). En effet, prenant pour simplifier $\Delta x = 1$, la formule (591), dans laquelle nous mettrons $x + 1$ à la place de $x$ pour avoir $S.lx$, ne peut jamais nous donner que $S.lx = l[x(x-1)(x-2\ldots1]$, ou $S.lx = l2 + l3 + l4 \ldots + lx$, ce qui est l'addition toute pure de tous les termes de la série qu'on veut sommer.

Mais si nous nous servons de la formule (635), alors faisant $y = lx$, nous aurons $\int y dx = \int dx lx = xlx - x$ [équat. ($a$), art. 260], $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, et généralement l'ordre $n$ de différentiation étant impair, ce qui a toujours lieu dans l'équation (635), on a $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{2.3.4\ldots n-1}{x^n}$

[form. (37), art 36]. Substituant ces valeurs dans l'équation (635), il vient

$$\Sigma lx = xlx - x - \frac{1}{2}lx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3.x} - \text{etc.} + \text{const.}$$

Mais $\Sigma lx$ étant la somme des $x-1$ premiers termes de la suite $l1$, $l2$, $l3$,... $l(x-1)$, $lx$; et $S.lx$ étant la somme des $x$ premiers termes de la même suite, on a $Slx = \Sigma lx + lx$; donc

$$Slx = xlx + \frac{1}{2}lx - x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2.3.x} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{2.3.4.5x^3}$$
$$+ \text{etc.} + \text{const.}\ldots\ldots\ldots(a).$$

624. Cette valeur de $S.lx$ finissant par diverger lorsqu'on fait $x=1$, on ne peut déterminer d'après cette hypothèse la constante arbitraire; enfin la détermination de cette constante présente des difficultés qui ne pouvaient être vaincues que par un géomètre tel que Euler. Voici comment cet homme célèbre y est parvenu; il est parti de ce beau théorème de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{ etc.}}\ldots\ldots(637),$$

que j'ai démontré dans mes Mélanges mathématiques par la simple analyse algébrique, en la réduisant à une expression beaucoup plus simple, et qui se démontre aussi par les intégrales prises entre des limites, de la manière suivante.

Si l'on $a=1$ fait, dans la formule (151) (art. 220) on aura pour $x=0$ l'intégrale $\int\frac{x^{2q}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{const.}$; et si l'on fait $x=1$, on aura $\int\frac{x^{2q}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots 2q-1}{1.2.3\ldots q.2^q}\cdot\frac{\pi}{2}$ $+$ const.; d'où on conclura qu'entre les limites $x=0$

et $x=1$, on a

$$\int\frac{x^{2q}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{1.2.3\ldots\ldots q.2^q}.\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2q}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots(a).$$

De même faisant dans la formule (153) $a=1$ et $b=1$, on trouvera qu'entre les limites de $x=0$ et $x=1$, on a

$$\int\frac{x^{2q+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6\ldots 2q}{1.3.5\ldots(2q+1)}\ldots\ldots(b),$$

et divisant l'équation $(b)$ par celle $(a)$, il vient

$$\frac{\int\frac{x^{q\left(2+\frac{1}{q}\right)}dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int\frac{x^{2q}dx}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2q.2q}{1.3.3.5.5.7.7\ldots(2q-1)(2q-1)(2q+1)}.\frac{2}{\pi}.$$

Mais le numérateur du premier membre de cette équation devient égal à son dénominateur lorsque $q=\frac{1}{0}$; donc dans ce cas là, mettant l'unité dans le premier membre, multipliant l'équation résultante par $\frac{\pi}{2}$, et prenant les numérateur et dénominateur du second membre avec un nombre illimité de facteurs, puisque d'après l'hypothèse de $q=\infty$, ce nombre de facteurs est interminable, on a l'équation que nous voulions démontrer.

625. Cela posé, passant des nombres aux logarithmes, l'équation (637) se changera en celle

$$\left.\begin{array}{l} l\pi-l2=2l2+2l4+2l6+2l8\ldots+2l(2x-2)+2l2x \\ -l1-2l3-2l5-2l7\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1)\end{array}\right\}(a),$$

dans laquelle il faut bien faire attention que $2l2x$ et $2l(2x-1)$ sont respectivement les termes généraux de la série positive et de la série négative, et non les derniers termes de ces séries qui sont interminables; c'est ce qui aura de même lieu dans les séries suivantes.

Actuellement nous observerons que prenant $x=\infty$, la formule $(a)$ de l'article 623 donne

$$S.lx \text{ ou } l1+l2+l3+l4\ldots+lx=(x+\tfrac{1}{2})lx-x + \text{const.}\ldots\ldots(b),$$

et mettant $2x$ à la place de $x$, il vient

$$l1+l2+l3+l4\ldots+l2x=(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x+\text{const.}\ldots(c).$$

Ajoutant à l'équation $(b)$ celle $l2+l2+l2+l2\ldots=xl2$, on a

$$l2+l4+l6+l8\ldots+l2x=(x+\tfrac{1}{2})lx-x+xl2 + \text{const.}\ldots\ldots\ldots(d).$$

De l'équation $(c)$ retranchant celle $(d)$, et faisant attention que $(2x+\frac{1}{2})l2x=(2x+\frac{1}{2})lx+(2x+\frac{1}{2})l2$, on a, toutes réductions faites

$$l1+l3+l5+l7\ldots+l(2x-1)=xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x\ldots(e):$$

enfin doublant l'équation $(d)$, passant un des deux $l2x$ dans le second membre, de ce double de $(d)$ retranchant le double de l'équation $(e)$, et faisant la réduction, on a

$$\left.\begin{array}{l} 2l2+2l4+2l6+2l8\ldots+2l(x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l5-2l7\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{array}\right\}=2\text{const.}-2l2.$$

Mais le premier membre de cette équation est égal à $l\pi-l2$, on a donc $2\text{ const.}=l\pi+l2$, ou $\text{const.}=\frac{1}{2}l2\pi$. Substituant cette valeur dans l'équation $(a)$

de l'article (623), on a complètement

$$S.lx = xlx + \frac{1}{2}lx - x + \frac{1}{2}\frac{1}{2.3.x} - \frac{1}{6}\frac{1}{3.4.5.x^3}$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{2}l2\pi.$$

Par le moyen de cette formule on trouve que représentant par log. les logarithmes tabulaires, c'est-à-dire dans le système qui a pour base 10, on a log 1 + log 2 + log 3 ... + log 1000 ou log[1.2.3...1000] = 2567,6046442221328; ainsi le produit de 1.2.3...100, se compose de 2568 chiffres, et il est aisé de voir par le moyen des tables, que le nombre en question est compris entre 4023872 suivi de 2561 zéros et 4023873 suivi du même nombre de zéros.

# APPENDICE.

Dans les applications de la théorie des quadratures [art. 532, chap. III, sect. V], nous avons oublié qu'à la page 217 du tome Ier, nous annoncions que dans ce Calcul Intégral nous donnerions la quadrature de la lemnicaste, fig. 11 du Calcul Différentiel. Nous allons réparer cette omission.

Nous avons vu à l'article 167 que l'équation de cette courbe est $y = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, donc $d\varpi (= ydx)$ [équat. 555] $= \frac{xdx\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, d'où $\varpi = \text{const.} - \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a}$ [art. 212]. Mais lorsque $x = 0$, on a $\varpi = 0$, donc const. $= \frac{a^2}{3}$; ainsi on a complètement $\varpi = \frac{a^3-(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a}$. Si on fait $x = a$, on a pour l'aire d'une demi-feuille de la courbe $\varpi = \frac{a^2}{3}$; donc l'aire de la lemnicaste entière est égale à celle du tiers du quarré formé sur l'axe BC de la courbe.

FIN DE LA SEPTIÈME ET DERNIÈRE SECTION DU CALCUL INTÉGRAL.

# TABLE DES MATIÈRES.

## SUITE DE LA SECONDE PARTIE.

# CALCUL INTÉGRAL.

## SECTION II.

*De l'intégration des fonctions et équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, et des solutions particulières de ces équations.*

CHAPITRE I. *De l'intégration des fonctions différentielles du premier ordre à plusieurs variables qui sont exactes.*

Art.

*318. Règle extrêmement simple pour intégrer les fonctions différentielles du premier ordre et homogènes entre un nombre quelconque de variables, page 1

*319. Moyen d'abréger encore plus la méthode de l'article précédent, lorsque la fonction differentielle proposée renferme plus de deux variables, 3

*320. Modification de la règle prescrite à l'article 318, lorsque le degré de la formule différentielle homogène proposée est $= -1$, 4

*321. Règle très-simple pour l'intégration des fonctions différentielles exactes et hétérogènes entre un nombre quelconque de variables, lorsque cette fonction n'a pas de dénominateur variable multinome, 7

*322. Modification de la règle précédente, lorsque la proposée a un dénominateur variable multinome, 9

Art.

*323. Autre méthode fort simple pour intégrer les fonctions différentielles exactes du premier ordre, et dont l'usage s'étend au cas où la fonction proposée renferme des quantités transcendantes, page 11

*324. Simplification dans certains cas, de la recherche si la réunion des intégrales particulières trouvées, donne la vraie intégrale de la fonction proposée, 14

325, 326, 327. De l'intégration des fonctions différentielles lorsqu'il y entre des logarithmes de variables, 15, 16, et 17

328, 329. Remarques sur la méthode de l'article 323, 22 et 23

CHAPITRE II. *Des équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, et examen des formes qu'elles doivent avoir après la différentiation immédiate des équations primitives dans lesquelles on a isolé la constante qui doit être éliminée.*

330. De la forme sous laquelle se présente presque toujours une équation différentielle, et des cas où l'isolement dans l'équation primitive de la constante qui a disparu par la différentiation, donne, ou ne donne pas de dénominateurs variables à la différentielle immédiate, 24

331. Des conditions qui doivent avoir lieu dans l'equation primitive, pour que sa différentielle puisse s'intégrer comme les fonctions différentielles exactes à plusieurs variables, 25

332. D'un cas qui se ramène aisément au précédent, *ibid.*

333, 334. Des deux cas où la constante éliminée dans la différentiation immédiate de l'équation n'étant combinée avec les variables que par voie d'addition, on ne peut cependant intégrer l'equation différentielle, qu'après y avoir rétabli certains facteurs ou diviseurs variables qui étaient dans la différentielle immédiate de l'équation primitive, 26

335. Du cas où dans l'équation primitive de l'équation différentielle proposée, la constante éliminée se trouve engagée avec des variables par voie de multiplication, *ibid.*

336. Résumé de l'examen dont nous nous sommes occupé dans ce chapitre, 27

CHAPITRE III. *De l'intégration des équations différentielles du premier ordre à deux variables.*

337. De la séparation des variables, 29

338. Cette séparation peut toujours s'effectuer sur les équations différentielles à deux termes, 30

339. De la transformation générale de toute équation différen-

tielle homogène à deux variables en une autre dans laquelle les variables sont séparées, page 30

Art. 340, Où nous ramenons l'intégration d'une équation hétérogène à celle de l'equation homogène, traitée dans l'article précédent, 36

Cas d'exception, et integration de la proposée dans ce même cas, 37

**341. Intégration des équations de la forme

$$AF(y)d.F(x) + BF(x)dF(y) + f(y)dy = 0 \ldots (296),$$ 38

342. Intégration des équations linéaires du premier ordre, 40

343. Toute équation de la forme

$$dy + yXdx + y^{m+1}\xi dx = 0 \ldots (302),$$

dans laquelle X et $\xi$ représentent des fonctions quelconques de $x$, peut toujours se ramener à la forme de celle (298) que l'on a intégrée précedemment, 45

344. Intégration de l'équation

$$axdy + bydx + x^c y^m(nxdy + pydx) = 0 \ldots (303),$$ 46

345, 346. Des cas où l'on a dans l'equation (303) $ac = bm$ et $pm = nc$, ou seulement $ac = bm$: 48

347. Intégration de l'équation $F(x, y, dx, dy) = 0$, lorsqu'elle est le produit de l'équation primitive $\phi(x, y) = 0$ par l'équation differentielle $f(x, y, dx, dy) = 0$, 49

348. Relation qui doit exister entre les exposans des variables de l'équation hétérogène,

$$(Ax^a y^b + Bx^c y^e + Cx^f y^g + \text{etc})dx$$
$$+(Dx^{a'}y^{b'} + Ex^{c'}y^{e'} + Gx^{f'}y^{g'} + \text{etc.})dy = 0,$$

afin qu'elle puisse être transformée en une équation homogène, 51

349. Application à l'équation générale à trois termes

$$dx + ax^m y^n dx = bx^p y^q dy \ldots (307),$$ 52

350. Lorsque l'équation de condition (308) n'est pas satisfaite, on peut transformer l'équation (307) en une autre qui pourra être intégrée dans un nombre infini de cas, 54

351. Equation du comte Riccati, et détermination de tous les cas dans lesquels elle est séparable, 55

352. Toute équation differentielle de la forme

$$dy = ax^p dx + by^2 x^q dx \ldots\ldots (318),$$

dans laquelle $q$ représente un nombre quelconque différent de l'unité, pourra se transformer en une autre équation de la forme de celle du comte Riccati, 61

Art.

353. Conditions nécessaires pour que l'équation

$$dy = ay^2dx + bx^mdx + pyx^qdx \ldots\ldots (319),$$

se réduise à une équation à trois termes et de la forme de celle du comte Riccati, page 62

354. Mêmes recherches pour l'équation

$$dy = ay^2x^ndx + bx^mdx + pyx^qdx \ldots\ldots (323)$$ 63

355. Des équations différentielles et séparées entre deux variables dont chaque terme s'intègre seulement par les logarithmes, ou seulement par les arcs de cercle, et dont on obtient les intégrales algébriques, 64

356. Lorsque l'équation différentielle séparée qu'on veut intégrer, a des termes qui ont leurs intégrales logarithmiques affectées de l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et d'autres termes dont les intégrales logarithmiques ne sont pas affectées de cette imaginaire, on ne peut obtenir l'intégrale algébrique d'une pareille équation 67

CHAPITRE IV. *De la méthode générale des facteurs pour intégrer les équations différentielles du premier ordre à plusieurs variables, lorsque ces équations, dans leur état primitif, ne sont pas exactement intégrables.*

357. Définition de cette méthode, 69

358. Equation générale renfermant le facteur qui rend intégrable les équations différentielles à deux variables, 70

**359. Réduction des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition, servant à vérifier si une fonction différentielle est exacte, à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations de condition, et équation de condition servant à vérifier si une équation différentielle à trois variables est susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur, 72

360. Toute équation différentielle à deux variables est susceptible d'être intégrée exactement par la multiplication d'un facteur, 75

361. Il n'en est pas de même de l'équation à trois variables (328), si celle de condition (330) n'est pas satisfaite : mais dans ce cas là, l'équation (328) n'est pas absurde, et elle peut être satisfaite par le rapport des variables déduit de l'équation de condition (330), 75

362. Au lieu de $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ équations de condition sem-

blables à celle (330), servant à vérifier si une équation différentielle à $m$ variables est intégrable par la multiplication d'un facteur, l'on n'a besoin que d'en calculer

Art. $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, page 76

363. Expression du facteur qui rend intégrables les équations différentielles homogènes, 78

*364. La règle précédente est en défaut lorsque le degré d'homogénéité est nul : moyen d'obvier à cet inconvénient, 80

365. Lorsque le moyen indiqué dans l'article précédent offre des difficultés, quelquefois insurmontables, on a recours à une transformation qui conduit à une équation ayant une variable de moins que la proposée, et qui se sépare aisément, si cette dernière équation ne renferme que trois variables, et est susceptible d'une intégration exacte, 84

366. Il est souvent possible de se servir avec avantage d'un procédé semblable à celui indiqué dans l'article précédent, lors même que l'intégrale de la proposée n'est pas d'un degré nul d'homogénéité, 85

367. On trouve fort aisément le facteur qui rend intégrables les équations différentielles qui ne sont pas homogènes, mais qui sont susceptibles d'avoir une transformée homogène, 87

368. Lorsqu'on connaît un seul facteur capable de rendre intégrable une fonction différentielle, on pourra en trouver un nombre infini d'autres qui produiront le même effet, *ibid.*

CHAPITRE V. *De la méthode inverse des facteurs.*

369. Définition de cette méthode, 88

370. Recherches sur la relation qui doit exister entre les fonctions indéterminées X, X′ de $x$ qui entrent dans l'équation $Xydx + X'dx + ydy = 0$ ... (333) et celles $\xi$, $\xi'$, ... $\xi^{(m-2)'}$ de même nature qui entrent dans l'expression du facteur

$$\theta = \frac{1}{[y^m + f(x)y^{m-1} + \xi y^{m-2} + \xi' y^{m-3} \ldots + \xi^{(m-2)'}]} \ldots\ldots\ldots (334),$$

pour que l'équation (333) soit exactement intégrable en la multipliant par le facteur $\theta$, 89

371. Où l'on détermine la relation qui doit exister entre X et X′ pour que les trois équations différentielles inexactes

$$\left.\begin{array}{l} Xydx + X'dx + ydy = 0 \\ Xydx + X'dy + ydy = 0 \\ Xydx + X'dy + xdx = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (347),$$

deviennent exactes en les multipliant par le facteur
Art. $\theta = (x+y)^n$.....(348), page 97
372. Enfin, nous cherchons la relation qui doit exister entre les fonctions X, $\xi$ et $\xi'$ de $x$ pour que les équations différentielles inexactes de la forme

$$dy + y^2dx + Xdx = 0.....(365),$$

deviennent exactes en les multipliant par un facteur de la forme $\theta = \frac{F(x)}{y^2+2\xi y+\xi'}$....(366), dans laquelle F $(x)$ représente une fonction déterminée de $x$, 106
373. Extension de la méthode précédente au cas où l'on s'occupe des mêmes recherches, relativement à des équations différentielles inexactes à trois variables, 111

CHAPITRE VI. *Des intégrales et solutions particulières des équations différentielles du premier ordre; propriété des facteurs ou diviseurs qui rendent exactes les équations différentielles inexactes, et qui sert, dans un grand nombre de cas, à découvrir ces facteurs.*

374, 375. Définition des intégrales et solutions particulières, 112
376, 377. Des solutions particulières de première et seconde espèces, et utilité de ces dernières dans les solutions des problèmes, 113
*378, 379. De la recherche des solutions particulières de seconde espèce, 114, 115
380. Une équation différentielle rationnelle algébrique ne peut avoir de solutions particulières, 118
381. Règles générales pour trouver les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre qui ne sont pas rationnelles algébriques, et qui sont susceptibles d'en avoir, 118
*382. Observation sur un principe que quelques auteurs ont introduit dans leurs ouvrages, et qui me paraît faux, 119
383. Méthode pour obtenir les solutions particulières des équations différentielles, dont on ne connaît pas l'intégrale, 122
384. Le facteur ou diviseur propre à rendre exactement intégrable une équation différentielle, étant égalé à zéro, satisfait à cette équation différentielle, 124
385, 386, 387. Trois remarques essentielles, 126, 128, 129
388. Usage de la belle propriété du facteur, énoncée à l'article 384, pour trouver ce facteur, 129

CHAPITRE

CHAPITRE VII. *Methode pour résoudre par approximation, les equations différentielles du premier ordre à deux variables, lorsqu'on a trop de peine à les intégrer exactement.*

Art. 389. Définitions, avantages de la résolution par approximation des équations différentielles, et exposition de la méthode, page 134

390. Exposition analytique de la méthode, avec plusieurs applications à différens cas, 137

391. On peut se servir des formules de l'article précédent, lors même qu'on veut avoir la valeur de $x$ en fonctions de $y$, 144

392. Solution du problème. Etant donnée une équation finie entre des fonctions circulaires et logarithmiques de deux variables, trouver la valeur de l'une de ces variables par une suite de termes qui ne soient que des fonctions algébriques et réelles de l'autre variable, 145

CHAPITRE VIII. *Des équations à deux variables, dans lesquelles les différentielles du premier ordre se trouvent élevées à des puissances entières plus grandes que l'unité, ou se multiplient entre elles.*

393. Les équations de relation des deux variables peuvent s'obtenir par la résolution d'une équation algébrique d'un même degré que la proposée, par rapport aux différentielles, et par l'intégration d'équations différentielles du premier ordre à deux variables, 149

394. Mais la résolution algébrique des équations littérales d'un degré supérieur, présentant des difficultés presque toujours insurmontables, on cherche à faire dépendre l'intégration de la proposée, de la résolution algebrique d'équations d'un degré inférieur à celui de la proposée par rapport aux differentielles, et on réussit dans les quatre cas suivans.

*Premier cas.* Si la proposée se présentant sous la forme $dy^m + f'y dy^{m-1} dx + \ldots + f^{m'}y dx^m = 0 \ldots$(385), les quantités $f'y \ldots f^{m'}y$ ne sont que des fonctions rationnelles de $y$, et si cette variable n'est elevée qu'à des puissances moindres que $m$, 152

395. *Second cas*, qui ne différe du premier qu'en ce qu'on suppose que quelqu'une des fonctions de $y$ renferme cette variable elevée à une puissance $> m$, 154

396. *Troisième cas.* C'est celui où les artifices employés dans l'article précédent ne réussissent pas, 157

397. *Quatrième cas.* Lorsque l'equation proposée est homogène,

et que le degré d'homogénéité des variables primitives est
Art. plus p tit que celui de leurs differentielles, page 159
398, 399. Solution du problème. Etant donnée une équation primitive $F(x, y, u) = 0$ entre trois variables, et ayant entre ces mêmes variables l'équation differentielle du second degré $du^2 = dy^2 + dx^2$, on demande l'équation de relation entre deux de ces variables, 162, 165
400, 401, 402. Integration des équations de la forme

$$ydx - qxdy = \sqrt[m]{[ady^m + bdy^{m-1}dx \ldots + ndx^m]}, \quad 168$$

$$ydx - xdy = \sqrt[m]{[ady^m + \text{etc.}]}, \quad 170$$

$$dy^{\frac{mn}{m-n}} = (ax^m + by^n)dx^{\frac{mn}{m-n}}, \quad 175$$

403. Séparation des équations de la forme

$$dy = \left(ax^m + by^{\frac{m}{m+1}}\right)lx, \quad 177$$

## SECTION III.

### *De l'intégration des formules et équations différentielles des ordres supérieurs.*

CHAPITRE I. *Intégration des formules différentielles de tous les ordres à une seule variable.*

404. Etant donnée une formule différentielle de l'ordre $n$, telle que $Pd^nx + Qd^{n-1}xdx + Rd^{n-2}xdx \ldots + Vdx^n$.. (399), dans laquelle P, Q, R, ... V représentent des fonctions de la variable $x$, et dans laquelle aucune differentielle de $x$ d'un ordre inférieur à $n$ n'est considérée comme constante, nous cherchons la relation qui doit exister entre les coefficiens P, Q... V pour que l'integration de la formule (399) puisse se ramener à celle d'une formule differentielle de premier ordre à une seule variable, 179
405, 406. Solutions de cette question dans les cas de $n = 2$ et de $n = 3$, 180, 181
*407. Simplification de la méthode dans certains cas, 185
*408. Definition des intégrales repétées et notation, 186
409. Demonstration que l'intégrale finale de la formule $d^nX = \varphi x dx^n$, dans laquelle $dx$ est considérée comme constante, doit toujours être de la forme $X = fx + cx^{n-1} + c'x^{n-2} \ldots + c^{(n-1)}$, 187

Art.
410. Développement de $\int^n \varphi x dx^n$ en une suite de $n$ intégrales simples, page 189

CHAPITRE II. *De quelques fonctions et équations différentielles des ordres supérieurs entre deux ou un plus grand nombre de variables, auxquelles on peut appliquer des règles générales pour les intégrer.*

*411. Recherches, 1° des équations de condition qui doivent exister entre les fonctions de $x$ représentées par A, B, E, H, K, pour que la fonction différentielle du second ordre

$$Addx + Bddy + Edx^2 + Hdy^2 + Kdxdy \ldots (405),$$

soit la différentielle première d'une fonction différentielle du premier ordre. 2°. De la forme de l'intégrale finale de la formule (405), 191

*412. Avantage de la méthode précédente sur celles des articles 55 et 359 pour déterminer si une fonction différentielle de l'ordre $m$ est une différentielle exacte d'une autre fonction différentielle de l'ordre $m-1$, 194

*413. Avantage du principe démontré à l'article 57, pour trouver, presque sans calcul, la $(n-1)^{me}$ intégrale d'une fonction différentielle de l'ordre $n$ et exacte, dans laquelle aucune différentielle d'un ordre inférieur à $n$, n'a été considérée comme constante, *ibid.*

414. De l'intégration des fonctions différentielles du second ordre à deux variables, dans lesquelles la différentielle première de l'une des deux variables est considérée comme constante, 195

415. De l'intégration des équations différentielles du second ordre, dans lesquelles la différentielle du premier ordre de l'une des deux variables est considérée comme constante, 196

416, 417. Des intégrations des équations

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \quad 206$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right), \quad 208$$

CHAPITRE III. *De l'intégration des équations différentielles du second ordre entre deux variables, lorsqu'on fait éprouver à ces équations certaines modifications exigées par les conditions des problèmes qui ont donné lieu à de pareils calculs ou que ces*

*modifications servent à faciliter les intégrations qui*
Art. *conduisent aux solutions des problèmes en question.*

418. Du cas où l'on considère certaines fonctions de différentielles de variables seules, ou combinées avec des variables primitives, comme constantes, page 211

*419, 420. La solution d'un problème qui a conduit à une équation dans laquelle la différentielle de l'une des deux variables a été considérée comme constante, n'est point altérée lorsqu'on rend cette différentielle variable, et qu'on considère comme constante la différentielle première de l'autre variable,

Manière d'opérer une telle transformation, 213, 215

421. Transformation de toute équation différentielle du second ordre, dans laquelle une différentielle a été considérée comme constante, en une autre équation différentielle où une fonction des différentielles des variables est considérée comme constante, 217

**CHAPITRE IV. *Intégration des équations linéaires de tous les ordres entre deux ou un plus grand nombre de variables* (*).

422. Définition et raisons qui nous ont fait conserver la dénomination d'*équations linéaires*, 218

423. Intégration de l'équation linéaire

$$Ay dx^n + Bdy dx^{n-1} \ldots Cd^2y dx^{n-2} \ldots + d^n y = X dx^n \ldots \quad (424),$$

dans laquelle A, B, C, D... sont des quantités constantes et X une fonction de $x$, 220

424. Développement de la formule (426) en une suite de termes qui ne renferment chacun qu'une intégrale simple, 230

425. Lemme. Intégration des formules

$$Xq^x dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases} \text{ et de } Xe^{-ax} dx \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases}, \quad 234$$

426, 427. De l'intégration de l'équation (424) lorsque l'auxiliaire a des racines imaginaires, 236, 238

428. Intégration de l'équation

$$ddy + Bdy dx + Ay dx^2 = X dx^2 \ldots\ldots (434)$$

(*) Lorsque, comme dans ce chapitre, presque tous les articles devront être précédés d'asteriques, nous nous contenterons de mettre un ou deux asteriques, suivant l'importance du sujet, devant le titre du chapitre.

lorsque les deux racines de son auxiliaire sont imaginaires, page 239

Art. 429. Intégration de l'équation générale du fameux problème des trois corps, 240

430. Du cas où l'auxiliaire a toutes ses racines, ou simplement quelques-unes de ses racines égales entre elles, 241

431, 432, 433. Intégration de l'équation (424) dans le cas où A, B... étant toujours des quantités constantes, on a X = 0, en considérant d'abord toutes les racines de l'auxiliaire comme réelles et inégales, ensuite quelques-unes d'elles comme imaginaires; enfin considérant le cas où il y a des racines égales, 243, 244

434, 435, 436. De l'intégration de l'équation (424) lorsque A, B... et X sont des quantités constantes, dans les trois cas que comporte la nature des racines de l'auxiliaire, 246, 247, 248

437. Introduction à la théorie développée dans l'article suivant, 249

438. Intégration des équations différentielles et linéaires d'un ordre quelconque, dans lesquelles tous les coefficiens sont des fonctions de la variable qui varie uniformément, *ibid.*

439. Toutes les équations linéaires d'un ordre quelconque $n$ et de la forme

$$ydx^n + bxdx^{n-1}dy + gx^2dx^{n-2}d^2y \ldots + x^n d^n y = Xdx^n \ldots (448),$$

dans laquelle $a$, $b$, $g$... représentent des constantes déterminées, peuvent toujours s'intégrer par les méthodes enseignées aux articles 423...430, 261

440. Intégration de l'équation

$$ydx^n + b(p+qx^n dx^{n-1}dy + g(p+qx)^2 dx^{n-2}d^2y \ldots + (p+qx)^n d^n y = Xdx^n \ldots\ldots (449),$$

dans laquelle $p$, $q$, $a$, $b$, $g$... sont des fonctions déterminées de constantes, et X une fonction de $x$, 264

441. On peut toujours trouver un nombre infini de valeurs de $y$ et de $z$ en fonction de $x$, qui satisferont simultanement à toute équation entre les trois variables $x, y, z$, et linéaire par rapport aux deux variables $y$ et $z$, dont les différentielles premières ne sont pas considérées comme constantes, 265

442. Il y a un nombre infini de courbes à double courbure qui satisfont à l'équation considérée dans l'article précédent, 266

443. Si l'équation linéaire de l'ordre $n$ considérée dans les deux articles précédens appartenait à une surface courbe, on

en déduirait les equations primitives de ses traces sur les
Art. plans des $xz$ et des $yz$, Page 266
444. Application des théories traitées dans les trois articles précédens, *ibid.*
445. Du cas où l'on cherche les valeurs d'un plus grand nombre de variables $s$, $u$, $y$, $z$.... en fonctions de $x$ qui doivent satisfaire simultanément à une équation différentielle de l'ordre $n$ et linéaire par rapport aux variables $s$, $u$, $y$, $z$, etc., 268
446. Du cas où l'on a un nombre $m$ de variables entre $m-1$, équation différentielle de l'ordre $n$, 269
447. Simplification du calcul indiqué dans l'article précédent, lorsque les coefficiens sont constans, 271
448. Du cas où outre les coefficiens constans, on a encore $X=0$ et $X_1=0$, 272
449. Des cas où l'équation finale, après l'élimination de $z$ et de ses différentielles dans les équations (451), n'est que du troisième et même du second ordre; équations de condition relatives à ces cas P, 275
450. Extension des méthodes précédentes à un nombre quelconque d'équations, 276

**CHAPITRE V. *Quelques observations essentielles sur les équations différentielles de tous les ordres, et méthodes que nous déduirons de ces observations pour obtenir plus facilement l'intégrale finale de certaines équations différentielles.*

451. Des problèmes essentiellement différens dans leurs énoncés qui, cependant, ont une même solution, 276
452. Toute équation différentielle de l'ordre $n$ et entre deux variables dont l'une varie uniformément et l'autre sans uniformité, a au moins $n$ premières intégrales, 278
453. Une pareille équation différentielle a au moins un nombre $1.2.3...n$ de $(n-1)^{ièmes}$ intégrales, lesquelles sont des équations différentielles du premier ordre. Toutes les équations différentielles d'ordres inférieurs à la proposée, et qui sont les intégrales de cette dernière équation, étant considérées comme les traductions analytiques d'énoncés de problèmes différens, ont une même solution, 280
454. Les équations différentielles que nous considérons, peuvent avoir plus de premières intégrales qu'il n'y a d'unités dans l'indice de l'ordre de différentielle de ces équations, 281
455. Si l'on peut intégrer une première fois de $n$ manières dif-

férentes, une equation différentielle de l'ordre $n$, telle que celles que nous considérons, on pourra avoir l'intégrale finale, sans intégrer les équations différentielles
Art. d'ordres inferieurs à $n$, page 282

456. Moyen deduit de la théorie précédente, pour intégrer dans certains cas une équation differentielle inexacte, sans être obligé de chercher le facteur qui la rend une differentielle exacte, 284

CHAPITRE VI. *De la résolution par approximation des équations differentielles entre deux variables et du second ordre qu'on ne peut résoudre exactement, lorsqu'on éprouve des difficultés insurmontables pour trouver les facteurs propres à rendre ces équations exactement intégrables.*

*457. Methode générale pour résoudre par approximation l'équation du second ordre et linéaire

$$d^2y + Xdydx + y\xi dx^2 = 0 \ldots\ldots (452),$$

dans laquelle X et $\xi$ représentent des fonctions quelconques de $x$, 285

*458. Application de la méthode précédente à la résolution par approximation de l'équation

$$ddy + ax^n ydx^2 = 0 \ldots\ldots (455),$$ 286

459. Solution du problème. Connaissant l'une des deux intégrales particulieres de l'équation (452), que l'on obtient de l'intégrale complète en faisant l'une des deux constantes $c$ ou $c' = 0$, trouver l'autre intégrale particulière, et par conséquent l'intégrale générale de la proposée, 292

460, 461. Résolution par approximation de l'équation (455), lorsque certaines valeurs particulières de $n$ et de $a$ combinées ensemble, mettent en defaut la méthode précédente, 294, 297

*462. Comment on peut ramener l'intégration de l'équation du comte Riccati à celle de l'équation (455), 300

*463. Utilité de ce qui est démontré dans l'article précédent, 301

## SECTION IV.

### *Supplément aux trois premières sections.*

CHAPITRE I. *Intégration simultanée de certains systèmes d'équations.*

Art.

*464. Intégration simultanée des deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(Az + By)\,dx + Ddz + Edy = Xdx \\ (Hz + Iy)\,dx + Kdz + Ldy = \xi dx\end{array}\right\}\ldots\ldots(465),$$

dans lesquelles A...E, H...L représentent des quantités constantes déterminées, et X, $\xi$ des fonctions quelconques de $x$, page 303

**465, *466, *467, 468, 469. Examen des cas

où $b$ étant de signes contraires $\left.\right\}$ on a $\left\{\begin{array}{l}4bm = \\ \quad\ > \end{array}\right\}(a-n)^2$ 306, 309

où dans les équations (465) $\left.\right\}$ on a $\left\{\begin{array}{l}DL = EK, \\ DH = AK, \\ BL = EI,\end{array}\right.$ 310, 311, *ibid.*

470. Intégration simultanée des trois équations

$$\left.\begin{array}{l}(Az + By + Ct)dx + Ddz + Edy + Gdt = Xdx \\ (Hz + Iy + Kt)dx + Ldz + Mdy + Ndt = X'dx \\ (Oz + Py + Qt)dx + Rdz + Sdy + Tdt = X''dx\end{array}\right\}\ldots(479),$$ 312

471. Scolie, 314

*472. Intégration simultanée des deux équations différentielles du second ordre

$$\left.\begin{array}{l}(Ay+Bz)dx^2+(Cdy+Ddz)dx+Ed^2y+Hd^2z=Xdx^2 \\ (Ly+Kz)dx^2+(Ldy+Mdz)dx+Nd^2y+Od^2z=\xi dx^2\end{array}\right\}\ldots(481),$$ 314

*473. *Idem.* De

$$\left.\begin{array}{l}(Ay+Bz+D)dx^2+Ed^2y+Hd^2z = 0 \\ (Iy+Kz+L)dx^2+Md^2y+Nd^2z=0\end{array}\right\}\ldots(482),$$ 317

*474. Examen du cas où $p'$ et $p''$ sont négatives, 321

**475. Les formules d'intégrations simultanées trouvées dans les deux articles précédens, ne peuvent servir lorsque les valeurs de $\epsilon'$ et de $\epsilon''$ sont réelles et égales, et lors qu'elles sont imaginaires, nous trouvons des formules générales qui peuvent servir dans tous les cas possibles, 323

**476. Nous prouvons que les deux formules trouvées dans l'article précédent, satisfont au cas de $\epsilon' = \epsilon''$, 326

**477. Et au cas de $\epsilon'$ et $\epsilon''$ imaginaires, 328

478. Examen du cas où dans les équations (482), on a AM = EI, 330

CHAPITRE II. *Intégration de certaines équations différentielles du premier ordre entre deux variables et séparées, dont on obtient les intégrales algébriques, quoique la fonction différentielle de chacune de ces*

*deux variables étant considérée isolément, ne puisse s'intégrer algebriquement, et que ces deux fonctions ne puissent s'intégrer en même temps par les logarithmes, ou par les arcs de cercle.*

Art. 479. Intégration algébrique de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{[ax^4+bx^3+cx^2+hx+m]}}=\frac{dy}{\sqrt{[ay^4+by^3+cy^2+hy+m]}}\ (500),$$

dont chacun des membres, considéré isolément, ne pourrait s'intégrer ni algébriquement, ni par les logarithmes, ni par les arcs de cercle, page 332

480. Intégration algébrique d'équations qui sont dans des cas semblables à celle qu'on a intégrée dans l'article précédent, 336

* Remarque, 337

*481. Intégration algébrique de deux équations qui sont dans les mêmes cas que les précédentes, mais dans lesquelles les variables $x$ et $y$ sont élevées à des puissances $> 4$, 338

CHAPITRE III. *Des intégrales et solutions particulières des équations différentielles d'ordres supérieurs.*

482, 483. Définition de ces intégrales et solutions particulières, avec le moyen de parvenir de l'intégrale finale à l'équation différentielle de l'ordre $n$, dont elle est l'intégrale, 341

484. Méthode pour déduire de l'intégrale finale d'une équation différentielle de l'ordre $n$, toutes les solutions particulières de la proposée. Les recherches dont on s'est occupé dans cet article, conduisent au principe que la solution particulière la plus étendue que puisse avoir une équation différentielle de l'ordre $n$, ne saurait être exprimée par une équation primitive contenant plus de $n-1$ constantes, 343

485, 486. Remarques sur certains cas pour lesquels la méthode enseignée à l'article 484, se simplifie beaucoup, 346,347

487. Méthode extraite d'un savant mémoire de Legendre, pour déduire directement de l'équation différentielle proposée ses solutions particulières, 347

488. Caractère des solutions particulières, 349

489. L'équation $x=$ const., qui satisfait à toutes les équations différentielles entre $y$ et $x$, ne doit pas être mise au nombre des solutions particulières, 350

490. Application des théories précédentes, *ibid.*

Art.

491. Les solutions particulières des équations différentielles d'un ordre quelconque, ne sont pas toujours les solutions particulières des différentielles de l'equation proposée, ou de ses intégrales de tous les ordres, page 353

492. Recherche des solutions particulières et simultanées d'un système de $m$ équations différentielles d'un ordre quelconque entre $m+1$ variables, 355

CHAPITRE IV. *De l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.*

493, 494. Définition et notation, 358, 359

495. De l'ordre des équations aux différentielles partielles, 360

496. De l'intégration des équations aux différentielles partielles et linéaires du premier ordre dans quelques cas particuliers, 361

*497. Intégration de ces mêmes équations dans le cas le plus général, 362

**498. D'un cas particulier où l'intégration pourrait s'effectuer comme dans le cas général, mais qui s'obtient bien plus aisément par une méthode que nous faisons connaître dans cet article, 369

499. Manière de déterminer les fonctions arbitraires de variables qui entrent dans les integrales des équations aux différentielles partielles, lorsque ces dernières équations ont pour objet quelque point d'analyse appliquee, 372

500. Intégration de l'équation,

$$f^x z = F(fyz) \ldots\ldots (518), \quad 373$$

*501. Intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre à quatre variables, 375

502. Où l'on généralise l'analyse précédente aux équations aux différentielles partielles linéaires du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables, 380

503. Intégration des équations aux differentielles partielles du premier ordre, qui ne sont pas linéaires, 381

* Remarque, 383

CHAPITRE V. *Intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre à trois variables.*

504. Notions préliminaires, 383

Art.

505. $\frac{d^2yz}{dy^2} = \mathrm{H}$.....(524), page 384

506. $\frac{dyxz}{dydx} = \mathrm{H}$.....(526), 385

*507. Intégrations des équations $\frac{d^2yz}{dy^2} = \mathrm{D}\frac{dyz}{dy}$..... (528), *ibid.*

*508. $\frac{dyxz}{dydx} = \mathrm{D}\frac{dyz}{dy}$..... (530), 386

509. $f^2yz = a^2f^2xz$.....(532), *ibid.*

*510. $f^2yz = a^2fyxz$.....(534), 389

511. $f^2yz = \mathrm{D}fyz + \mathrm{H}$...(536), 390

512. $fyxz = \mathrm{E}fxz + \mathrm{H}$...(538), 391

513. Du cas où dans les équations qu'on a traitées précédemment, les lettres capitales renfermeraient la variable principale $z$, *ibid.*

*514, 515. Intégrations des équations

$fyxz = \mathrm{E}fxz + \mathrm{H}z$.....(540), 392

$fyxz + \mathrm{D}fyz + \mathrm{E}fxz = 0$...(541), 394

516. Etant donnée la différentielle du second ordre $d^2z$ d'une fonction $z$ de deux variables $t$ et $u$ par rapport à ces variables, nous trouvons d'après Euler, la valeur de la même différentielle $d^2z$ par rapport à deux nouvelles variables $x$ et $y$ qui ont avec celles $t$ et $u$ des relations semblables à celles qui existent entre ces deux dernières variables et celle $z$, 396

*517. Intégration de l'équation $\lambda^2f^2xz - f^2yz = 0$, dans laquelle $\lambda^2$ représente une fonction déterminée de $x$ et de $y$, 398

518. Intégration de la même équation lorsque $\lambda$ est en outre une fonction de $fxz$ et de $fyz$, 400

**519. Intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre, prises dans toute leur généralité et les coefficiens pouvant être des fonctions quelconques de $x$, $y$, $z$, $fxz$, $fyz$, 401

CHAPITRE VI. *Quelques notions sur les intégrations des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au second, et sur les solutions particulières des équations aux différentielles partielles de tous les ordres.*

520. Equations aux différentielles partielles de l'ordre $m+n$, qu'on intègre par le moyen des intégrations d'équations de même espèce qui ne sont que de l'ordre $m$, 407

Art.
521. Autres espèces d'équations aux différentielles partielles dont l'intégration se ramène à celle des équations différentielles ordinaires du même ordre que les premières, page 408
522. Elimination de constantes entre les équations primitives et leurs différentielles, qui conduisent à des équations aux différentielles dont les équations primitives mentionnées précédemment sont les intégrales, *ibid.*
523. Des solutions particulières des équations aux différentielles partielles, 410

## SECTION V.

### *Application du Calcul intégral à la Géométrie.*

*CHAPITRE I. *Quelques problèmes et théorèmes relatifs aux développées et développantes des courbes planes.*

524. Solution du problème. Etant donnée la valeur du rayon osculateur d'une courbe en fonction de constantes et de lignes trigonométriques de l'angle formé par la normale avec l'axe des abscisses, trouver l'équation entre les coordonnées rectangulaires de cette courbe, 412
525. Démonstration de deux équations importantes, 415
526. Solution du problème. Etant donnée l'équation d'une courbe, trouver celle de sa développée, *ibid.*
527. On tire plusieurs conclusions de ce qui précède, et entre autres la méthode de déduire de l'équation d'une courbe donnée, celle de la développante de cette courbe, 417
528. Démonstration de deux formules primitives qui rendent bien plus facile les recherches qui nous ont occupé dans les deux articles précédens, 420

*CHAPITRE II. *De la rectification des courbes planes et à double courbure, et de la quadrature des courbes planes,*

529. Formule générale de la rectification des courbes planes rapportées à leurs coordonnées rectangulaires, 421
530. *Idem.* Pour les courbes polaires, 427
531. *Idem.* Pour les courbes à double courbure, 431
532. Quadrature des courbes planes rapportées à leurs coordonnées rectangulaires, 432

Art.
533. *Idem.* Pour les courbes polaires, page 441

CHAPITRE III. *De la quadrature des surfaces courbes et de la cubature des volumes terminés par de pareilles surfaces.*

*534. Expression générale des aires des surfaces courbes quelconques, 443
535. *Idem.* Des surfaces de révolution, 449
*536. De la cubature d'un volume quelconque terminée par une surface courbe, 452
537. *Idem.* Des solides de révolution, 454

CHAPITRE IV. *Application du Calcul intégral à quelques questions et théories générales de Géométrie.*

538. Des trajectoires en général et des trajectoires orthogonales. Applications aux lignes du second degré, et à la ligne droite tournant autour d'un point fixe, 456
539. De la tractoire, 463
540. Solution du problème. Etant donnée une équation de relation entre la rectification d'un arc de courbe inconnue, et les coordonnées correspondantes à l'extrémité de cet arc, trouver l'équation de la courbe, 466
541. Des courbes dont les équations primitives satisfont à un nombre infini d'équations différentielles, *ibid.*
542. Des solutions particulières des problèmes de géométrie, 467

## SECTION VI.

### *Calcul des variations.*

CHAPITRE I. *Introduction.*

543. Définition et notation, 470
544. La différence d'un ordre quelconque de la variation d'une variable, est égale à la variation de la différence du même ordre de la variable, 471
545. Démonstration d'un théorème analogue au précédent, relativement aux différentielles des variations et variations des différentielles, 472
546. La variation de l'intégrale d'un ordre quelconque d'une fonction différentielle, est égale à l'intégrale du même ordre de la variation de la fonction différentielle, *ibid.*
547. De la variation des formules différentielles, 473

CHAPITRE II. *Méthode des variations dans les ques*

*tions de* maximis *et* minimis *lorsque la fonction différentielle proposée n'est qu'entre deux variables, et qu'une de ces variables varie pour une même valeur de l'autre.* pag.

Art.

548. Considérations générales sur la méthode des variations, 473

549. Insuffisance des méthodes enseignées dans la première partie de cet Ouvrage, pour trouver les extrêmes grandeurs, lorsqu'on ne connaît aucune relation entre $y$ et $x$, 475

550. Démonstration que la variation d'un ordre quelconque de l'intégrale d'une fonction différentielle, est égale à l'intégrale de la variation du même ordre de la fonction différentielle, 479

551. Equation générale des extrêmes grandeurs, et valeur de la variation de l'intégrale de la fonction différentielle proposée, 474

552. De l'équation aux limites, 481

553. Equation de condition d'intégrabilité de la fonction différentielle dans l'état de la question proposée, 482

554, 555. Examen du cas où la formule différentielle proposée n'est que du premier ordre, 483

Application de la théorie précédente à un exemple, 484

556. Des cas où les ordonnées des limites, et les coefficiens différentiels sont tous déterminés, ou partie déterminés et partie indéterminés, 486

CHAPITRE III. *De la méthode des variations dans les questions de* maximis *et* minimis *entre des limites variables*,

557. Faisant varier simultanément $y$ et $x$, l'équation générale des extrêmes grandeurs reste la même, mais celle des limites change. Nous faisons connaître l'expression de ce changement, 487

558. Application de la théorie précédente à un exemple général, et ensuite à un exemple particulier, 489

CHAPITRE IV. *Extension de la méthode des variations, dans le cas où la fonction différentielle proposée est entre trois ou un plus grand nombre de variables.*

559. De l'équation générale des extrêmes grandeurs dans les questions de *maximis* et *minimis* entre trois variables.

560. Examen du cas où il n'y a aucune relation donnée entre $y$ et $z$, 495

561. *Idem.* Lorsqu'entre $x$, $y$ et $z$ on a une équation, 496

562. Equation aux limites, *ibid.*

Art.
563. Dans le cas où $x$ varie dans le sens caractérisé par $\delta$, l'équation générale des extrêmes grandeurs reste la même, et celle des limites change, page 497
564. Application générale de cette théorie, 498
565. Conclusion, 502

## SECTION II.

### *Calcul intégral aux différences, et application de ce calcul à celui de la sommation des séries.*

CHAPITRE I. *Règles fondamentales, et intégration des fonctions aux différences du premier ordre algébriques et transcendantes.*

566, 567. Définitions et notation, 503
568. Des constantes arbitraires qu'on doit ajouter aux intégrales, 504
569. On peut passer les facteurs constans des formules qu'on intègre en avant du signe d'intégration, *ibid.*
570. L'intégrale d'un polynome est égale à la somme des intégrales de chaque terme, *ibid.*
571. Intégration de $x^m$, *ibid.*
572. *Idem*, de $x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)$, 507
573. Modification de l'intégrale trouvée dans l'article précédent, 508

574. $\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}$, *ibid.*
575. $\frac{1}{(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)+\text{etc.}}$, *ibid.*
576. $\frac{A+Bx}{x(x+a\Delta x)(x+b\Delta x)\ldots(x+p\Delta x)(x+q\Delta x)}$, 511
577. Intégration de $a^x$, 512
578. $x^n a^x$, *ibid.*
579. $\frac{x^m}{a^x}$, 513
580. $\sin x$ et $\cos x$, 514
581. $x^n \sin x$ et $x^n \cos x$, 515
582. $lx$, *ibid.*
583. $lx^x$, 516

*CHAPITRE II. *De l'intégration des équations aux différences finies d'un ordre quelconque, et à une seule variable.*

Art.

584. Définitions, page 517

585. Conversion de l'équation générale aux différences d'un ordre quelconque $n$, en une autre entre $f(x)$, $f(x+1)$, ..... $f(x+n)$, et intégration de cette équation, *ibid.*

586, 587. Application de la theorie précedente à la recherche des termes généraux des series récurrentes composées régulières et irrégulières, 527, 529

588. Du cas où toutes les racines de l'auxiliaire de l'équation aux différences qu'on veut intégrer sont égales, 530

589. Du cas où les racines de l'auxiliaire sont parties inégales et parties égales, 533

590, 591 et 592. Nous n'avons jusqu'à présent considéré X que comme une fonction exponentielle de $x$, nous considérons ici les trois cas suivans, 1° X = à une constante; 2° X = à une fonction algebrique et rationnelle de $x$; 3° X = o. 534, 536

593. Du cas où X etant = o, l'auxiliaire a une partie de ses racines égales, 538

594. Ou toutes ses racines égales, 539

595. Ou qu'elle se compose de plusieurs facteurs binomes du premier degré, 540

596. Ou enfin, qu'elle renferme des racines imaginaires, 541

597. Développement de l'intégrale générale trouvée à l'article 585, en supposant d'abord X = à une fonction exponentielle de $x$, 543

598. Intégration de l'équation aux différences (595), lorsque X étant une fonction exponentielle de $x$, l'auxiliaire a des racines imaginaires, 545

599. Développement de la formule 598 lorsque l'ajoutée est une constante, 546

600. *Idem.* Lorsque X est une fonction rationnelle de $x$, *ibid.*

601. Cas qui se soustrait à la méthode precédente, moyen d'y obvier, 549

602. Du cas où les coefficiens de l'équation générale aux différences sont fonctions de la variable, 451

CHAPITRE III. *Quelques notions sur l'intégration des formules et équations qui contiennent plusieurs variables*,

603, 604. Integration des différences exactes de monomes ou polynomes entre plusieurs variables, 554, 555

605.

Art.

605. De l'intégration des équations aux différences entre plusieurs variables qui ne peuvent s'intégrer par les méthodes précédentes, page 555

CHAPITRE IV. *Application du Calcul intégral à la sommation des séries.*

606. Equation de relation entre le terme sommatoire d'une série et l'intégrale de son terme général, 557

607. Sommation complète de toutes les séries dont la différence d'un ordre quelconque est constante, 559

608. Ce qu'on doit faire lorsqu'on ne veut avoir le terme sommatoire qu'à commencer d'un terme déterminé, 561

609. Expression générale du terme sommatoire des séries dont les différences d'un ordre quelconque sont constantes, 562

610. Expression générale et complète du terme sommatoire des séries de la forme

$a[a+\Delta x]\ldots[(a+\Delta x)+a\Delta x]$, $(a+\Delta x)[(a+\Delta x)+\Delta x]\ldots$ $[(a+\Delta x)+n\Delta x]$, $(a+2\Delta x)[(a+2\Delta x)+\Delta x]\ldots[(a+2\Delta x)+n\Delta x]$ etc., 563

611. Expression générale et complète du terme sommatoire des séries de la forme

$$\frac{1}{a(a+\Delta x)\ldots(a+n\Delta x)},\ \frac{1}{(a+\Delta x)[(a+\Delta x)+\Delta x]\ldots[a+\Delta x)+n\Delta x]}$$

$$\frac{1}{(a+2\Delta x)[(a+2\Delta x)+\Delta x]\ldots[(a+2\Delta x)+n\Delta x]},\ \text{etc.},$$ 564

*612. De la sommation des séries de sinus et cosinus d'arcs qui croissent uniformément d'un arc quelconque, et on examine particulièrement le cas où l'arc d'accroissement d'un terme à l'autre est égal à l'arc principal, 565

*613. Sommation des mêmes puissances de sinus ou cosinus d'arcs qui croissent comme la suite naturelle des nombres, en prenant l'arc principal pour l'unité, 568

614. Sommation des séries qui ont respectivement pour termes généraux $z^n \sin^m z$, et $z^n \cos^m z$, 570

615. Sommation des séries récurrentes composées, dont l'ajoutée est une quantité exponentielle, *ibid.*

*616. Du cas où l'auxiliaire de l'équation qui exprime la loi de la série récurrente qu'on veut sommer, a une ou plusieurs racines égales à l'unité, 571

*617. Du cas où l'ajoutée est une quantité constante, 572

*618. Sommation des séries récurrentes simples, *ibid.*

*619. Du cas où l'ajoutée de l'équation qui exprime la loi de la

série récurrente qu'on veut sommer étant exponentielle ; sa base est égale à une des racines de l'auxiliaire, pag. 573

CHAPITRE V. *Usage du Calcul intégral aux différentielles, ou Calcul intégral proprement dit, dans le Calcul intégral aux différences.*

Art.

*620. Moyen de trouver par le Calcul intégral la limite transcendante des séries, 574

621. Expression générale de $Sy$ déduite des Calculs différentiel, intégral et aux différences, 577

*Je fais connaître le moyen qu'indique Euler pour déterminer les valeurs numériques des coefficiens constans, et ensuite je fais connaître un autre moyen qui donne spontanément ces valeurs numériques, 579

622. Usage de la formule démontrée dans l'article précédent pour sommer les séries, 581

623. Expression de $S.lx$ avec une constante qui est encore indéterminée, 582

624. Démonstration d'un beau théorème de Wallis, 583

625. Détermination de la constante de la valeur de $S.lx$ qui était encore indéterminée à l'article 623, 584

Appendice, 586

FIN DE LA TABLE DU SECOND ET DERNIER VOLUME.

## *Supplément à l'*errata *du tome premier.*

Page 7, lig. 1, laque, *lisez* laquelle.

18, 20, $(ax+by^3)$, *lisez* $(ax+bx^3)$.

19, 15, $\dfrac{1}{q\sqrt[q]{(a+cx)^{q-1}}}$, lisez $\dfrac{c}{q\sqrt[q]{(a+cx)^{q-1}}}$.

26, 12, $(b+z^n)$, lisez $(b+z)^n$.

*Ibid.* avant-dernière ligne, $\sqrt[m]{(a+z)^{n-m}}\sin\sqrt[m]{(a+z^n)}$,

lisez $\sqrt[m]{(b+z)^{n-m}}\sin\sqrt[m]{(b+z)^n}$.

27, 2 $(a^2-bz^m)$, lisez $(a^2-bz^m)^{q-n}$.

*Ibid.* $4-\dfrac{bmq\sqrt[n]{(a^2-bz^m)}z^{m-1}dz}{n\cos^2\sqrt[n]{a^2-bz^m}}$,

lisez $-\dfrac{bmq\sqrt[n]{(a^2-bz^m)^{q-n}}z^{m-1}dz}{n\cos^2\sqrt[n]{(a^2-bz^m)^q}}$.

33, 7 et 8, *des variables*, lisez *des différentielles des variables.*

38, 2, $\sqrt[7]{(xy+y^2)^6}$, lisez $\sqrt[7]{(xy+y^2)^8}$.

47, 11, $3Ex^3$, *lisez* $4Ex^3$.

52, 5 et 13, fraction, *lisez* fonction.

59, 13, = etc., *lisez* — etc.

73, 28, il aurait, *lisez* il y aurait.

79, 6, $\dfrac{dydx}{2y\sqrt{}}$, lisez $\dfrac{dydx}{2y\sqrt{x}}$.

244, 2, $\dfrac{P}{2c^2}=Rc$ d'où $R=\dfrac{P}{2c^3}$, *lisez* $\dfrac{P}{2c^2}=-Rc$,

d'où $R=-\dfrac{P}{2c^3}$.

*Idem*, 9, $\pm A[1\mp$, *lisez* $\pm A[1\pm$.

*Idem*, 14, $y=\dfrac{Pt}{2}$, *lisez* $y=-\dfrac{Pt}{2}$.

le n° de la page 253 est marquée 233.

314, 5, $2q-3$, lisez $(2q-3)$.

316, 7, $a$, lisez $n$.

344, 15, $\sqrt{-1}$, *lisez* $\sqrt{-1}$.

368, 6, $p-1$, lisez $p+2$.

492, 10, $x^2$, lisez $a^2$.

dernière, 9, 345, *lisez* 349.

## *Errata du tome second.*

Page 45, lig. antépénultième, les équations différentielles, *lisez* Toute équation différentielle.

64, antépénultième, mettez deux points après le mot algébrique.

89, 18, $\xi^{(m-2)}$, lisez $\xi^{(m-2)'}$.

129, 10, Remarque, *lisez* Remarque III.

168, 13, $y^{dx}$, lisez $ydx$.

189, 1, $n$O, *lisez* O$n$.

201, dernière, ca, *lisez* cas.

386, 23, pen$^{t}$, *lisez* peut.

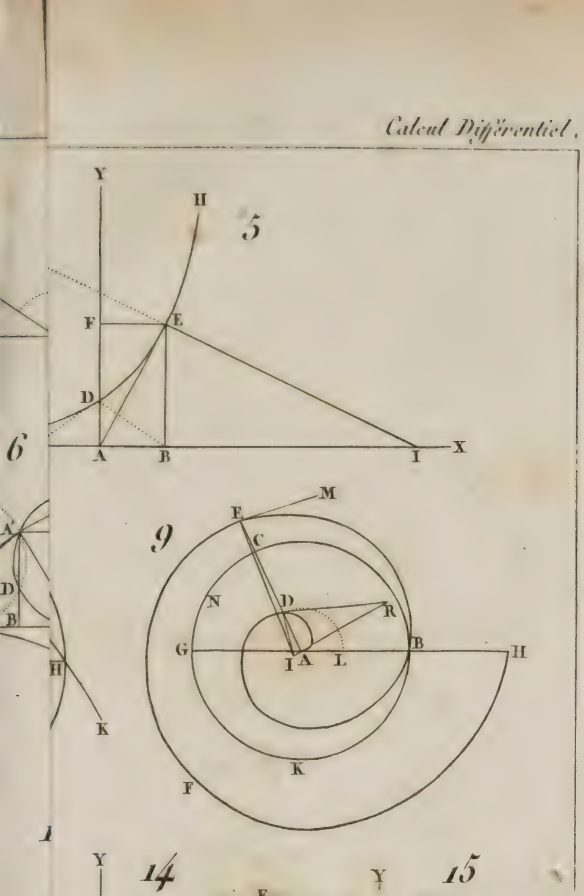
le n° de la page 393 n'est marqué que par un 3.

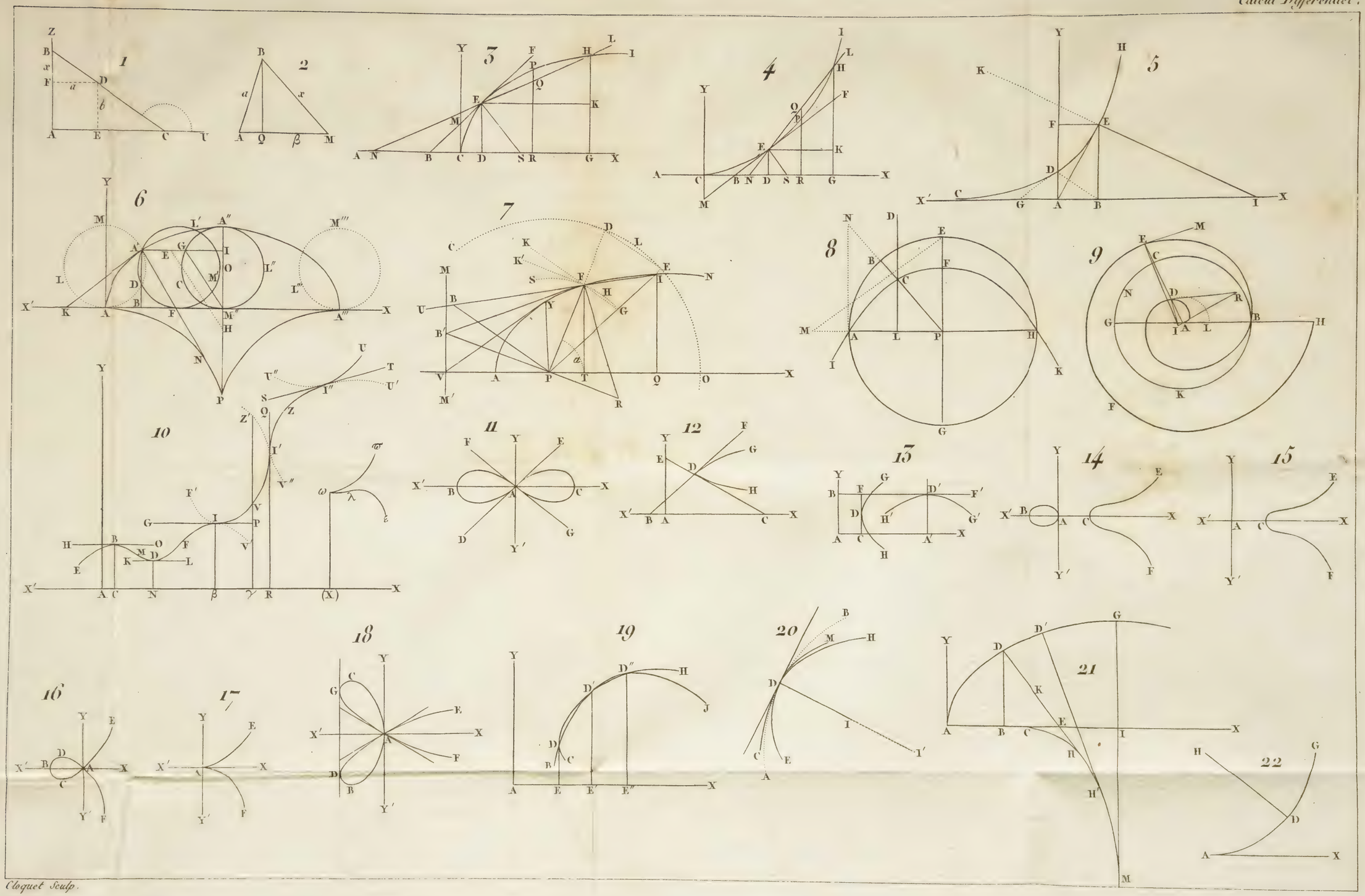
432, au lieu de

$$\int \frac{dx \cos x}{p + q \sin x} = \frac{1}{q}\left[x - p \frac{dx}{p + q \cos x}\right] + \text{const.} \quad (260)$$

*lisez*

$$\int \frac{dx \sin x}{p + q \sin x} = \frac{1}{q}\left[x - p \int \frac{dx}{p + q \sin x}\right] + \text{const.} \quad (260)$$


5
Y
H
F
E
D
A
B
I
X
6
A
D
B
H
K
9
E
M
C
N
D
R
G
B
H
I
A
L
K
F
14
Y
E
15
Y




Cloquet Sculp.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515D853T C001 V002
TRAITES ELEMENTAIRES DE CALCUL DIFFERENT
3 0112 017227239